Beloslav Riečan

Ergodické prelúdium

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 21 (1976), No. 6, 324--335

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138794

O evidenci nové částice se referuje ve studiích:

J. J. AUBERT et al.: Phys. Rev. Lett. *33* (1974), 1404.
J. E. AUGUSTIN et al.: Phys. Rev. Lett. *33* (1974), 1406.
C. BACCI et al.: Phys. Rev. Lett. *33* (1974), 1408.

Přeložil Jiří Niederle

Ergodické prelúdium

Beloslav Riečan, Bratislava

Ergodická teória, ostatne podobne ako mnohé iné matematické teórie, je zaujímavá z dvoch stanovísk: na jednej strane pracuje ergodická teória s rozsiahlym a elegantne používaným matematickým aparátom (teórie miery, funkcionálnej analýzy a pod.); na druhej strane poskytuje bohaté možnosti aplikácií, štatistickou fyzikou počnúc a trebárs teóriou čísel končiac.

V tomto článku sa budeme zaoberať jedným zo závažných problémov ergodickej teórie, ktorý bol riešený v posledných rokoch, problémom izomorfizmu Bernoulliho dynamických systémov a s tým súvisiacim pojmom entrópie. Článok by mohol mať názov „O entrópii a izomorfizme Bernoulliho dynamických systémov". Ale to by bol titul vonkoncom nepriťažlivý.

Najprv trochu terminológie. Budeme pracovať s *pravdepodobnostným priestorom,* tj. trojicou (X, S, P), kde X je neprázdna množina, S je *σ-algebra* podmnožín množiny X a P je *pravdepodobnostná miera* na S. Pripomeňme, že σ-algebra je systém podmnožín množiny X s týmito vlastnosťami: 1. $\emptyset$, $X \in S$. 2. Ak $A \in S$, tak aj $X - A \in S$. 3. Ak $A_n \in S$ $(n = 1, 2, \ldots)$, tak aj $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S$. Pravdepodobnostná miera je funkcia $P : S \to R$ vyhovujúca týmto podmienkam: 1. $P(\emptyset) = 0$, $P(X) = 1$. 2. $0 \leqq P(E) \leqq 1$ pre všetky $E \in S$. 3. Ak $A_n \in S$ $(n = 1, 2, \ldots)$ a $A_n \cap A_m = \emptyset$ $(n \neq m)$, tak $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Zobrazenie $T : X \to X$ sa nazýva mieru zachovávajúce, ak pre všetky $E \in S$ je aj $T^{-1}(E) \in S$ a $P(T^{-1}(E)) = P(E)$.

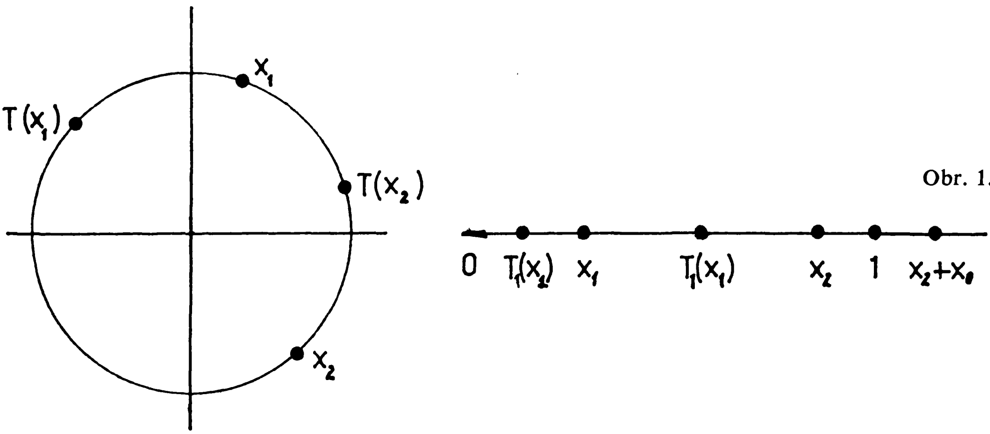
Štvorica (X, S, P, T), kde (X, S, P) je pravdepodobnostný priestor a T je mieru zachovávajúce zobrazenie sa nazýva tiež *dynamický systém.*

Uveďme jednoduchý príklad. Nech X je jednotková kružnica, S najmenšia σ-algebra obsahujúca všetky oblúky na X a P taká miera na S, že pre ľubovoľný oblúk E platí $P(E) = l/2\pi$, kde l je dĺžka oblúka E. (To preto, aby $P(X) = 1$.) Transformácia T nech je otočenie o nejaký uhol α. V komplexnom zápise $T(z) = cz$, kde $\alpha = \arg c$.

Ten istý príklad môžeme ešte inak prezentovať. Kružnicu „rozstrihneme a narovnáme" do úsečky $\langle 0, 1)$; S je systém všetkých borelovských podmnožín množiny $\langle 0, 1)$; P je Lebesguova miera. Čo odpovedá zobrazeniu T? Položme $x_0 = \alpha/2\pi$ a odpovedajúcu transformáciu priestoru $\langle 0, 1)$ označme znakom T_1. Potom (obr. 1)

$$T_1(x) = \begin{cases} x + x_0, & \text{ak } x + x_0 < 1 \\ x + x_0 - 1\,, & \text{ak } x + x_0 \geqq 1\,. \end{cases}$$

Stručne sa zvykne napísať $T_1(x) = x + x_0 (\mathrm{mod}\ 1)$. Pravda, toho nie je celkom ten príklad, ktorým sa chceme zaoberať.



Obr. 1.

Príklad, o ktorom je reč

Nech X je opäť jednotková kružnica, S je σ-algebra všetkých borelovských podmnožín množiny X, P je pravdepodobnostná miera indukovaná dĺžkou oblúka. Inak budeme definovať transformáciu T. V komplexnom zápise

$$T(z) = z^2\,,$$

teda T zdvojnásobuje uhly (obr. 2).

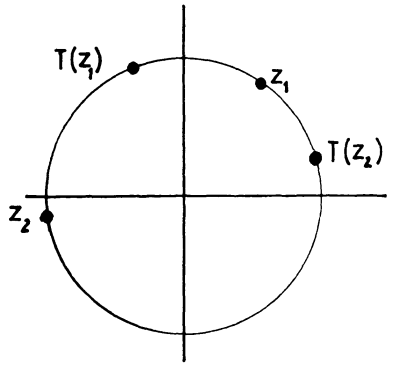
Urobme opäť analógiu na priamke. Teda $X_1 = \langle 0, 1)$. S_1 je systém všetkých borelovských podmnožín množiny X_1, P_1 je Lebesguova miera. Odpovedajúca transformácia T_1 je zrejme určená vzťahom $T_1(x) = 2x (\mathrm{mod}\ 1)$, teda (obr. 3)

$$T_1(x) = \begin{cases} 2x\,, & \text{ak } x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1\,, & \text{ak } x \geqq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Na prvý pohľad nie je možno jasné, že T resp. T_1 zachovávajú mieru. Ilustrujme si to na príklade. Nech napr. $E = \langle \frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \subset X_1$. Potom $T_1^{-1}(E) = \langle \frac{1}{8}, \frac{1}{4}) \cup \langle \frac{5}{8}, \frac{3}{4})$. Teda skutočne

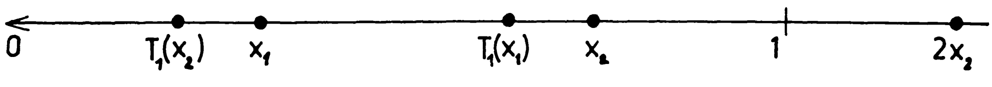
$$P_1(T_1^{-1}(E)) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \frac{1}{4} = P_1(E)\,.$$

Podobne sa dokáže, že pre každý interval $\langle a, b)$ je $P_1(T_1^{-1}(\langle a, b)) = P_1(\langle a, b))$. Nuž, a pretože invariantné množiny (tj. také množiny E, pre ktoré $P_1(T_1^{-1}(E)) = P_1(E)$) tvoria σ-algebru, obsahuje táto σ-algebra aj σ-algebru borelovských množín, tj. najmenšiu σ-algebru nad systémom všetkých intervalov, teda každá borelovská množina je invariantná.



Obr. 2.

Obr. 3.



Pravdaže, veľmi podobne sa dokáže aj o zobrazení T, že zachováva mieru. Určitú pozornosť si zasluhuje skutečnosť, že nemusí platiť rovnosť $P(T(E)) = P(E)$. Napr. ak položíme $E = \langle \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, tak $T_1(E) = \langle \frac{1}{2}, 1)$, teda

$$P_1(T_1(E)) = \tfrac{1}{2} \neq \tfrac{1}{4} = P_1(E)\,.$$

Uvedený dynamický systém (či vlastne dva, na prvý pohľad izomorfné systémy) možno ešte inak interpretovať. Urobme pre ľubovoľné číslo $x \in \langle 0, 1)$ dvojkový rozvoj

$$x = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{2^3} + \dots$$

Pritom kladieme napr. $x_1 = 0$, ak $x \in \langle 0, \frac{1}{2})$, $x_1 = 1$, ak $x \in \langle \frac{1}{2}, 1)$ apod. (Pracujeme teda s vyjadreniami typu 0,1 namiesto 0,0111...) Každému $x \in \langle 0, 1)$ priradíme takto jednoznačne postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ núl a jednotiek.

Nech X_2 je množina všetkých postupností núl a jednotiek. Priradením číslu x dvojkového rozvoja $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ dostaneme zobrazenie f množiny $X_1 = \langle 0, 1)$ do množiny X_2. Čo odpovedá pri tomto zobrazení transformácii T_1, kde $T_1(x) = 2x(\mathrm{mod}\ 1)$?

Vezmime $x \in \langle 0, 1)$,

$$x = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{2^3} + \dots .$$

Ak $x < \frac{1}{2}$, tak $x_1 = 0$. Ale vtedy je

$$T_1(x) = 2x = \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2^2} + \dots ,$$

teda prvku $T_1(x)$ odpovedá prvok $f(T_1(x)) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$.

Na druhej strane, ak $x \geqq \frac{1}{2}$, tak $x_1 = 1$, tj.

$$x = \frac{1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{2^3} + \dots .$$

Ale vtedy je

$$T_1(x) = 2x - 1 = 1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2} + \dots - 1 = \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2^2} + \dots$$

teda opäť $f(T_1(x)) = (x_2, x_3, \dots)$.

Vidíme teda, že transformácii T_1 priestoru X_1 odpovedá tzv. posunutie doľava, tj. transformácia T_2 priestoru X_2 definovaná takto:

$$T_2 : (x_1, x_2, x_3, \dots) \to (x_2, x_3\, x_4, \dots)$$

Inak zapísané

$$T_2((x_n)_{n=1}^{\infty}) = (y_n)_{n=1}^{\infty} , \quad y_n = x_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots) .$$

Aby sme však mali definovaný dynamický systém (X_2, S_2, P_2, T_2), zaostáva nám definovať σ-algebru S_2 a pravdepodobnosť P_2. S_2 je najmenšia σ-algebra obsahujúca všetky množiny typu

$$\{(x_n)_{n=1}^{\infty} ; \quad x_{j_1} = i_1 , \quad x_{j_2} = i_2, \dots, x_{j_k} = i_k\} .$$

P_2 budeme definovať tak, aby zobrazenie f bolo mieru zachovávajúce.

Nech napr.

$$E = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} ; \quad x_2 = 1, x_3 = 0\} .$$

Potom $f^{-1}(E)$ je množina tých čísel $x \in \langle 0, 1)$, v ktorých dvojkovom rozvoji je na druhom mieste 1 (teda x je v pravej polovici intervalov $\langle 0, \frac{1}{2})$, resp. $\langle \frac{1}{2}, 1)$ na treťom 0 (teda x leží v ľavej polovici intervalov $\langle \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, resp. $\langle \frac{3}{4}, 1))$. Preto (obr. 4)

$$f^{-1}(E) = \langle \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{8}) \cup \langle \tfrac{3}{4}, \tfrac{7}{8}),$$

teda

$$P_1(f^{-1}(E)) = \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{7}{8} - \tfrac{3}{4} = \tfrac{1}{4}.$$

Prichodí nám teda definovať $P_2(E)$ rovnosťou $P_2(E) = \frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^2$. Vo všeobecnom prípade, ak F má fixovaných n súradnic, kladieme $P_2(F) = (\frac{1}{2})^n$. Z teorie pravdepodobnosti je známe, že na S_2 existuje práve jedna miera s uvedenou vlastnosťou, a to bude P_2.

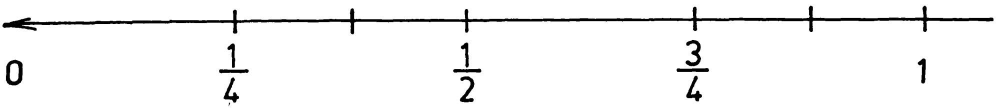
Uvedená schéma si priamo pýta zovšeobecnenia: namiesto dvoch hodnôt vezmeme konečný počet $0, 1, \ldots, k-1$. Teda X_2 je množína všetkých postupností $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ čísel $0, 1, \ldots, k-1$. Aj mieru P_2 môžeme definovať všeobecnejšie. Vyberme k nezáporných čísel $p_0, p_1, \ldots, p_{k-1}$, ktorých súčet je 1. Pravdepodobnosť P_2 je určená vzťahom

$$P_2(\{(x_n)_{n=1}^{\infty};\ x_{j_1} = i_1, x_{j_2} = i_2, \ldots, x_{j_n} = i_n\}) = p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_n}.$$

Predošlý príklad dostaneme, ak položíme $k = 2$, $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$. Potom

$$P_2(\{(x_n)_{n=1}^{\infty};\ x_{j_1} = i_1, x_{j_2} = i_2, \ldots, x_{j_n} = i_n\}) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \ldots \tfrac{1}{2} = (\tfrac{1}{2})^n.$$

Dynamický systém (X_2, S_2, P_2, T_2) vytvorený práve uvedeným spôsobom budeme nazývať krátko *jednostrannou Bernoulliho* $(p_0, p_1, \ldots, p_{k-1})$*-schémou.* Špeciálnym prípadom, ktorý sme zvlášť preskumali, ba dokonca aj nakreslili, bola jednostranná Bernoulliho $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$-schéma.



Obr. 4.

Bernoulliho schémy sú známe z teorie pravdepodobností. Ak opakujeme nejaký pokus (ktorý má konečný počet výsledkov $A_0, \ldots, A_{k-1}$ a ich pravdepodobnosti sú $P(A_0) = p_0, \ldots, P(A_{k-1}) = p_{k-1}$) nezávisle povedzme sedemkrát, tak pravdepodobnosť toho, že pri druhom pokuse nastane A_1, pri treťom A_3 a pri šiestom A_2 je $p_1 \cdot p_3 \cdot p_2$. Napr. pri hádzaní mincou pravdepodobnosť toho, že znak padne pri prvom, treťom a šiestom pokuse je $(\frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^3$. Posledný pokus (hádzanie mincou) je zrejme popísaný Bernoulliho $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$-schémou.

Obojstranné postupnosti

Podobne ako jednostrannú definujeme aj *obojstrannú Bernoulliho* $(p_0, p_1, \ldots, p_{k-1})$*-schému.* Hlavný rozdiel je v tom, že namiesto jednostranných postupností pracujeme s množinou X_2 všetkých postupností $(x_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ prvkov $0, 1, \ldots, k-1$, teda

$$X_2 = \{(x_n)_{n=-\infty}^{\infty}\ ;\quad x_n \in \{0, 1, \ldots, k-1\}\}\ .$$

S_2 je opäť najmenšia σ-algebra obsahujúca všetky množiny typu

$$\{(x_n)_{n=-\infty}^{\infty}\ ;\quad x_{j_1} = i_1, \ldots, x_{j_m} = i_m\}\ ,$$

P_2 je miera na S_2 určená vzťahom

$$P_2(\{(x_n)_{n=-\infty}^{\infty}\ ;\quad x_{j_1} = i_1, \ldots, x_{j_m} = i_m\}) = p_{i_1}p_{i_2}\ldots p_{i_m}$$

(pre ľubovoľné $j_1, \ldots, j_m \in Z$, $i_1, \ldots, i_m \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$). Konečne transformácia T_2 je opäť posunutie doľava, teda

$$T_2((x_n)_{n=-\infty}^{\infty}) = (y_n)_{n=-\infty}^{\infty}\ ,\quad \text{kde } y_n = x_{n+1}\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)\ .$$

Pokusíme sa dynamický systém (X_2, S_2, P_2, T_2) interpretovať geometricky. Vezmime špeciálne $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$-schému. Namiesto intervalu $\langle 0, 1)$ vezmime tentoraz jednotkový štvorec $X_1 = \langle 0, 1) \times \langle 0, 1)$, S_1 – borelovské podmnožiny množiny X_1 a P_1 – dvojrozmernú Lebesguovu mieru. Nech $(x, y) \in X_1$.

Urobme dvojkové rozvoje

$$x = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{2^3} + \ldots$$

$$y = \frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{2^2} + \frac{y_3}{2^3} + \ldots$$

a priraďme bodu (x, y) postupnosť

$$f(x, y) = (\ldots, y_3, y_2, y_1, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots)$$

(teda postupnosť $(z_n)_{n=-\infty}^{\infty}$, kde $z_i = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ a $z_i = y_{1-i}$ $(i = 0, -1, -2, \ldots)$). Aká transformácia $T_1 : X_1 \to X_1$ odpovedá posunutiu T_2? Pri posunutí T_2 odpovedá postupnosti $(\ldots, y_3, y_2, y_1, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ postupnosť $(\ldots, y_2, y_1, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots)$, teda $T_1(x, y) = (u, v)$,
kde

$$u = \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2^2} + \frac{x_4}{2^3} + \ldots$$

$$v = \frac{x_1}{2} + \frac{y_1}{2^2} + \frac{y_2}{2^3} + \ldots\ .$$

Ak $x_1 = 0$ (tj. $x < \frac{1}{2}$), tak $u = 2x$, $v = y/2$. Ak $x_1 = 1$ (tj. $x \geqq \frac{1}{2}$), tak $u = 2x - 1$, $v = \frac{1}{2} + y/2$. Teda

$$T_1(x, y) = \begin{cases} \left(2x, \dfrac{y}{2}\right), & \text{ak } x < \frac{1}{2} \\ \left(2x - 1, \dfrac{y+1}{2}\right), & \text{ak } x \geqq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Zobrazenie T_1 sa nazýva tiež *pekárskou transformáciou,* pretože ho možno vyjadriť ako transformáciu zloženú z dvoch transformácií $T_1 = V \circ U$, kde (obr. 5)

$$U\colon \langle 0, 1) \times \langle 0, 1) \to \langle 0, 2) \times \langle 0, \tfrac{1}{2}),$$

$$U(x, y) = \left(2x, \frac{y}{2}\right),$$

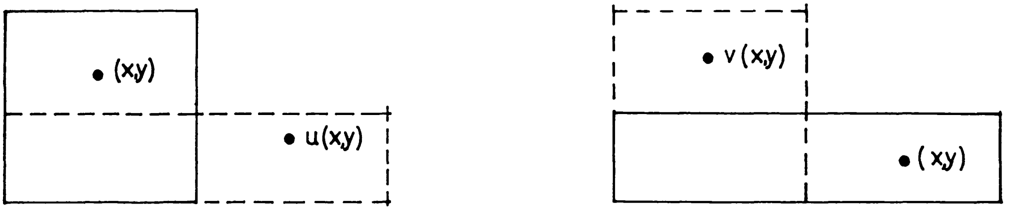
$$V\colon \langle 0, 2) \times \langle 0, \tfrac{1}{2}) \to \langle 0, 1) \times \langle 0, 1),$$

$$V(x, y) = \begin{cases} (x, y), & \text{ak } x < 1 \\ (x - 1, y + \frac{1}{2}), & \text{ak } x \geqq 1. \end{cases}$$

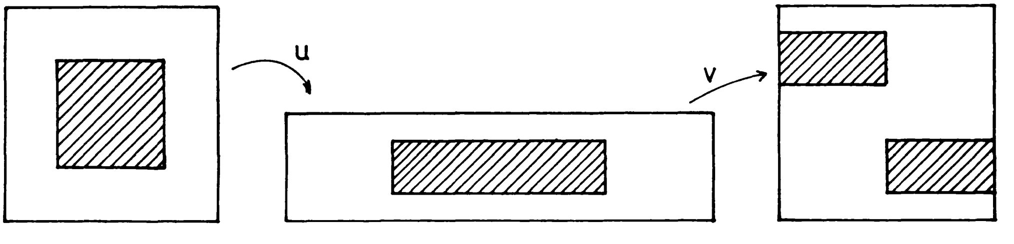
Nuž, a tento proces pripomína miesenie chleba (obr. 6).

Izomorfizmus dynamických systémov

Zvláštnosťou dynamických systémov v porovnaní s niektorými inými matematickými štruktúrami je tá okolnosť, že sa odhliada od množín nulovej miery.



Obr. 5.



Obr. 6.

Dynamické systémy (X_1, S_1, P_1, T_1), (X_2, S_2, P_2, T_2) sa nazývajú (*metricky*) *izomorfné*, ak existujú také množiny $Y_1 \subset X_1$, $Y_2 \subset X_2$ a také zobrazenie $f\colon Y_1 \to Y_2$, že platí:

1. $P_1(Y_1) = 1$, $P_2(Y_2) = 1$, f je jedno-jednoznačné.
2. Nech $E \subset Y_1$. Potom $E \in S_1 \Leftrightarrow f(E) \in S_2$.
3. Pre všetky $E \in S_1$, $E \subset Y_1$ je $P_1(E) = P_2(f(E))$.
4. Diagram

$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[r, "T_1"] \arrow[d, "f"'] & Y_1 \arrow[d, "f"] \\ Y_2 \arrow[r, "T_2"] & Y_2 \end{tikzcd}$$

je komutatívny, tj. $f(T_1(x)) = T_2(f(x))$ pre všetky $x \in Y_1$.

Príkladom izomorfných dynamických systémov sú dynamické systémy (X_1, S_1, P_1, T_1) a (X_2, S_2, P_2, T_2), kde $X_1 = \langle 0, 1)$, $T_1(x) = 2x(\text{mod } 1)$ a (X_2, S_2, P_2, T_2) je jednostranná Bernoulliho $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$-schéma. V tomto prípade môžeme vziať $Y_1 = X_1$, $Y_2 = X_2 - Z_2$, kde Z_2 pozostáva z tých postupností $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, v ktorých je len konečný počet núl. Množina Z_2 je spočítateľná, a pretože jednobodové množiny majú mieru nula, je aj $P_2(Z_2) = 0$. Zobrazenie

$$f\colon x = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \ldots \to (x_n)_{n=1}^{\infty}$$

je zobrazením Y_1 na Y_2 a vyhovuje všetkým požiadavkám kladeným na izomorfizmus.

Spektrálna ekvivalentnosť

Nech (X, S, P, T) je dynamický systém, $L_2(X)$ odpovedajúci Hilbertov priestor. Transformácia T indukuje transformáciu $U\colon L_2(X) \to L_2(X)$ definovanú takto: Ak $f \in L_2(X)$, tak $Uf(x) = f(T(x))$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"'] & & X \arrow[ll, "T"'] \arrow[dl, dashed, "Uf"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

Dva dynamické systémy (X_1, S_1, P_1, T_1), (X_2, S_2, P_2, T_2) sa nazývajú spektrálne ekvivalentné, ak existuje taký izomorfizmus $\varphi : L_2(X_1) \to L_2(X_2)$, že diagram

$$\begin{array}{ccc} L_2(X_1) & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & L_2(X_2) \\ \Big\downarrow U_1 & & \Big\downarrow U_2 \\ L_2(X_1) & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & L_2(X_2) \end{array}$$

je komutatívny.

V pozadí problematiky, o ktorej sa chceme zmieniť, stojí táto skutočnosť: všetky obojstranné Bernoulliho schémy sú spektrálne ekvivalentné (pozri napr. [6]). Naskytá sa otázka: Sú všetky Bernoulliho schémy izomorfné? Negatívnu odpoveď na túto otázku dal v r. 1959 A. N. KOLMOGOROV. V tejto súvislosti zaviedol pojem entrópie dynamického systému.

Entrópia dynamického systému

Nech (X, S, P, T) je dynamický systém. Nech $\xi = \{E_1, \dots, E_m\}$ je konečný merateľný rozklad, tj. $E_i \in S$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Znakom $\bigvee_{i=0}^{n-1} T^i\xi$ označíme rozklad vytvorený všetkými množinami tvaru

$$E_{j_0} \cap T^{-1}(E_{j_1}) \cap \dots \cap T^{-(n-1)}(E_{j_{n-1}}) \quad (j_i = 1, \dots, m,\ i = 0, \dots, n-1)\,.$$

Entrópia dynamického systému sa definuje postupne takto:

$$H(\xi) = -\sum_{i=1}^{m} P(E_i) \log P(E_i)\,,$$

$$h(\xi, T) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\Big(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi\Big)\,,$$

$$h(T) = \sup\,\{h(\xi, T);\ \xi \text{ je konečný merateľný rozklad}\}\,.$$

Ukážeme si ako sa vypočíta entrópia Bernoulliho $(p_0, p_1, \dots, p_{k-1})$-schémy. Za tým účelom zvolíme rozklad ξ takto: $\xi = \{E_0, E_1, \dots, E_{k-1}\}$, kde

$$E_i = \{(x_j)_{j=-\infty}^{\infty};\ x_0 = i\}$$

Podľa definície Bernoulliho schémy je $P(E_i) = p_i$, teda

$$H(\xi) = -\sum_{i=0}^{k-1} p_i \log p_i\,.$$

Ako vyzerá $\bigvee_{i=0}^{2-1} T^{-i}\xi$? Pozostáva zo všetkých množín tvaru $E_i \cap T^{-1}(E_j)$, teda

$$H(\bigvee_{i=0}^{1} T^{-i}\xi) = -\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1} P(E_i \cap T^{-1}(E_j)) \log P(E_i \cap T^{-1}(E_j)) .$$

Pretože množiny E_i, $T^{-1}(E_j)$ sú podľa definície Bernoulliho schémy nezávislé, platí, že $P(E_i \cap T^{-1}(E_j)) = P(E_i)\, P(T^{-1}(E_j)) = p_i p_j$. Preto

$$H(\bigvee_{i=0}^{1} T^{-i}\xi) = -\sum\sum p_i p_j \log p_i - \sum\sum p_i p_j \log p_j =$$
$$= -(\sum_{j=0}^{k-1} p_j) \sum_i p_i \log p_i - (\sum_{i=0}^{k-1} p_i) \sum_j p_j \log p_j = 2H(\xi) .$$

Podobne sa dokáže, že

$$H(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi) = nH(\xi) ,$$

teda

$$h(\xi, T) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} nH(\xi) = H(\xi) .$$

Vieme už teda, že $h(T) \geqq -\sum p_i \log p_i$. Číslo $-\sum p_i \log p_i$ sa nedá prekročiť. Platí totiž veta, ktorú Billingsley nazýva Kolmogorovovou, Parry Sinajovou:

Ak ξ je vytvárajúci rozklad (tj. S je najmenšia σ-algebra obsahujúca $\bigcup_{i=-\infty}^{\infty} T^{-i}\xi$), tak

$$h(T) = h(T, \xi) .$$

V našom prípade je ξ vytvárajúci rozklad. Preto entrópia Bernoulliho $(p_0, \ldots, p_{k-1})$-schémy je

$$h(T) = -\sum_{i=0}^{k-1} p_i \log p_i .$$

Izomorfizmus a entrópia

Z toho, čo sme uviedli v predošlom odstavci vyplývajú tieto dve tvrdenia:

1. Izomorfné dynamické systémy majú rovnakú entrópiu.
2. Entrópia Bernoulliho $(p_0, \ldots, p_{k-1})$-schémy je $h(T) = -\sum p_i \log p_i$.

Z týchto dvoch tvrdení vyplýva existencia neizomorfných Bernoulliho dynamických systémov. Stačí nájsť dve schémy s rôznymi entrópiami. Keby boli totiž schémy izomorfné, mali by podľa 1 rovnakú entrópiu. Ale z pravidla 2 vyplýva napr., že $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ - schéma má entrópiu log 2, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$-schéma má entrópiu log 3.

Entrópia a izomorfizmus

V tejto súvislosti vznikla otázka (explicitne formulovaná v ROCHLINOVOM prehľadnom článku z r. 1960): Sú izomorfné každé dva Bernoulliho dynamické systémy s rovnakou entrópiou?

Prvý výsledok dosiahol v r. 1959 L. D. MEŠALKIN, keď dokázal, že Bernoulliho schémy $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$ a $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ sú izomorfné.

Ďalší významnejší pokrok dosiahol JA. G. SINAJ ([3]), keď dokázal túto vetu: Ak (X_1, S_1, P_1, T_1), (X_2, S_2, P_2, T_2) sú dve Bernoulliho schémy a $h(T_1) \geqq h(T_2)$, tak existuje také mieru zachovávajúce zobrazenie $g : X_1 \to X_2$, že $g \circ T_1 = T_2 \circ g$.

Kompletná odpoveď dala na seba čakať 10 rokov. Až v r. 1970 dokázal D. ORNSTEIN ([4]), že každé dve Bernoulliho schémy s rovnakou entrópiou sú izomorfné. Ornstein vychádza zo Sinajovho výsledku a používa epsilonový aparát charakterizovaný týmito dvoma pojmami:

Merateľné rozklady $\alpha = \{E_1, \ldots, E_n\}$, $\beta = \{F_1, \ldots, F_n\}$ sa nazývajú *ε-nezávislé,* ak

$$\sum_{i,j} \left|P(E_i \cap F_j) - P(E_i)\, P(F_j)\right| < \varepsilon\,.$$

Rozklad $\alpha = \{E_1, \ldots, E_m\}$ je *ε-zjemnením rozkladu* $\beta = \{F_1, \ldots, F_n\}$, ak existuje taký rozklad $\gamma = \{G_1, \ldots, G_n\}$, ktorého je α zjemnením a pre ktorý platí nerovnosť

$$\sum_i P(F_i \triangle G_i) < \varepsilon\,.$$

O svojich výsledkoch napísal D. Ornstein knihu [19].

Literatúra

[1] KOLMOGOROV A. N., *Novyj metričeskij invariant tranzitivnych dinamičeskich sistem i avtomorfizmy v prostranstvach Lebesgua,* DAN SSR *124* (1959), 754—755.

[2] MEŠALKIN L. D., *Odin slučaj izomorfizmov schem Bernoulli,* DAN SSSR *128* (1959), 41—44.

[3] SINAJ JA. G., *Slabyj izomorfizm preobrazovanij s invariantnoj mieroj,* Mat. sb. *63* (*105*) (1964), 23—42.

[4] ORNSTEIN D., *Bernoulli shifts with the same entropy are isomorphic,* Advances in Math. *4*, (1970), 337—352; ruský preklad v zb. Matematika *15, 1* (1971), 114—130.

[5] HALMOS P. R., *Entropy in ergodic theory,* Chicago 1959, Roma 1960.

[6] BILLINGSLEY P., *Ergodic theory and information,* New York 1965, Moskva 1969.

[7] ROCHLIN V. A., *Lekcii po entropijnoj teorii preobrazovanij s invariantnoj mieroj,* Uspechi mat. nauk *22* (1967), No 5, 3—56.

[8] PARRY W., *Entropy and generators in ergodic theory,* New York 1968.

[9] SINAJ JA. G., *Dynamical systems I., Ergodic theory,* Aarhus 1970.

[10] ORNSTEIN D., *Bernoulli shifts with infinite entropy are isomorphic*, Advances in Math. *5* (1970), 339—348.

[11] ORNSTEIN D., *Factors in Bernoulli shifts are Bernoulli shifts*, Advances in Math. *5* (1970), 344—369.

[12] ORNSTEIN D., *Bernoulli shifts in flows*, Springer, Lecture notes 160 (1970), 178—218.

[13] ORNSTEIN D., *A Kolmogorov automorphism which is not a Bernoulli shift*; ruský preklad v zb. Matematika *15, 1* (1971), 131—150.

[14] FRIEDMAN N. A., ORNSTEIN D., *On isomorphism of weak Bernoulli transformations*, Advances in Math. *5* (1970), 365—394.

[15] SMORODINSKY M., *Ergodic theory, entropy*, Berlin 1971.

[16] ORNSTEIN D., *Some now results in the Kolmogorov-Sinaj theory of entropy and ergodic theory*, Bull. of the Amer. Math. Soc., *77* (1970), 878—890.

[17] WEISS B., *The isomorphism problem in ergodic theory*, Bull. of the Amer. Math. Soc. *78* (1972), 668—684.

[18] ORNSTEIN D., *An application of ergodic theory to probability theory*, The Annals of Probability *1* (1973), No 1, 43—65.

[19] ORNSTEIN D., *Ergodic theory, randomness and dynamical systems*, Yale Univ. Press, London 1974.

Publikácie [5]—[9] poskytujú základné informácie o entropickej teórii, pravda, neobsahujú najnovšie Ornsteinove výsledky. Ornsteinove výsledky, ako aj výsledky ďalších autorov sú obsiahnuté v prácach [4], [10]—[15]. Články [16] a [17] sú prehľadné, v [18] sa aplikujú dosiahnuté výsledky na teóriu stacionárnych procesov.

Poznámky k tretej časti 18. Hilbertovho problému

Ernest Jucovič, Košice

K napísaniu týchto poznámok podnietil autora článok V. FREIA [4], vlastne niekoľko (nie celkom výstižných) tvrdení v ňom. O 18. probléme HILBERTA sa tam hovorí, že „nepatří patrně k otázkám mimořádně plodným pro samotnou matematiku". A o tretej časti uvedeného problému (určiť maximálne zaplnenie E_n zhodnými guľami, popr. inými telesami — neskoršie ukážeme, že Hilbert nie je pôvodcom tohoto problému) sa v [4] píše, že „sotva ji lze zodpovědět vyčerpávajícím způsobem", pričom o ďalšom vývoji tejto časti Hilbertovho problému sa tam nehovorí. Keďže ale na ňu nadväzuje veľa zaujímavých poznatkov geometrie posledných desaťročí (dakedy označovaných za „*diskrétnu geometriu*"), z ktorých mnohé je možné pre každého zrozumiteľne formulovať, je hádam vhodné stručne o týchto partiách modernej geometrie čitateľov Pokrokov poinformovať a doplniť tak článok V. Freia. Ak to na príslušných miestach nebude inakšie povedané, bližšie informácie nájde čitateľ v monografiách [2], [3], [7], [8]; výnimkou je iba vlastný problém b) v 4. odstavci.