Ivan Netuka; Jiří Veselý
F. Riesz a matematika dvacátého století

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 25 (1980), No. 3, 128--138

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138774

socialistické společnosti a její záměry pro další etapu nutně vyžadují. A podobně jako máme všichni značné rezervy v kvalitě práce v oblasti vědeckovýzkumné a ve spolupráci s praxí, máme nejméně takové rezervy ve zkvalitňování výchovně vzdělávacího procesu na všech typech škol včetně škol vysokých. Kromě odborné výuky, podněcování zájmu o studium fyziky a matematiky, je přitom stejně důležitá promyšlená světonázorová výchova v dohodnuté jednotné frontě všech učitelů. K takové výchovné práci nás rovněž zavazují závěry XV. sjezdu KSČ, jejichž nedílnou součástí je nová výchovně vzdělávací soustava a zejména potom závěry přijaté na celostátní konferenci učitelů v dubnu 1979.

Jsem přesvědčen o tom, že naše úsilí v těchto oblastech na všech našich pracovištích se bude cílevědomě v daných podmínkách plánovitého rozvoje vědy a techniky a výchovy mladé generace naší vyspělé socialistické společnosti cílevědomě zvyšovat, že všichni budeme plánovitě podle svých sil pracovat a že nám k tomu bude stále důsledněji napomáhat i naše Jednota čs. matematiků a fyziků tak, jak to bylo v podstatě formulováno na loňském sjezdu. Pokud jde o fyziky, jsem pevně přesvědčen o tom, že mají dostatek prostoru, sil, prostředků a tvůrčího elánu, aby se fyzika stále prokazatelněji dostávala do čela těch vědeckých disciplín, které tvoří a budou tvořit základ moderní techniky a jejích bezprostředních aplikací v celém našem národním hospodářství.

Ještě jednou upřímně děkuji za možnost vystoupit na 6. konferenci fyziků, přeji jménem celého kolektivu Vysoké školy báňské v Ostravě vašemu závažnému a odpovědnému jednání plný úspěch.

F. Riesz a matematika dvacátého století

Ivan Netuka, Jiří Veselý, Praha

Původně jsme zamýšleli tento článek nazvat Mistr z Levoče a matematika dvacátého století. Znalci a milovníci gotiky by byli pravděpodobně názvem nadšeni, další text by jim však přinesl zklamání. V tomto článku nebudeme zkoumat význam díla Mistra Pavla z Levoče (okolo 1460 – před 1527), s jehož jménem jsou spojena špičková díla naší pozdní gotiky a který ovlivnil sloh až do dvacátých let šestnáctého století, tím méně pak jeho vztah k matematice. Mistrem*) z Levoče, kterého jsme měli na mysli, je Frigyes Riesz (1880–1956). O jeho pobytu v Levoči možná ví u nás jen málokterý matematik.

*) *mistr*,—a, m., *z lat.* magister, 1. titul samostatného řemeslníka (...); přenes. mistr = znalec, odborník, umělec (...) 2. čestný titul umělců (...) 3. v starší době akademická hodnost, doktor...

Váša, Trávníček

Na zajímavosti této informaci přidává skutečnost, že právě v průběhu levočského působení dosáhl Riesz prvních pronikavých a zásadních výsledků.

Tvrdit matematikům, že Riesz patří k nejvýznamnějším postavám světové matematiky tohoto století, je snad zbytečné. Není však na škodu si při příležitosti stého výročí jeho narození říci trochu více o jeho díle i o jeho životě.

Současný matematik spojuje Rieszovo jméno s rozvojem matematické analýzy v první polovině 20. století. Pravděpodobně si spolu s jeho jménem vybaví funkcionální analýzu nebo teorii funkcí reálné proměnné, patrně v kombinaci s Lebesgueovou mírou a integrálem. Specialisty napadne navíc přínos k funkčním prostorům, k teorii potenciálu, ke komplexní analýze a k ergodické teorii.

Rieszovy výsledky jsou natolik fundamentální, že mnoho z nich našlo trvalé místo v základních univerzitních matematických přednáškách. Připomeňme alespoň heslovitě: Rieszova věta o reprezentaci lineárních funkcionálů (na prostoru spojitých funkcí, prostorech L_p a na Hilbertově prostoru), Rieszova-Fischerova věta, Rieszovo lemma, Rieszova-Schauderova teorie, Rieszův prostor, Rieszův rozklad apod. Málo je známo, že je Riesz spolu s Fréchetem a Hausdorffem zakladatelem moderní množinové topologie. To souvisí nejspíše s tím, že svoji koncepci, kterou přednesl r. 1908 na kongresu v Římě, již dále nerozpracovával a jeho skvělé a nesmírně nové myšlenky nenašly tehdy bezprostřední ohlas.

Je celá řada pojmů a tvrzení, které nejsou spojovány s Rieszovým jménem, přestože je jejich autorem nebo duchovním otcem. Tak je to např. s definicí souvislosti v topologii (což nebylo vcelku známo nebo spíše bylo zapomenuto – srv. [4]), s axiomatikou úplného normovaného lineárního prostoru (Banachův prostor), s pojmem silné a slabé konvergence, s uspořádanými vektorovými prostory (pro ně má zásadní význam Rieszův příspěvek na kongresu r. 1928 v Bologni), s konvergencí podle míry, se zavedením a studiem prostorů L^p, s pojmy adjungovaného i kompaktního operátoru, funkcí operátorů, atd.

S Rieszem se ti, kteří studují matematiku, setkávají (aniž by to většinou věděli) již v prvních letech studia. Tak např. dnes standardní důkazy vět o základních vlastnostech spojitých funkcí na uzavřeném intervalu pocházejí od Riesze. Vděčíme mu i za věty o ortogonálním doplňku. Spektrální teorie kompaktních operátorů bývá většinou věrně reprodukována podle jeho prací. Je mu třeba připsat i řadu krásných obratů a důkazů v diferenciálním a integrálním počtu a v teorii míry – namátkou připomeňme originální důkaz tvrzení, že derivace monotónní funkce existuje skoro všude, založený na elementárním lemmatu „o vycházejícím slunci", nebo důkaz Jegorovovy věty.

Šíře Rieszových zájmů nebyla nikterak malá. Nelze dnes zvládnout základy teorie potenciálu bez znalosti Rieszovy teorie subharmonických funkcí. V učebnicích ergodické teorie nenajdeme pravděpodobně jiné důkazy základních vět než ty, které pocházejí od Riesze. Teorie Banachových prostorů analytických funkcí (zejména prostorů H^p) je opět těsně spjata s Rieszovým jménem. To vše je jen několik náhodně vybraných příkladů.

Seznam Rieszových prací má ke stovce položek. Práce jsou psány v maďarštině, francouzštině, němčině, angličtině a italštině. Některé vyšly dvakrát – v maďarštině a v některém světovém jazyce. Články jsou vždy stylizovány jasně i podrobně a dokumentují Rieszův program: složité převádět na jednoduché a z těžkého udělat lehké. (Autoři článku se nemohou zbavit dojmu, že pro pochopení podstaty Rieszových výsledků je často lépe sáhnout k původním pracím než k modernějším učebnicím, kde pozadí problému, motivace, souvislosti a pochopitelná logika úvah bývá nahrazována abstraktní formulací, stručností a formální vybroušeností.)

Pro Riesze byla charakteristická mimořádná schopnost vidět v krystalické podobě podstatná fakta v pracích jiných a využít je pro vlastní bádání. Byl jedním z prvních, kdo si uvědomil, že Lebesgueův integrál není samoúčelným zobecněním integrálu Riemannova a plně pochopil jeho význam. Je dobře známo, že přijetí koncepce Lebesgueova integrálu, která je dnes považována za základní, nebylo zpočátku jednoznačné a samozřejmé. Ostatně cena každé teorie je prověřována možnostmi její aplikace. Sám Lebesgue použil svého integrálu pro dosažení nových výsledků, na další podstatná uplatnění upozornil již v prvním desetiletí našeho století právě Riesz (vedle Fatoua a nevelkého počtu dalších matematiků). Lze tedy o Rieszovi jednoznačně říci, že má velké zásluhy na rozpracování a propagaci moderního pojetí reálné analýzy, reprezentovaného především francouzskou školou.

Z předcházejícího výčtu již jasně vyplývá výjimečnost Rieszovy osobnosti a jeho postavení v dějinách matematické analýzy a matematiky 20. století vůbec. Jakoby to nebylo dílo jediného člověka – ujišťujeme však informovanější čtenáře, že jsme nic z výsledků Marcela Riesze F. Rieszovi nepřipsali.

Frigyes Riesz se narodil 22. ledna 1880 v Györu (město ležící nedaleko Komárna v dnešním Maďarsku). Jeho otec byl lékařem, jeho bratr Marcel se stal rovněž významným matematikem (několik podstatných výsledků z komplexní analýzy publikovali bratři Rieszové spolu v práci z roku 1916).

Po absolvování gymnázia se F. Riesz zapsal na známou l'Ecole Polytechnique v Zürichu, přestože již v té době měl vyhraněné matematické sklony; pravděpodobně on sám i jeho rodina považovali v tehdejší době postavení inženýra za jistější než méně perspektivní matematickou kariéru. Zájem o matematiku však brzy zvítězil. Od r. 1899 studoval Riesz na univerzitě v Budapešti, později strávil rok v Göttingen, kde jej silně ovlivnili Hilbert a Minkowski. Studia zakončil r. 1902 v Budapešti obhajobou disertace z projektivní geometrie; tato práce obsahuje cenné myšlenky, nesetkala se však s podstatnějším ohlasem.

Rieszův život byl naplněn úspěchy, je třeba si však uvědomit, že se nedostavily okamžitě – byly výsledkem usilovné práce. Po získání profesorského diplomu působil jako profesor gymnázia nejprve v Levoči (1904–1908) a později v Budapešti. Teprve r. 1911, kdy měl za sebou výrazné úspěchy, mu bylo nabídnuto místo mimořádného profesora na univerzitě v Koloszvaru (nyní Cluj, Rumunsko). V době svého středoškolského působení Riesz intenzívně studuje práce velikánů zlatého věku francouzské matematiky (Baire, Borel, Lebesgue, Fréchet) a usilovně pracuje. Jeho jméno proniklo do širšího povědomí teprve po uveřejnění práce o ortogonálních systémech r. 1907 (obsahuje Rieszovu-Fischerovu větu, o níž se podrobněji zmíníme dále). R. 1908 přednáší na kongresu v Římě, r. 1909 publikuje větu o reprezentaci funkcionálu na prostoru spojitých funkcí. Na univerzitu přichází jako jedenatřicetiletý ověnčen mezinárodními úspěchy a v té době má „na kontě" 25 publikací.

Pak se již rychle dostavují další úspěchy. R. 1914 se stává řádným profesorem, r. 1916 členem korespondentem (uherské) akademie věd. Po roce 1918, kdy Koloszvar připadl Rumunsku, odchází Riesz nakrátko do Budapešti a r. 1920 do Szegedu. Tam působí na univerzitě, která se potýká s nedostatkem prostor a studijní literatury včetně časopisů. Přijímá přitom náročný úkol: spolu s kolegou A. HAAREM zakládají r. 1922 matematický ústav Jánose Bolyaie a časopis Acta Scientiarum Mathematicarum, který se brzy zařadil mezi významná matematická periodika. Přes značné zaneprázdnění (v roce 1925/26 je rektorem univerzity) neustále publikuje práce přinášející nové perspektivy rozvoje matematické analýzy. I když je v té době ve světě už považován za předního badatele, jeho jmenování řádným členem akademie „projde" teprve na druhý pokus v r. 1936. Jeho přechod na budapešťskou univerzitu se uskutečňuje až v r. 1946.

Rieszovi byly uděleny čestné doktoráty univerzity v Szegedu a Budapešti i čestný doktorát pařížské Sorbonny; byl členem-korespondentem pařížské akademie věd a dalších učených společností, čestným předsedou matematické společnosti J. Bolayie a dvojnásobným laureátem Kossuthovy ceny. Podruhé mu byla udělena za knihu *Leçons d'analyse fonctionnelle*, kterou napsal spolu se svým žákem B. SZ.-NAGYEM a která bývá považována za nejúspěšnější matematickou publikaci své doby; o jejím úspěchu svědčí, že byla přeložena do němčiny, angličtiny, ruštiny a čínštiny.

I přes stoupající zdravotní obtíže přednášel profesor Riesz na budapešťské univerzitě až do roku 1955, kdy se též musel pro nemoc vzdát funkce předsedy kolegia matematiky a fyziky maďarské akademie věd. Zbytek života strávil na lůžku v nemocnici. Zemřel 28. února 1956.

Přiblížit čtenáři všechny Rieszovy výsledky v článku rozumné délky je nemožné, přestože Riesz ovládal umění dělat těžké věci s nevídanou lehkostí. Navíc jsou jeho výsledky hluboké. Náš výběr bude přirozeně subjektivní.

Všimněme si nejprve výsledků z teorie subharmonických funkcí, které časově spadají do doby Rieszova pobytu v Szegedu (nejzávažnější práce vyšly v letech 1926/27). Označení i výklad je upraven, snažíme se však zachovat celkový Rieszův přístup k problematice.

Je obecně známo, že funkce f definovaná na otevřeném intervalu $I \subset R^1$, pro kterou platí $f'' \geqq 0$, je *konvexní* v I. Připomínáme, že f je konvexní v I, jestliže pro každé dva body $x, y \in I$ a každé $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ platí nerovnost

$$f(\alpha x + (1 - \alpha) y) \leqq \alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y) . \tag{1}$$

Poslední vztah lze geometricky interpretovat takto: představme si graf funkce f a spojme body $[x, f(x)]$, $[y, f(y)]$ grafu f úsečkou. Potom vztah (1) vyjadřuje, že celá úsečka leží nad grafem nebo na grafu funkce f. Druhý případ nastává, právě když je f mezi x a y lineární (platí tedy $f''(z) = 0$ pro všechna z mezi x a y).

Je známo, že k charakterizaci konvexních funkcí stačí méně: f je konvexní na I, je-li spojitá na I a pro všechna $z \in I$ a $r > 0$ taková, že $\langle z - r, z + r \rangle \subset I$, platí

$$f(z) \leqq \tfrac{1}{2}[f(z - r) + f(z + r)] . \tag{2}$$

Výraz na pravé straně (2) je aritmetickým průměrem funkčních hodnot funkce f v bodech, které mají od z vzdálenost rovnou r, tedy v hraničních bodech „jednorozměrné koule“ $\{x; |x - z| \leqq r\}$.

Nyní přejdeme k případu R^m, $m \geqq 1$, připomeneme však ještě jednu definici. Jsou-li funkce u_n vesměs spojité a $u_n \searrow u$ (tj. $u_1 \geqq u_2 \geqq \ldots$ a $u = \lim u_n$), nemusí být limitní funkce u spojitá. Říkáme, že funkce u s hodnotami v$\langle -\infty, \infty)$ je *shora polospojitá*, pokud existuje posloupnost spojitých funkcí u_n tak, že $u_n \searrow u$.

Zobecnit pojem konvexní funkce v R^1 pro případ vícerozměrného prostoru lze různě. Je-li $G \subset R^m$, lze požadovat platnost (1) pro všechna $x, y \in G$ (je tedy přirozené, že všechny body $\alpha x + (1 - \alpha) y$ musí ležet v G, takže má smysl uvažovat jen konvexní G); tak dostaneme konvexní funkce na $G \subset R^m$, $m \geqq 1$. Jiné zobecnění navrhl Riesz. Vyšel z podmínky (2), ve které aritmetický průměr nahradil sférickým, resp. objemovým průměrem. Sférický průměr je vícerozměrným analogem aritmetického průměru: je-li u funkce definovaná na otevřené množině $G \subset R^m$ a existuje integrál u přes sféru $S(z, r) = \{x; \|z - x\| = r\}$, je sférický průměr $L_u(z, r)$ definován jako hodnota tohoto integrálu dělená plošnou velikostí $S(z, r)$. Podobně se definuje objemový průměr, ve kterém se integruje přes kouli $K(z, r) = \{x; \|z - x\| \leqq r\}$. Tímto způsobem Riesz dospěl k definici tzv. subharmonických funkcí: funkce u definovaná na oblasti $G \subset R^m$ je *subharmonická v* G, pokud je shora polospojitá, není identicky rovna $-\infty$ a pro každé $x \in G$ a každé r, pro něž je $K(x, r) \subset G$, platí

$$u(x) \leqq L_u(x, r) \tag{3}$$

(při záměně $L_u(x, r)$ za objemový průměr dostaneme tutéž třídu funkcí).

Je-li μ míra s kompaktním nosičem v R^m, $m > 2$, nazývá se funkce

$$p_\mu(x) = \int_{R^m} \|x - y\|^{2-m} \, \mathrm{d}\mu(y)$$

Newtonův potenciál míry μ. Fyzikálně lze na R^3 tuto funkci interpretovat zhruba takto: popisuje-li μ rozložení hmoty v prostoru, udává $p_\mu(x)$ velikost práce potřebné k přenesení jednotkové hmoty z x mimo gravitační pole vytvořené μ. Studium funkcí tohoto typu sahá do 18. století; tyto funkce daly jméno celé disciplíně — teorii potenciálu.

Newtonovy potenciály jsou až na znaménko subharmonické funkce. Rovněž pro spojité funkce vyhovující podmínce

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} \geqq 0 \tag{4}$$

není ověření podmínky (3) obtížné. Výhoda Rieszovy definice spočívá v tom, že se subharmonicita zachovává při monotónním limitním přechodu: jsou-li u_n vesměs subharmonické funkce a $u_n \searrow u$, je u subharmonická nebo $u \equiv -\infty$. Přitom se Rieszovo pojetí příliš nevzdaluje od „hladkých“ subharmonických funkcí charakterizovaných vztahem (4): je-li u subharmonická, lze volit u_n nekonečně hladké subharmonické tak, že $u_n \searrow u$.

Riesz dokázal pro subharmonické funkce celou řadu důležitých vlastností (např. o jejich sférických a objemových průměrech). Podstatné je, že pomocí nich charakterizoval jistým způsobem potenciály. Již víme, že $-p_\mu$ je subharmonická funkce. Je-li obráceně $u \leqq 0$ subharmonická funkce, pak existuje míra μ a nezáporná konstanta c tak, že $-u = p_\mu + c$.

Podobnou větu (Rieszova věta o rozkladu) dokázal i pro subharmonické funkce definované na obecnějších množinách. Je-li $G \subset R^m$, $m > 2$ a u subharmonická funkce na G, pro kterou existuje harmonická funkce $h \geqq u$(na G), lze $-u$ vyjádřit jako součet jisté harmonické funkce (největší harmonické minoranty $-u$ na G) a jistého potenciálu s tzv. Greenovým jádrem.

Výjimečnou důležitost v Rieszově díle mají jeho zásluhy o funkcionální analýzu. V článku [3] jsme se snažili popsat alespoň v hrubých obrysech vývoj této disciplíny v době její prehistorie; tehdy jsme skončili právě v té době, kdy Riesz dostudoval; neuškodí tedy si povšimnout trochu šířeji dalšího vývoje s přihlédnutím právě k Rieszovým výsledkům. Připomeneme některé pojmy.

Nechť X je *normovaný lineární prostor*, tj. lineární prostor (neprázdná množina prvků, které budeme nazývat vektory nebo body prostoru X, pro něž je definováno „rozumné" sčítání a násobení reálnými, resp. komplexními čísly), na němž je definována norma. *Norma* je funkce $x \mapsto \|x\|$, $x \in X$, která má následující vlastnosti: pro všechna $x, y \in X$ a každé reálné, resp. komplexní číslo α platí

$$\|x + y\| \leqq \|x\| + \|y\|,$$
$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|,$$
$$\|x\| \geqq 0, \text{ přičemž } \|x\| = 0, \text{ právě když je } x = 0.$$

Nejjednodušším příkladem normovaného lineárního prostoru je euklidovský prostor R^m. Tento prostor má řadu speciálních vlastností, z nichž některé budeme potřebovat v obecnějším kontextu. Jestliže v normovaném lineárním prostoru X je každá cauchyovská posloupnost konvergentní, nazýváme X *úplný prostor* (podrobněji: z podmínky $\|x_m - x_n\| \to 0$ pro $m, n \to \infty$ vyplývá existence $x \in X$ tak, že $x_n \to x$).

Lineární prostor H nad tělesem komplexních (resp. reálných) čísel se nazývá *prostor se skalárním součinem*, je-li každé uspořádané dvojici x, y prvků z H přiřazeno komplexní (resp. reálné) číslo (x, y) tak, že pro všechna $x, y, z \in H$ a každé komplexní (resp. reálné) číslo α platí:

$$(x, y) = \overline{(y, x)} \text{ (pruh značí číslo komplexně sdužené)},$$
$$(x + y, z) = (x, z) + (y, z),$$
$$(\alpha x, y) = \alpha(x, y),$$
$$(x, x) \geqq 0, \text{ přičemž } (x, x) = 0, \text{ právě když je } x = 0.$$

Ze skalárního součinu lze jednoduše obdržet normu pomocí vztahu $\|x\| = (x, x)^{1/2}$. Je-li při této normě H úplný normovaný lineární prostor, nazývá se H *Hilbertův prostor*. Standardním příkladem je prostor C^m m-tic komplexních čísel, resp. prostor R^m (s obvyklým skalárním součinem) a prostory l^2 a $L^2(a, b)$. Poznamenáváme, že v normovaném lineárním prostoru obecně nelze zavést skalární součin tak, aby platilo $\|x\| = (x, x)^{1/2}$.

Prostor l^2 je přirozeným zobecněním prostorů C^m a R^m. Připomeňme třeba „komplexní“ případ: l^2 je lineární prostor všech posloupností $x = \{x_n\}$ komplexních čísel, pro něž je

$$\Sigma |x_n|^2 < \infty .$$

Skalární součin se definuje vztahem

$$(x, y) = \Sigma x_n \overline{y_n} .$$

Prostor $L^2(a, b)$ měřitelných funkcí na (a, b), čtverec jejichž absolutní hodnoty je (lebesgueovsky) integrovatelný na (a, b), je dalším důležitým příkladem; skalární součin se definuje vztahem

$$(f, g) = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} \, \mathrm{d}t$$

a provádí se obvyklé ztotožnění funkcí, které se liší pouze na množině nulové míry.

Analogicky jako v konečněrozměrném případě definujeme v Hilbertově prostoru H *ortonormální množinu*. Nazývá se tak množina $\{u_p;\ p \in P\}$ prvků z H, pro něž platí $(u_p, u_q) = 0$, pokud $p \neq q$, zatímco $(u_p, u_p) = 1$ pro všechna $p \in P$. V každém Hilbertově prostoru existuje ortonormální množina, kterou nelze doplnit na větší ortonormální množinu; taková množina se nazývá *ortonormální báze* prostoru. Důležitou ortonormální bázi v $L^2(-\pi, \pi)$ tvoří tzv. trigonometrický systém

$$\{(2\pi)^{-\frac{1}{2}}, \pi^{-\frac{1}{2}} \cos nx, \pi^{-\frac{1}{2}} \sin nx\} . \tag{5}$$

Budeme pro jednoduchost předpokládat, že Hilbertův prostor H má spočetnou ortonormální bázi (to nastává, právě když je separabilní, tj. obsahuje spočetnou hustou podmnožinu) a že $\{u_n\}$ je ortonormální množina. Pro $x \in H$ se definuje k-tý *Fourierův koeficient* $\hat{x}_k$(prvku x vzhledem k $\{u_n\}$) rovností $\hat{x}_k = (x, u_k)$. Fourierovy koeficienty mají tuto důležitou vlastnost: chceme-li co nejlépe aproximovat prvek x lineární kombinací prvků $u_1, \ldots, u_m$, je nejlepší aproximace dána právě součtem

$$s_m = \sum_{n=1}^{m} \hat{x}_n u_n . \tag{6}$$

Snadno se spočte, že platí tzv. *Besselova nerovnost*

$$\Sigma |\hat{x}_n|^2 \leqq \|x\|^2 , \tag{7}$$

tj. je $\hat{x} = \{\hat{x}_n\} \in l^2$. Lze tedy definovat lineární zobrazení $\Lambda : x \to \hat{x}$, které je zřejmě zobrazením H **do** l^2. Přicházíme k důležité otázce: které prvky z l^2 jsou posloupnostmi Fourierových koeficientů nějakého prvku z H? Jinak řečeno: chceme znát $\Lambda(H)$. Moderní formulace Rieszovy-Fischerovy věty říká, že platí rovnost

$$\Lambda(H) = l^2 .$$

Je-li navíc $\{u_n\}$ dokonce báze (maximalita!), platí v (7) rovnost a každý prvek $x \in H$ je součtem své Fourierovy řady (tj. je $\lim \|s_m - x\| = 0$ neboli $x = \Sigma \hat{x}_n u_n$). Dále je pak zobrazení Λ *prosté* a zachovává skalární součin a normu (tj. je např. $(x, y) = (\hat{x}, \hat{y})$, kde vlevo je skalární součin v H a vpravo v l^2).

Z hlediska teorie Hilbertových prostorů jsou tedy H a l^2 nerozeznatelné: prvek $x \in H$ můžeme ztotožnit s jeho „souřadnicemi" $\{\hat{x}_n\}$, tj. s $\hat{x}$. Speciálně to platí o funkčním prostoru $L^2(a, b)$, takže každá *funkce* je popsána *posloupností* („souřadnicemi"); lze tedy $L^2(a, b)$ považovat rovněž za nekonečně rozměrnou verzi euklidovského prostoru.

Budeme ještě potřebovat několik pojmů souvisejících s normovanými lineárními prostory. *Linerání funkcionál* f na prostoru X je funkce vyhovující této podmínce: pro každé $x, y \in X$ a každá čísla α, β je

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) .$$

Je-li X normovaný prostor, lze mluvit o spojitých lineárních funkcionálech: f je *spojitý*, jestliže pro každou konvergentní posloupnost $\{x_n\}$ prvků z X, $x_n \to x$, platí $f(x_n) \to f(x)$. Dá se ukázat, že lineární funkcionál f je spojitý, právě když číslo $\|f\|$ definované rovností

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|; \|x\| \leqq 1\} \tag{8}$$

je konečné. Nastane-li to, říkáme, že f je *omezený*.

Na prostoru R^m jsou všechny lineární funkcionály spojité, obecně však na normovaném lineárním prostoru X mohou existovat nespojité lineární funkcionály. Spojité lineární funkcionály na X tvoří lineární prostor, na kterém lze zavést normu pomocí výrazu z (8). Takto vzniklý normovaný lineární prostor se nazývá *duální prostor* k prostoru X a značí se X^*.

Při aplikaci výsledků funkcionální analýzy v konkrétní situaci je důležité znát popis X^* (tj. obecný tvar $f \in X^*$). S touto problematikou souvisí hned několik Rieszových výsledků. Při jejich popisu se pokusíme přiblížit vývoj některých pojmů a tak i částečně vývoj funkcionální analýzy na začátku tohoto století.

I. Fredholm (1866–1927) publikoval svoje výsledky o řešitelnosti integrální rovnice (srv. [3])

$$f(x) + \alpha \int_a^b K(x, y) f(y)\, \mathrm{d}y = g(x) \tag{9}$$

v letech 1900–1903. Tato problematika byla silným stimulem pro vývoj funkčních prostorů a mezi těmi, kteří se jí začali zabývat, byl i jeden z nejslavnějších matematiků té doby D. HILBERT (1862–1943). Poznamenejme, že s lineárním prostorem, jehož prvky jsou funkce, pracovali již v minulém století matematikové „italské školy" (VOLTERRA, PEANO, PINCHERLE); zabývali se mj. systémem spojitých funkcí na intervalu $\langle a, b\rangle$ a snažili se i o vyjádření obecného tvaru spojitého lineárního funkcionálu na tomto prostoru (pracovali se stejnoměrnou konvergencí).

Vzniku významných vět o reprezentaci předcházela řada dílčích výsledků. J. HADAMARD (1865–1963) nastolil na konci minulého století problém vytvoření uspokojivější teorie množin funkcí, která by byla abstraktnější než výsledky „italské školy". R. 1903 otiskl práci, v níž vyjádřil obecný spojitý lineární funkcionál U na prostoru $C\langle a, b\rangle$ všech spojitých funkcí na $\langle a, b\rangle$ ve tvaru

$$U(f) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\, k_n(t)\, \mathrm{d}t\,, \tag{10}$$

kde k_n jsou vesměs z $C\langle a, b\rangle$. Je to nesporně lepší výsledek než částečné poznatky italských matematiků, skýtá však velký prostor – posloupnost k_n není určena funkcionálem U jednoznačně. Podrobnější zkoumání reprezentace (10) provedl Hadamardův žák M. FRÉCHET (1878–1973), který ve své disertaci (1906) navázal na práce italské školy a vytvořil teorii *metrických prostorů*; je zajímavé, že ve většině ilustrativních příkladů, které studoval, je metrika odvozena od normy (dnešní pojetí).

Mezitím Hilbert vypracoval obecný postup řešení rovnice (9). Jeho metoda spočívala v převedení úlohy na řešení nekonečné soustavy lineárních rovnic s neznámými, které jsou Fourierovými koeficienty vzhledem k vhodnému ortonormálnímu systému funkcí $\{\varphi_n\}$. Jedním ze zásadních problémů Hilbertova přístupu byla řešitelnost rovnic typu

$$\int_a^b f(t)\, \varphi_n(t)\, \mathrm{d}t = \alpha_n \tag{11}$$

(φ_n a α_n jsou známé, hledá se f). Hilbert si s případem, kdy v (9) vystupují spojité funkce, úspěšně poradil; na druhé straně se v jeho pracích nikde nemluví o prostoru apod., i když se s l^2 pracuje.

Systematičtějšího vyšetření aparátu z Hilbertových prací se chopil E. SCHMIDT (1876–1959), který pracoval s „komplexním" l^2 (u něho se mj. objevuje označení $\|\ldots\|$, je dokázána úplnost prostoru l^2 a řada dalších tvrzení; kuriózní je, že i když Fréchetovu disertaci určitě znal, nevyužil toho, že $\|x - y\|$ je metrika).

Riesz byl veden cílem dostat Hilbertovy výsledky pro obecnější třídy funkcí. Pro tyto potřeby dokázal Rieszovu-Fischerovu větu pro $L^2(a, b)$. Téhož roku k ní dospěl nezávisle E. FISCHER (1875–1959), který byl patrně motivován rovněž Hilbertovou teorií.

Rieszův důkaz není jednoduchý, z dnešního hlediska je málo „funkcionálně analytický". Fischerův přístup se stal standardním; postupoval tak, že nejprve dokázal úplnost prostoru $L^2(a, b)$ a z ní obdržel tvrzení jako přirozený důsledek. Protože podstatný krok tvoří právě důkaz úplnosti, označuje se někdy jako Rieszova-Fischerova věta tvrzení o úplnosti $L^2(a, b)$. Ve Fischerově práci je poprvé explicitně zavedena konvergence v průměru: je-li $f_n, f \in L^2(a, b)$, pak $f_n \to f$ v průměru, platí-li

$$\int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2 \, dt \to 0.$$

Tato práce byla signálem ke zvýšení aktivity na tomto poli. Než postoupíme dále, všimneme si ještě blíže Rieszovy-Fischerovy věty. Náš popis ji představil ve tvaru, jaký v r. 1907 neměla, neboť vše se tehdy odehrávalo v $L^2(a, b)$ a označení Hilbertův prostor nikdo neznal (poprvé užil toto pojmenování pro l^2 pravděpodobně Riesz ve své knize, která vyšla v Paříži r. 1913). Poznamenejme ještě něco k motivaci: pro systém (5) a funkce, jejichž čtverec je *riemannovsky* integrovatelný, byla nerovnost (7) známa již v minulém století. Harnack se pokoušel neúspěšně dokázat rovnost a byl si r. 1882 pravděpodobně vědom, že Rieszova-Fischerova věta při riemanovské integrovatelnosti neplatí. Harnack chtěl zobecnit Riemannův integrál, jeho pokusy nebyly však úspěšné. Jak jsme ale ukázali, po zrodu Lebesgueova integrálu to nebyla problematika trigonometrických řad, která bezprostředně přispěla k „uzrání" tohoto výsledku.

Již jsme řekli, že tento výsledek tvoří mezník v Rieszově životě; je to výsledek opravdu hluboký a je často citován i používán. Nebude na škodu upozornit na jednu z mnoha jeho netriviálních aplikací. Je známo, že Σn^{-1} diverguje, zatímco $\Sigma(-1)^{n+1}n^{-1}$ konverguje. Zhruba řečeno při vhodné změně znamének lze proměnit divergentní řadu v konvergentní. Otázka zní: jaká je pravděpodobnost, že řada $\Sigma \pm n^{-1}$ konverguje? Je-li $\{\varepsilon_n\}$ posloupnost, pro niž $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$, pak „oznaménkování" řady Σa_n s nezápornými členy je vlastně přechod k řadě $\Sigma \varepsilon_n a_n$. Jak ale měřit „množiny znamének"? Užijeme prostého zobrazení, které $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}$ přiřadí $\delta = \{\delta_n\}$ tak, že je $\delta_n = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon_n)$; nyní si představíme dyadicky psané číslo $0, \delta_1\delta_2\ldots$ Jen spočetně mnoho čísel z $\langle 0, 1\rangle$ má nejednoznačný dyadický rozvoj, takže abychom změřili „množinu znamének ε", pro něž řada konverguje, můžeme změřit (ve smyslu Lebesgueovy míry) odpovídající množinu reálných čísel z $\langle 0, 1\rangle$. Na Rieszově-Fischerově větě lze založit důkaz tvrzení: Je-li $\Sigma a_n^2 < \infty$, potom řada $\Sigma \pm a_n$ konverguje pro skoro všechny volby znamének. Dodejme, že při $\Sigma a_n^2 = \infty$ řada $\Sigma \pm a_n$ *diverguje* pro skoro všechny volby znamének.

Po uveřejnění Fischerových výsledků o $L^2(a, b)$ publikují Riesz a Fréchet r. 1907 prakticky současně větu o obecném tvaru spojitého lineárního funkcionálu na $L^2(a, b)$. V moderní verzi ji lze pro Hilbertův prostor H vyslovit takto: je-li $U \in H^*$, pak existuje $u \in H$ tak, že pro všechna $x \in H$ je $U(x) = (x, u)$. V roce 1909 se Riesz vrátil k problematice reprezentace funkcionálů a vylepšil Hadamardův výsledek pro $C\langle a, b\rangle$ takto: je-li $V \in C^*\langle a, b\rangle$, pak existuje funkce v s konečnou variací tak, že pro všechny $f \in$ $\in C\langle a, b\rangle$ je

$$V(f) = \int_a^b f(t) \, dv(t)$$

(integrál vpravo zavedl STIELTJES v práci o řetězových zlomcích r. 1894 — nyní se nazývá Stieltjesův integrál; je zajímavé, že to byl Riesz, který ho poprvé od té doby významným způsobem použil). Důležité je, že funkce v, která má konečnou variaci, je po přidání jednoduché podmínky jednoznačně určena. Zhruba řečeno, duální prostor k $C\langle a, b\rangle$ je prostor funkcí s konečnou variací na $\langle a, b\rangle$. Riesz se k tvrzením o reprezentaci spojitých lineárních funkcionálů ve svých pracích ještě vracel.

Poslední obsáhlá práce, které si všimneme, vyšla v roce 1910. V ní se Riesz nejprve zabýval řešitelností rovnic typu (11). Navázal na dřívější práce Stieltjesa, Hilberta, Schmidta a Fischera, z nichž poslední řešil problém pro funkce z $L^2(a, b)$. Riesz zavádí obecnější třídy měřitelných funkcí (opět se nemluví o prostorech) f, pro něž je (lebesgueovsky) integrovatelná mocnina $|f|^p$ — v dnešním pojetí studuje prostory $L^p(a, b)$. Výsledků, které pro ně obdržel (opět např. reprezentaci spojitých funkcionálů, úplnost apod.), je mnoho a lze dokonce doložit, že již tehdy měl na mysli možnost vytvoření *axiomatické teorie*, tj. teorie normovaných lineárních prostorů. K jejímu rozvoji ostatně přispěl ještě řadou dalších prací.

Frigyes Riesz byl skutečně *Mistrem* ve všech zmíněných významech tohoto slova: byl zručný a pilný počtář — dokonalý řemeslník matematiky, jakých je dnes již poskrovnu. Byl hlubokým znalcem svého oboru a nejen jeho odborníkem, ale i na slovo vzatým umělcem (snad nám tedy milovníci gotiky prominou). Byl i několikanásobným doktorem a také vynikajícím učitelem. Kdybychom k jeho přímým žákům připočetli i ty, kteří aktivně ovládli a využili jeho výsledky, bylo by jich velmi mnoho; snad právě oni se vydatnou měrou přičiňují o to, že důležitých a krásných výsledků v matematice stále přibývá. Jen jedno je snad bohužel jiné: málokdo chce a umí o těžkých věcech psát srozumitelně a s takovou elegancí a lehkostí jako F. Riesz.

Literatura:

[1] FRÉDERIC RIESZ: *Oeuvres complètes I, II.* Akadémiai Kiadó, Budapešť, 1960.

[2] *Frigyes Riesz* (nekrológ). Mathematikai Lapok *7* (1956).

[3] I. NETUKA, J. VESELÝ: *Ivar Fredholm a počátky funkcionální analýzy.* Pokroky MFA *22* (1977), 10—21.

[4] R. L. WILDER: *Evolution of the topological concept of "connected".* Amer. Math. Monthly *85* (1978), 720—726; *87* (1980), 31—32.

Přednášející má kontrolovat svou vlastní práci. Měl by prohlížet zápisky posluchačů. Studentův konspekt je určitým zrcadlem vlastní práce, ovšem může to být křivé zrcadlo. Lektor má povinně vést cvičení, aspoň v jedné skupině, to je též svým způsobem sebekontrola. Naproti tomu stenografický záznam přednášky je málo užitečný jako způsob kontroly, a vzájemné hospitace zcela mění charakter práce.

A. P. Minakov

Kniha je bezduchá, na jejích stránkách jsou myšlenky uzavřeny v těsných neměnných výrazech. Ale přednáška — to je život, podobá se ději, který probíhá před námi, lektor musí využít všechny údaje, dokud nepocítí, že do myslí posluchačů pronikla ta idea, kterou do nich chtěl vtisknout.

F. Vidal