Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Ivan Netuka

Karel Löwner a Loewnerův elipsoid

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 38 (1993), No. 4, 212--218

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138770

[35] F. A. Valentine: *Convex Sets*. McGraw-Hill 1964.

[36] R. J. Walker: *Algebraic Curves*. Princeton Univ. Press 1950.

[37] T. Zamfirescu: *Nearly all convex bodies are smooth and strictly convex*. Monatshefte für Math. *103* (1987), 57–62.

[38] T. Zamfirescu: *Curvature properties of typical convex surfaces*. Pacific J. Math. *131* (1988), 191–207.

Karel Löwner a Loewnerův elipsoid

Ivan Netuka, Praha

Kalifornské místní noviny *Palo Alto Times* přinesly v úterý 9. ledna 1968 titulek oznamující smutnou zprávu: MATH EXPERT CHARLES LOEWNER OF STANFORD SUCCUMBS AT 74.

Ve dvou sloupcích je krátce připomenut životopis zesnulého, k tomu je připojeno několik poznámek o jeho odborné a učitelské činnosti, o jeho rodině, a jsou zde uvedeny i informace o jeho pohřbu.

Loewnerovi kolegové Menahem Schiffer, Robert Finn a Samuel Karlin z Department of Mathematics, Stanford University, napsali stručný nekrolog [21], z něhož uvádíme: *Loewner byl matematik světové pověsti, jehož výsledky se staly klasickou součástí matematické literatury. Povahově se vyznačoval osobní vřelostí a hlubokým lidským citem, které mu přinášely lásku a trvalou oddanost lidí z jeho okolí ... Ti, kteří byli s Loewnerem ve styku, se od něj učili rozumět vědě, získávat cit pro matematickou eleganci i smysl pro lidskost. Náš ústav, univerzita i světová matematická veřejnost jsou ztrátou velkého vědce, váženého kolegy a milovaného učitele velice postiženy.*

Prof. RNDr. Ivan Netuka, DrSc. (1944), pracuje v Matematickém ústavu MFF UK, Sokolovská 83, 186 00 Praha 8.

Úvodem je snad užitečné říci, že *Charles Loewner, Karel Löwner* a *Karl Löwner* jsou jména téhož člověka. První je ve skutečnosti americká forma jména; druhá souvisí se skutečností, že Löwnerovým mateřským jazykem byla čeština (údaj z [7]), a třetí s tím, že se Löwnerovi dostalo německého vzdělání, že psal své publikace v němčině a před svým nuceným odchodem do USA působil výhradně na německých univerzitách.

Po r. 1984 se s Löwnerovým jménem setkal určitě každý, kdo se zajímá o matematiku. Po 68 letech dokázal americký matematik Louis de Brange Bieberbachovu domněnku o prostých holomorfních funkcích. Žádný výklad o vývoji této problematiky se nemohl vyhnout Loewnerovu výsledku $|a_3| \leqq 3$ z r. 1923. Daleko významnější než tento výsledek je však metoda důkazu opírající se o tzv. Löwnerovu diferenciální rovnici — ta v de Brangesově přístupu sehrála podstatnou roli, viz např. [19] (překlad je otištěn v PMFA *31* (1986), 208–213); viz také [11].

S Löwnerovým jménem jsme se nedávno setkali při překládání článku [4] (viz PMFA *38* (1993), č. 3, s. 129–146), speciálně v části o Johnově-Loewnerově elipsoidu. Tento důležitý pojem jsme znali už dříve, ale nic jsme nevěděli o jeho původu. Ani naše znalosti o K. Löwnerovi (a jeho dlouholetém pobytu v Praze) nebyly příliš rozsáhlé. Koneckonců zájem podnítilo také blížící se sté výročí jeho narození.

Zdálo se, že získat životopisné údaje bude složitější než vypátrat Löwnerův zájem o elipsoid nejmenšího objemu. Všechno dopadlo docela jinak. Postupně se podařilo získat podklady [1], [7], [9], [10], [17], [18], [21] (z nichž tento článek čerpá), zato pátrání „Löwner o Loewnerově elipsoidu“ skončilo fiaskem. Zdá se, že Löwner o Loewnerově elipsoidu v životě nenapsal ani řádku. Ani korespondence s M. Schifferem [20] a F. Johnem [14] nevnesla do této záležitosti žádné světlo. A tak se ani nepodařilo potvrdit, že by pro Löwnera mohlo být motivací studium zobrazení pomocí komplexních funkcí, jak by se snad z formulace v [4] dalo usoudit.

Možná, že určité vysvětlení celé záležitosti je vlastně obsaženo v následujícím úryvku z [21]: *Existuje velká část Loewnerova díla, která se nenajde v seznamu jeho publikací. Jeho dveře byly otevřeny pro každého, kdo se chtěl bavit o matematice. Svůj čas ochotně rozdával při neformálních diskusích. Tak jeho znalosti a pochopení věci vstupovaly do vědeckých prací mnoha jeho studentů a kolegů, a tím pronikal jeho duch do života moderní matematiky.*

K Loewnerovu elipsoidu se na závěr přece jen ještě vrátíme, teď se však soustřeďme na Löwnerův běh života.

Karel Löwner se narodil 29. května 1893 v Lánech nedaleko od Prahy. Jeho rodiče, Sigmund a Jana Löwnerovi, měli celkem devět dětí, jedno z nich však záhy zemřelo. (Pouze dva členové z celé rodiny se nakonec po protižidovském běsnění dožili konce druhé světové války.) Löwnerův otec (1856–1906) byl v Lánech majitelem konzumu. Měl obdiv ke vzdělání a respekt k německé kultuře. Karel vystudoval německé gymnázium v Praze a v letech 1912–1917 pak filozofickou fakultu německé univerzity v Praze.

Pokud bychom se přiklonili k běžně užívanému německému výrazu „*Doktorvater*“ pro vedoucího disertační práce, pak by K. Weierstrass byl Löwnerův „*Doktorurgroßvater*“. K. Löwner promoval u G. Picka na základě práce *Untersuchungen über die Verzerrung bei konformen Abbildungen des Einheitskreises* $|z| < 1$, *die durch*

Funktionen mit nichtverschwindender Ableitung geliefert werden (posuzovateli byli G. Kowalewski a G. Pick). G. Pick psal disertaci u L. Königsbergera, a ten sepsal disertaci pod Weierstrassovým vedením. (G. Pick, který je především znám svými pracemi z teorie funkcí komplexní proměnné, byl ve svých osmdesáti letech deportován do terezínského ghetta, kde v r. 1942 zemřel.)

Do r. 1922 byl K. Löwner asistentem na pražské německé technice, od r. 1922 působil nejprve jako asistent, od r. 1923 pak jako *Privatdozent* na berlínské univerzitě. V letech 1928–1930 byl mimořádným profesorem v Kolíně nad Rýnem. V r. 1930 se jako mimořádný profesor vrátil na německou univerzitu do Prahy, kde působil (od r. 1934 jako řádný profesor) do r. 1939.

V r. 1934 se K. Löwner oženil s Elisabeth Alexander z Breslau (Wroclaw). Löwnerova paní vystudovala zpěv a K. Löwner se ve hře na piano natolik zdokonalil, že ji při zpěvu mohl doprovázet. V r. 1936 se Löwnerovým narodila dcera Marian (nyní Mrs. Tracy žijící v USA). Jejich synovec Paul Graf Loewner, kterého po válce po jeho návratu z koncentračního tábora adoptovali, žije také v USA.

V r. 1933 v Německu nastal prudký úpadek akademického života. Löwner se snažil židovským kolegům propuštěným z německých univerzit pomáhat. Po anšlusu Rakouska mu bylo jasné, že spojovat s Prahou další budoucnost není reálné. Zahájil přípravy na emigraci, věnoval se intenzívně angličtině. Správně vycítil, k čemu se schyluje. Svému doktorandu Lipmanu Bersovi (známý americký matematik lotyšského původu) doporučil urychleně dokončit a podat disertaci, „než bude příliš pozdě“. (Název disertace: *Über das harmonische Mass im Raume*; podle dostupných informací se žádný exemplář disertace v Praze nedochoval.)

Löwnerovi opouštěli Československo za dramatických okolností. K. Löwner byl po okupaci Československa gestapem týden vězněn. Enormní finanční oběť a energický postup paní Löwnerové nakonec vyústily ve zdařilý odjezd do USA.

V letech 1939–1944 K. Löwner, vlastně již Charles Loewner, působil (za nepříliš příznivých podmínek) na Louisville University (k místu mu tam dopomohl J. von Neumann). Pak krátce pracoval v „Advanced Research and Instruction in Mechanics Program“, státní instituci zřízené ve válečné době při Brown University.

Po skončení války přešel C. Loewner na Syracuse University, kde setrval do r.1951. Mezi jeho kolegy tehdy byli L. Bers, P. Erdös, P. R. Halmos, A. N. Milgram, G. D. Mostow, M. H. Protter, P. C. Rosenbloom, H. Samuelson, A. Selberg a další. Jak se uvádí v [7], „matematický ústav postrádal stabilitu (z důvodů, které zde není třeba líčit) a nikdo z těchto lidí v Syracusách nezůstal“.

C. Loewner získal profesuru na Stanford University, kde setrval do svého penzionování v r. 1963. Sešel se tam se svými přáteli a vrstevníky S. Bergmanem a G. Szegö. (Na počest sedmdesátých narozenin těchto tří matematiků vyšel XIV. svazek časopisu Journal d'Analyse (Jerusalem); viz [10].)

Odchod do penze neznamenal konec Loewnerovy aktivity. Dále učil, vedl řadu doktorandů a dělal kvalitní matematiku.

V Loewnerových sebraných spisech [7] je přetištěno celkem 33 prací, z nichž 7 spadá do „předamerického“ období. Nejsou zahrnuta dvoje skripta, ani kniha *Theory of* *continuous groups*. Stranou zůstaly i dvě kapitoly z učebnice, kterou napsali P. Frank a R. v. Mises z r. 1927. (Mimochodem, P. Frank se stal v r. 1912 nástupcem A. Einsteina na německé univerzitě v Praze.)

Jak je uvedeno v [7], Loewnerově povaze odpovídalo publikovat pomalu, jakoby respektoval Gaussovu zásadu *pauca sed matura* (málo, ale vyzrále).

Výše zmíněný výsledek $|a_3| \leqq 3$ je nejznámější z Löwnerových prací z teorie funkcí. Velkému ohlasu se těšily Löwnerovy práce o monotónních maticových funkcích. Na druhé straně se zdá, že mimo zájem matematiků dosud zůstal Löwnerův originální přístup k problému invariantní míry na Hilbertově prostoru. (Hodnoty takové míry nemohou ovšem být čísla, nýbrž prvky vhodného nearchimedovsky uspořádaného tělesa.)

Určitým společným jmenovatelem Loewnerových prací je pojem pologrupy zobrazení. Prostupuje práce z komplexní proměnné, z maticových funkcí i práce z geometrické problematiky.

Během války se Loewnerův zájem obrátil také k aplikované matematice (proudění tekutin, zákony zachování) a tím přirozeně i k parciálním diferenciálním rovnicím.

Seznam publikovaných prací C. Loewnera, jak už jsme uvedli, nedává plný obraz o jeho matematických zájmech. Výstižně to mj. ilustruje úryvek z [1], kde L. Bers vypráví o K. Löwnerovi v době, kdy si sám vybíral vedoucího disertace (byl to poslední Löwnerův pražský doktorand): *Nikdo mi neřekl, že* [Löwner] *je vynikající matematik a když vám to nikdo neřekne, tak to nevíte. Také jsem nevěděl, že se zajímá o dynamiku tekutin. Věděl jsem o jeho zájmu o geometrickou teorii funkcí. A když jsem ho šel požádat o téma disertace, výslovně jsem nechtěl ani geometrickou teorii funkcí ani maticové funkce, na nichž tenkrát pracoval. To ode mne bylo dosti neomalené, ale co se dá dělat. Řekl, ať tedy přijdu za týden, že si věc chce rozmyslet. Pak mi zadal téma, které se ukázalo pro mne příliš obtížné. Při práci na problému jsem ale dostal nápad a svou disertaci z teorie potenciálu jsem sepsal.*

Můžeme zde poznamenat, že K. Löwner o teorii potenciálu přednášel jako docent v Berlíně. (M. Pinl [17] vzpomíná na hezký výklad o Poincarého „méthode de balayage“.) Uveďme ještě, že jedna z výše zmíněných kapitol v knize autorů Franka a von Misese se jmenuje „*Die Potentialgleichung in der Ebene*“.

Nechme na závěr ještě jednou promluvit Loewnerova žáka a pozdějšího kolegu L. Berse [7]: *Loewner byl člověk, kterého měl každý rád; snad proto, že on sám byl v duševní rovnováze. Měl celoživotní vášnivý milostný poměr s matematikou, ale nikdy se nikam nehnal, nebyl žárlivý ani ješitný. Jeho laskavost a štědrost ke studentům i kolegům, pokud šlo o vědu, byla příslovečná. Patrně vůbec neznal, co je zášť, zlá vůle. Měl uhlazené způsoby, působil až ostýchavým dojmem, ale za tímto chováním se skrývala železná vůle. Nebyl nábožensky založený, ale silně vnímal svou židovskou totožnost. Mluvil čistou a dokonalou kafkovskou němčinou, aniž by však zapomínal na češtinu, svou mateřštinu. O Sovětském Rusku si nedělal iluze, avšak stál nalevo. Byl skvělý vypravěč historek, s humorem zároveň židovským i švejkovským. Ale v první řadě a především byl matematik.*

Loewnerův elipsoid

Množinu E nazveme *elipsoidem* v $\mathbb{R}^d$, jestliže existují kladná čísla $a_1, \ldots, a_d$ tak, že E je izometrickým obrazem množiny

$$\left\{ x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : \sum_{j=1}^{d} x_j^2 / a_j^2 \leqq 1 \right\}.$$

(Všimněme si, že na rozdíl od úmluvy z [4] nemusí zde elipsoid mít střed v počátku.)

Nejstarší zmínku o Loewnerově elipsoidu se nám podařilo najít v [5], s. 159, 160: *...Protože Minkowského geometrie má více invariantů než euklidovská geometrie, lze rozlišovat více speciálních elipsoidů než v euklidovském případě. Jeden z nich byl objeven Loewnerem a je pro další výklad obzvláště důležitý: Mezi všemi elipsoidy s daným středem, které obsahují* [danou množinu] *V existuje právě jediný, nazývaný Loewnerův elipsoid, který má nejmenší Minkowského (a tedy také euklidovský) objem ...Protože Loewner svůj výsledek nepublikoval, uvádíme pro pohodlí čtenáře důkaz ...*

Stejné tvrzení tentýž autor dokazuje v [6], s. 90, kde výsledek připisuje Loewnerovi a Behrendovi. Ve vysvětlivkách (s. 414) se uvádí (užíváme naše číslování): *Viz Behrend* [3]*; Loewner výsledek sdělil ústně.*

Zdůrazněme, že Behrendovy práce [2], [3] zahrnují pouze případ $d = 2$. Z [4] víme, že důkaz *existence* elipsoidu minimálního objemu (je jedno, zda s pevným či volným středem) se provede pomocí argumentu založeného na kompaktnosti. Důkaz *jednoznačnosti* je pro $d = 2$ obsažen v [3], pro prostory vyšší dimenze a pevný střed v [5], [6]. Pro případ volného středu byl podle [8] důkaz jednoznačnosti pro $\mathbb{R}^d$ prezentován K. Leichtweissem na matematickém semináři ve Freiburgu v r. 1954. Nezávisle je důkaz (poněkud rozdílně) publikován v [8] a [22]; srovnej též [16].

Na základě uvedených pramenů naznačíme důkaz jednoznačnosti, tedy důkaz tohoto tvrzení: *Nechť $M \subset \mathbb{R}^d$ je omezená množina s neprázdným vnitřkem a nechť E_1, E_2 jsou elipsoidy minimálního objemu obsahující M. Potom $E_1 = E_2$.*

Po afinní transformaci lze předpokládat, že existují kladná čísla $a_1, \ldots, a_d$ a bod $m = (m_1, \ldots, m_d) \in \mathbb{R}^d$ tak, že

$$E_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \sum_{j=1}^{d} x_j^2 \leqq 1 \right\},$$

$$E_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \sum_{j=1}^{d} (x_j - m_j)^2 / a_j^2 \leqq 1 \right\}.$$

Protože pro objemy platí $\operatorname{vol} E_2 = \operatorname{vol} E_1$, je $\prod_{j=1}^{d} a_j = 1$. Pro $x \in M$ ovšem platí $x \in E_1 \cap E_2$, tedy

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d} \left(x_j^2 + (x_j - m_j)^2 / a_j^2 \right) \leqq 1 .$$

Množina M je tedy obsažena v elipsoidu

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}(1 + 1/a_j^2)\left(x_j - m_j/(1 + a_j^2)\right)^2 \leqq \right.$$
$$\left. \leqq 1 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} m_j^2/(1 + a_j^2) \right\}.$$

Obě následující nerovnosti jsou zřejmé:

$$(*) \qquad \frac{1}{2}(1 + 1/a_j^2) \geqq 1/a_j\,,$$

$$(**) \qquad 1 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} m_j^2/(1 + a_j^2) \leqq 1\,.$$

Podle vzorce pro objem elipsoidu je

$$\operatorname{vol} E = \prod_{j=1}^{d}\left(\frac{1}{2}(1 + 1/a_j^2)\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} m_j^2/(1 + a_j^2)\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{vol} E_1$$
$$\leqq \left(\prod_{j=1}^{d} a_j\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{vol} E_1 = \operatorname{vol} E_1\,.$$

Protože $M \subset E$, je $\operatorname{vol} E \geqq \operatorname{vol} E_1$, takže v (*) a (**) platí rovnost. Odtud $a_j = 1$ a $m_j = 0$ pro všechna $j = 1, \ldots, d$, neboli $E_2 = E_1$.

(Další zajímavé informace o Loewnerově elipsoidu lze nalézt v [12], [15] a [13]; mj. je v těchto pramenech citace na Johnovu práci z r. 1948.)

Otázku, kdy K. Löwner věděl o existenci jediného elipsoidu minimálního objemu a čím byl jeho zájem o tento problém motivován, jsme nicméně nezodpověděli.

Že by přece jen klíč k záhadě byl v Praze? Kdoví. Každopádně pod názvy článků [2], [3] čteme: *Felix Behrend in Prag.*

Poznámky

(1) Z ***Nationale*** (K.k. deutsche Karl-Ferdinands-Universität in Prag) uložených v Archivu UK jednoznačně vyplývá, že rodištěm K. Löwnera jsou skutečně Lány u Prahy (a nikoli, jak se v některých podkladech uvádí, Lán u Jindřichova Hradce). V témže materiálu lze nalézt údaj: Muttersprache — deutsch.

V této souvislosti poznamenáváme, že při příležitosti Mezinárodní konference o teorii analytických funkcích (Jerevan, 1965) se s prof. Loewnerem osobně setkal dr. Jaroslav Fuka z MÚ ČSAV. Vzpomíná, jak byl nadšen Loewnerovou dokonalou češtinou.

Po dokončení článku zaslal Státní ústřední archiv v Praze vyžádaný výpis z Matriky narozených židovské náboženské obce v Novém Strašecí, 1872–1893, č. 160. Z výpisu se dovídáme: ***datum a místo narození*** 29. 5. 1893 Lány 6, ***jméno a příjmení dítěte*** Karel Löwner, ***původ*** manželský, ***otec*** Zikmund Löwner, obchodník v Lánech 6, ***matka*** Jenny, dcera Marka Krause z Lodenic.

(2) Pro zájemce je u autora k dispozici přehled výuky, kterou si K. Löwner v průběhu svého studia na německé univerzitě v Praze v letech 1912–1918 zapsal. Dále jsou k dispozici: soupis přednášek a seminářů, které v době svého pražského působení K. Löwner vypsal, seznam disertačních prací, které byly pod jeho vedením napsány a konečně údaje o jeho pražské přednáškové činnosti mimo rámec univerzity. Uvedené materiály umožňují získat alespoň částečně obrázek o matematice na německé univerzitě v Praze.

Poděkování. Za pomoc při práci s archivními materiály děkuji dr. M. Kunštátovi z Ústavu dějin Univerzity Karlovy. Řada kolegů pročetla rukopis článku a přispěla svými poznámkami k jeho zlepšení. Také jim za jejich zájem děkuji. Můj dík patří dále Department of Mathematics, Stanford University, za poskytnutí fotografie C. Loewnera a kopie nekrologu [21].

Literatura

[1] D. J. ALBERS, C. REID: *An interview with Lipman Bers.* The College Mathematics Journal *18* (1987), 266–290.

[2] F. BEHREND: *Über einige Affininvarianten konvexer Bereiche.* Math. Ann. *113* (1937), 713–747.

[3] F. BEHREND: *Über die kleinste umbeschriebene und die größte einbeschriebene Ellipse eines konvexen Bereichs.* Math. Ann. *115* (1938), 397–411.

[4] M. BERGER: *Convexity.* Amer. Math. Monthly *97* (1990), 650–678.

[5] H. BUSEMANN: *The foundations of Minkowskian geometry.* Comment. Math. Helvetici *24* (1950), 156–186.

[6] H. BUSEMANN: *The geometry of geodesics.* Academic Press INC., New York, 1955.

[7] CHARLES LOEWNER: *Collected Papers.* Ed. L. Bers, Birkhäuser, Boston, 1988.

[8] L. DANZER, D. LAUGWITZ, H. LENZ: *Über das Löwnersche Ellipsoid und sein Analogon unter den einem Eikörper einbeschriebenen Ellipsoiden.* Arch. Math. *8* (1957), 214–219.

[9] *Dictionary of Scientific Biography* (heslo: Loewner, Charles). Charles Scribner's Sons, New York, 1973.

[10] Editorial. J. d'Analyse (Jerusalem) *14* (1965), xvi–xvii.

[11] J. FUKA: *O Bieberbachově hypothese.* Informace MVS JČSMF č. *27* (1986), 8–20, č. *28* (1986), 5–14.

[12] P. M. GRUBER: *Minimal ellipsoids and their duals.* Rend. Circ. Mat. Palermo, Ser. II, *37* (1988), 35–64.

[13] E. HEIL, H. MARTINI: *Special convex bodies.* Preprint — Nr. 1395, Technische Hochschule Darmstadt, 1991.

[14] F. JOHN: Osobní korespondence.

[15] F. JUHNKE: *Loewner ellipsoids via semiinfinite optimization and (quasi-) convexity theory.* Preprint Math 4/90, Technische Universität, Magdeburg, 1990.

[16] K. LEICHTWEISS: *Konvexe Mengen.* Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[17] M. PINL: *Kollegen in einer dunklen Zeit.* Schluß, Jber. Deutsch. Math. Verein. *75* (1974), 166–208.

[18] J. POGGENDORFF: *Biographisch-Literarisches Handwörterbuch der exacten Naturwissenschaften*, VIIb, Teil 5 (heslo: Loewner, Charles). Akademie-Verlag, Berlin, 1976.

[19] C. POMMERENKE: *The Bieberbach conjecture.* The Mathematical Intelligencer *7* (1985), 23–25, 32.

[20] M. SCHIFFER: Osobní korespondence.

[21] M. SCHIFFER, R. FINN, S. KARLIN: *Charles Loewner* (nekrolog). Stanford University, 1968 (nepublikováno).

[22] V. L. ZAGUSKIN: *Ob opisannych i vpisannych ellipsoidach extremalnovo objema.* Uspehi Mat. Nauk *13* (1958), vyp. 6, 89–93.