

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jaroslav Nešetřil

O studentském semináři z teorie grafů na Matematicko-fyzikální fakultě KU

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 16 (1971), No. 2, 63--66

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/138663>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1971

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

že některé problémy (takové, jako je třeba Fermatův poslední problém) již nebudou odolávat našemu úsilí, ale budou spíše v určitém smyslu neřešitelné. Existence předpokladu nerozhodnutelnosti vytváří — jak se mi zdá — potenciální obtíže při řešení otázek úplnosti...

Zdá se mi nezbytné odložit sen devatenáctého století o úplném a příkladně dokonalém filosofickém systému pro náš Vesmír či třeba jen pro onu část našeho Universa, kterou nazýváme matematikou. Naproti tomu jsme nuceni žít v dobrodružnějším duchu, aniž bychom očekávali, že problematika základů naší disciplíny bude řešena s konečnou platností. Vskutku se mi zdá filosoficky opovážlivé představovat si, že bychom byli schopni demonstrovat dokonalost naší logiky a vedle toho se mi zdá absurdní připustit, že jakýkoliv logický systém, který máme formulovat, se určitě změní na neúplný. My matematikové musíme vždy jasně vidět veliký význam, který má pro nás logické studium základů našeho předmětu, a musíme vítat s porozuměním příspěvky, které snad budoucnost přinese v tuto obtížnou oblast zkoumání.

Pohlížíme-li dopředu, tak jak jsem se to pokusil učinit zde, myslím, že nejsilnější dojem, který získáme, je ohromující pocit úžasných možností matematiky. Zdá se mi, že stojíme na prahu matematických objevů, před nimiž naše nejpysnější historické vymoženosti zakrní.

Jaké by tyto objevy mohly být, či v jakém vztahu by mohly být k tomu, co nyní známe, je našim zrakům skryto. Můžeme jen doufat, že okolnosti umožní nám a těm, kteří přijdou po nás, využít nerušeně a z celého srdce stopy pokroku, které se před námi otvírají.

Přeložil a vybral Jaroslav Folta

O STUDENTSKÉM SEMINÁŘI Z TEORIE GRAFŮ NA MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTĚ KU

JAROSLAV NEŠETŘIL, Praha

Matematické semináře se u nás těší značné pozornosti, snad od časů Čechova brněnského semináře. Že tento seminář byl dodnes ojedinelou událostí, vzácnou souhrou osobností, doby a problémů, netřeba připomínat. Byl to však také seminář nového typu, převážně orientovaný na vlastní původní práci svých členů, na získávání nových poznatků.

Podobných seminářů dnes pracuje u nás mnoho, zvláště na postgraduální úrovni. Uvítali jsme příležitost, kterou nám redakce *Pokroků* nabídla, abychom seznámili matematickou veřejnost s prací jednoho z nich, který pracuje na MFF KU mezi studenty denního studia.

Přibližně před šesti lety zjistili ZDENĚK HEDRLÍN a ALEŠ PULTR, docenti MFF KU, při vyšetřování obecných otázek souvisejících s reprezentovatelností kategorií kategoriemi algeber, důležitost řešení úloh konečného kombinatorického charakteru, které lze zařadit do teorie grafů a příbuzných struktur. Formulace těchto úloh byla jednoduchá a srozumitelná i posluchačům prvního ročníku studia na MFF KU. Zdeněk Hedrlín uváděl a vysvětloval tyto úlohy při své přednášce v prvním ročníku a následujícího roku zahájil v druhém ročníku seminář z teorie grafů. Od té doby tento seminář na naší fakultě pracuje.

Na počátku každého roku se semináře zúčastňuje dosti studentů (10–20), z nichž přirozeným výběrem zůstává 3–5. Práce v semináři je náročná. Je nutno si uvědomit, že na seminářích se nereferují práce cizích autorů, ale téměř výhradně práce vlastní. Od studentů se tak vyžaduje, aby nejen sledovali a rozuměli práci svých spolužáků, ale hlavně aby samostatně pracovali a vymýšleli. Důraz je kladen na kolektivní práci a v dosavadních letech seminář jako celek vždy pracoval na nějakém širším problému.

Úloha vedoucího tohoto semináře není snadná. Zatímco na jedné straně malá matematická zkušenost a praxe studentů vyžaduje pevné vedení, pracovní povaha, neoficiální ráz seminářů a iniciativa studentů na druhé straně oslabují možnost detailní přípravy a vyžadují schopnost improvizace. Protože jde o originální výsledky ve směru v podstatě určeném vedoucími, je třeba jejich značné intuice. Volba hlavního zaměření je zde klíčovou otázkou.

V průběhu let seminář pracoval na různých úkolech. Jejich pozadí a hlavní motivace byla stejná a je dána studiem struktur na katedře základních matematických struktur na MFF KU. To znamená studium grafů a podobných objektů z kategoričského hlediska, z hlediska zobrazení mezi těmito objekty. Z tohoto konceptu zároveň vyplývá přirozená napojenost vyšetřování na jiná odvětví matematiky, především na algebru a topologii, což byly také výchozí motivace.

Pokusme se nastínit některé z problémů.

Grafem rozumíme dvojici (X, R) , kde X je množina a $R \subset X \times X$ je relace na ní. Nechť (X, R) , (Y, S) jsou grafy. Zobrazení $f: X \rightarrow Y$ je homomorfismem grafu (X, R) do grafu (Y, S) , jestliže $(f(x), f(y)) \in S$ pro každé $(x, y) \in R$.

Homomorfismy grafu (X, R) do sebe (endomorfismy) lze navzájem skládat a identické zobrazení je endomorfismus. Tvoří tedy množina všech endomorfismů grafu (X, R) (tuto množinu označujeme $C(X, R)$) tzv. *monoid* vzhledem k operaci skládání zobrazení. Základní otázkou bylo, zda pro libovolný monoid M (i nekonečný) existuje graf (X, R) tak, že $C(X, R)$ a M jsou izomorfní monoidy. A v případě, že je to možné, jak ovlivňuje volba monoidu M relaci R .

Při řešení této otázky základní úlohu sehrály „strnulé grafy“, grafy připouštějící pouze identický endomorfismus. Použitím „šípové konstrukce“, viz [2], [6], [9], [12], dostáváme zhruba toto myšlenkové schéma: Jestliže existuje strnulá relace s „lokální vlastností P “, pak pro každý monoid M existuje graf (X, R) tak, že $C(X, R)$ a M jsou izomorfní monoidy a (X, R) má vlastnost P .

Byly tedy studovány strnulé grafy se speciálními vlastnostmi, nejdetailněji pak symetrické grafy.

Pro strnulé symetrické grafy bylo třeba nejprve rozhodnout otázku existenční ([3], [4], [5]). Byla dokázána tato věta: *Nechť (X, R) je konečná symetrická strnulá relace. Pak platí nerovnost $2|X| + 4 \leq |R| \leq 2 \binom{|X|}{2} - 2|X| - 2$. Pro dostatečně velká $|X|$ ($|X| \geq 18$) jsou hořejší meze nejlepší možné; tj. existují strnulé grafy, pro které číslo $|R|$ skutečně nabývá mezních hodnot ([5]). Tím byl vyřešen i základní „extremální problém“. Pro malé hodnoty $|X|$ je situace komplikovanější ([3], [4], [5]).*

Byla konstruována strnulá symetrická relace obsahující daný konečný symetrický graf jako svůj úplný podgraf ([9]).

Zobecněním pojmu symetrická relace je *k-společnost* (někdy nazývaná *k-hypergraf*): to je množina X spolu s jistou soustavou podmnožin X , z nichž každá má mohutnost k . Analogické výsledky pro k -společnosti byly dokázány v [6], [12]. Také zde sehrála „šipová konstrukce“ klíčovou roli.

Byly zkoumány také endomorfismy turnajů. (Graf (X, R) nazveme turnajem, jestliže buď $(x, y) \in R$, nebo $(y, x) \in R$ pro každé $x, y \in X$.) Protože mezi endomorfismy každého turnaje patří všechna konstantní zobrazení (kdy obrazem je jediný bod), jsou analogií strnulých grafů tzv. *křehké turnaje* (turnaje, jejichž jedinými endomorfismy jsou konstantní zobrazení a identita). Byl nalezen křehký turnaj s minimálním počtem bodů a dokázána existence křehkého turnaje na každé větší množině ([7]). Poslední výsledek se dá aplikovat na teorii uzávěrových prostorů. Stejně jako křehké turnaje lze definovat křehké reflexivní relace (grafy). Byla nalezena minimální mohutnost křehké relace na množině s daným počtem bodů ([13]), což spolu s [7] dává řešení extrémálního problému pro křehké reflexivní relace.

Homomorfismy grafů byly a jsou zkoumány i z jiných hledisek. Každá relace indukuje přirozeným způsobem na množině svých endomorfismů jistou novou relaci. V [10] byly nalezeny podmínky, za kterých tyto dvě relace jsou izomorfní. V tomto směru se dále pracuje.

Dále byly řešeny úlohy z vnitřní teorie grafů a kombinatoriky, např. byly zkoumány věty Ramseyova typu a problém komutování zobrazení. Z publikovaných prací uvedme:

práci o charakterizaci stupňů (indexů) rovinných grafů ([8]), oceněnou cenou Holandské matematické společnosti;

konstrukci k -barevných grafů bez cyklů malých délek ([11]);

práci zabývající se platností Mengerovy věty, jestliže se omezíme na cesty omezených délek ([1]).

Tyto práce měly vesměs svůj původ v práci semináře, i když jejich dohotovení mnohdy tento rámec přesáhlo.

V tomto přehledu a v bibliografii jsou uvedeny práce, které vznikaly v semináři hlavně v letech do roku 1968. Práce z novějších ročníků semináře se dokončují. Týkají se zobecnění barevnosti grafů, orientací symetrických grafů a teorie turnajů.

Práce semináře tak plní dvojí úlohu. Poskytuje za prvé důležité příklady a konstrukce obecnějším partiím matematiky, které na druhé straně nacházejí oporu v detailním zvládnutí „jednoduché“ struktury; právě v tomto směru dosáhli členové KZMS MFF KU velmi dobrých výsledků. Za druhé se pak v rámci semináře rozvíjí vlastní teorie konečných struktur, především teorie grafů.

Za hlavní zisk je pak třeba pokládat výchovu studentů k vlastní původní práci. Poznávají zde její obtížnost a zažívají radost z nového výsledku. A mnozí z nich podlehnou kouzlu této práce natrvalo.

Literatura

- [1] J. ADÁMEK a V. KOUBEK: Remarks on flows in networks with short paths (přijato pro CMUC).
- [2] Z. HEDRLÍN and A. PULTR: Symmetric relation (undirected graphs) with given semigroup. *Monatsh. für Math.*, 69 (1965), 318—322.
- [3] Z. HEDRLÍN and A. PULTR: On rigid undirected graphs. *Canad. J. Math.*, 18 (1966), 1237 to 1242.
- [4] P. HELL: Rigid undirected graphs with given number of edges. *CMUC* 9, 1 (1968), 51—69.
- [5] P. HELL and J. NEŠETŘIL: Rigid and inverse rigid graphs. *Combinatorial structures and their applications*, Gordon Breach, New York (1970), 169—172.
- [6] P. HELL and J. NEŠETŘIL: Graphs and k -societies. *Canad. Math. Bull.* 13, 3 (1970), 375—381.
- [7] V. CHVÁTAL: On finite and countable rigid graphs and tournaments. *CMUC* 6 (1965), 429—438.
- [8] V. CHVÁTAL: Planarity of graphs with given degrees of vertices. *Nieuw archief voor Wiskunde* 17, 1 (1969), 47—60.
- [9] V. CHVÁTAL, P. HELL, L. KUČERA and J. NEŠETŘIL: Every graph is a subgraph of a rigid graph (postoupeno *J. Comb. Th.*).
- [10] P. KŘIVKA: Homomorphism perfect graphs (Postoupeno CMUC).
- [11] J. NEŠETŘIL: k -chromatičeskije grafy bez cyklov dliny ≤ 7 , *CMUC* 7, 3 (1966), 373—376.
- [12] J. NEŠETŘIL, P. HELL: k -societies with given semigroup. *Combinatorial structures and their applications*, Gordon Breach, New York (1970), 301—302.
- [13] T. WICHS: Smallest semirigid relations (připraveno pro CMUC).

MAX BORN (1957)

(Reflections of a European Man of Science)

Fyzika sama není jen činitelem materiálního pokroku, ale také elementem v duchovním vývoji člověka.

Právě tak jako Prometheus musel pykat za to, že bohům ukradl oheň a přinesl ho lidem, spočívá na současném člověku prokletí za rozžehnutí kosmického ohně na zemi. Atomový věk ve skutečnosti začal strašným ničením a masakry ve velkém, a nikdy nebude odehnán

stín, který samo jméno atomové bomby vrhá na štěstí a víru v život.

Vědci dospěli k poznání, že je věcí nás všech bez výjimky a nejen politiků, abychom se vyhnuli světové katastrofě. My fyzikové jsme povinni informovat a varovat státníky a dělat vše, co můžeme, abychom ovlivnili jejich rozhodnutí.