Oldřich Kowalski

O geometrii laplasiánu. II

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 26 (1981), No. 2, 69--81

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138649

Tím, že akustika pronikla do všech oblastí moderní vědy, je někdy těžké vydělit ji jako samostatné odvětví fyziky. Obvykle je definována tak, že se zabývá oblastí frekvencí od 10^{-4} Hz, což je začátek tzv. infrazvukové oblasti, do 10^{14} Hz, což jsou frekvence tepelných vibrací.

Ve fyzice kondenzovaných látek se fonony ukázaly být důležitými nosiči energie, dlouhé periody akustických vibrací byly detegovány na Slunci a šíření akustických vln v hlubokých vrstvách oceánu na vzdálenost přes tisíce mil umožňují komunikaci mezi ponorkami a snad i mezi delfíny a velrybami. Byla vyvinuta nová zařízení pro výrobu a detekci akustické energie v celém zmíněném rozsahu frakvencí. Existence těchto zařízení vedla k celé řadě rozmanitých aplikací.

Obr. 34 ukazuje jednu z novějších, ve které ultrazvuk (2.10^4 – 5.10^8 Hz) je použit ke zviditelnění vnitřních lidských orgánů. V tomto případě ultrazvuk nahrazuje rentgenové záření a nemá přitom žádné nežádoucí vedlejší účinky. Největším úspěchem bylo získání informací o nespojitostech akustické impedance v měkkých tkáních, např. při vyšetřování mozku, břicha nebo srdce, kde rentgenové záření nedává žádné nebo jen malé rozlišení. Využití akustické holografie v takovémto nedestruktivním zobrazování vnitřních částí lidského těla je zatím v počátcích svého vývoje, ale dává velké naděje. Obrátím se nyní k fyzice tekutin.

O geometrii laplasiánu II*)

Oldřich Kowalski, Praha

4. Spektrum Riemannovy variety

4.1. Všude v dalším budeme předpokládat, že (M, g) je souvislá a kompaktní Riemannova varieta. Laplasián na varietě (M, g) chápeme opět jako lineární diferenciální operátor $\Delta : \mathscr{F}(M) \to \mathscr{F}(M)$, kde $\mathscr{F}(M)$ je pre-Hilbertův prostor všech hladkých funkcí na M (viz odst. 2.6 předchozí části).

Spektrum Riemannovy variety (M, g) (označujeme: Spec (M, g)) je definováno jako množina všech *vlastních hodnot* operátoru Δ, tj. jako množina všech čísel $\lambda \in R$, k nimž existuje nenulová funkce $f \in \mathscr{F}(M)$ taková, že $\Delta f = \lambda f$. Každá funkce $f \in \mathscr{F}(M)$ taková, že $\Delta f = \lambda f$, $\lambda \in$ Spec (M, g), se nazývá *vlastní funkce odpovídající vlastní hodnotě* λ. Vektorový podprostor v $\mathscr{F}(M)$ tvořený všemi vlastními funkcemi odpovídajícími λ

*) Pokračování z čísla 1/1981

nazýváme *vlastním podprostorem odpovídajícím* λ a označujeme jej $\mathscr{P}_\lambda(M, g)$. Konečně podprostor

$$(4.1) \qquad \mathscr{P}(M, g) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Spec}(M,g)} \mathscr{P}_\lambda(M, g)$$

(tvořený všemi konečnými součty vlastních funkcí) nazveme *spektrálním prostorem variety* (M, g).

Vyjádření (4.1) je ortogonálním rozkladem podprostoru $\mathscr{P}(M, g) \subset \mathscr{F}(M)$ vzhledem ke struktuře pre-Hilbertova prostoru $\mathscr{F}(M)$: pokud $f \in \mathscr{P}_\lambda$, $h \in \mathscr{P}_\mu$ a $\lambda \neq \mu$, potom $\langle f, h \rangle = 0$. Poslední tvrzení si čtenář snadno odvodí z vlastnosti, že operátor Δ je samoadjungovaný.

Nyní platí tato základní věta o spektru a vlastních podprostorech:

Věta. *Nechť (M, g) je kompaktní Riemannova varieta. Potom*

A. $\operatorname{Spec}(M, g)$ *tvoří posloupnost tvaru* $\{0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots\}$, *která má limitu* $+\infty$.

B. *Pro každé* $\lambda \in \operatorname{Spec}(M, g)$ *má vlastní podprostor* $\mathscr{P}_\lambda(M, g)$ *konečnou dimenzi (nad tělesem reálných čísel).*

C. *Spektrální prostor* $\mathscr{P}(M, g)$ *je hustý v* $\mathscr{F}(M)$ *ve smyslu stejnoměrné konvergence a (tím spíše) ve smyslu normy pre-Hilbertova prostoru* $\mathscr{F}(M)$. (Viz např. [1].)

Z uvedené věty a ze známých vlastností separabilních Hilbertových prostorů pak dostáváme ihned:

Důsledek. *Prostor* $\mathscr{F}(M)$ *má ortonormální bázi složenou z vlastních funkcí spektra Riemannovy variety* (M, g).

Přesněji řečeno, bázi těchto vlastností má Hilbertův prostor $L_2(M, g)$ všech funkcí integrovatelných se čtvercem na (M, g) (podle příslušné objemové míry), který je zúplněním prostoru $\mathscr{F}(M)$. Odtud vyplývá, že každou funkci integrovatelnou se čtvercem na Riemannově varietě (M, g) lze rozvinout v abstraktní Fourierovu řadu podle vlastních funkcí příslušného spektra laplasiánu. Obyčejné Fourierovy řady dostaneme v případě, kdy naše Riemannova varieta (M, g) je jednotková kružnice S^1 v eukleidovské rovině.*)

Učiníme ještě několik konvencí: *násobností* vlastní hodnoty $\lambda \in \operatorname{Spec}(M, g)$ nazveme dimenzi vlastního podprostoru $\mathscr{P}_\lambda(M, g)$ (která je podle druhé části základní věty konečná). Vzhledem k první části věty můžeme všechny vlastní hodnoty očíslovat celými nezápornými čísly a používáme pak zkráceného označení:

$$\mathscr{P}_i(M, g) = \mathscr{P}_{\lambda_i}(M, g); \quad m_i = \dim \mathscr{P}_i(M, g).$$

Zde je ovšem m_i násobnost vlastní hodnoty λ_i.

Příklad. Z Hopfovy věty (odst. 2.5) vidíme, že $\mathscr{P}_0(M, g) = R$, a tedy $m_0 = 1$.

---

*) Funkce na S^1 jsou totiž ve vzájemně jednoznačné korespondenci s těmi funkcemi na reálné ose R, které jsou periodické s periodou 2π. Navíc je kružnice S^1 s reálnou osou R *lokálně izometrická* tedy obě variety mají „týž" laplasián, což je záporně vzatá druhá derivace podle délky oblouku,

4.2. Nechť λ_i, $i = 0,1,\ldots$, jsou vlastní hodnoty kompaktní Riemannovy variety (M, g) a m_i jejich příslušné násobnosti. Uvažujme nekonečnou funkční řadu

$$Z(M, g; t) = \sum_{i=0}^{\infty} m_i e^{-\lambda_i t}. \tag{4.2}$$

Platí tento základní výsledek:

Věta. *Funkční řada* (4.2) *konverguje v intervalu* $(0, +\infty)$ *a přitom stejnoměrně v každém intervalu tvaru* $\langle t_0, +\infty)$, $t_0 > 0$. *Součet* $Z(M, g; t)$ *této řady je klesající spojitá funkce taková, že* $\lim_{t \to +\infty} Z(M, g; t) = 1$, $\lim_{t \to +0} Z(M, g; t) = +\infty$.

Funkce $Z(M, g; t)$ se nazývá *rozdělovací funkce variety* (M, g). S využitím hořejších vlastností funkce $Z(M, g; t)$ lze zcela elementárně dokázat: *rozdělovací funkce jednoznačně určuje spektrum variety* (M, g) *včetně násobností všech vlastních hodnot.*

4.3. Nechť (M, g), (N, h) jsou dvě Riemannovy variety. Jejich *direktním součinem* nazveme Riemannovu varietu $(M \times N, g \times h)$ definovanou takto: Jestliže (M, g) je dána jako hladká podvarieta v R^{n+k} a (N, h) jako hladká podvarieta v $R^{n'+k'}$, potom kartézský součin $M \times N$ lze evidentním způsobem popsat jako podmnožinu v $R^{n+n'+k+k'}$. Tato podmnožina je opět hladkou podvarietou a jejím vložením do $R^{n+n'+k+k'}$ je určena příslušná Riemannova metrika $g \times h$.

Příklady: Obyčejná rotační válcová plocha v R^3 se dá jako Riemannova varieta považovat za direktní součin kružnice a reálné přímky. Naproti tomu obyčejný anuloid („povrch pneumatiky“) v R^3 je sice topologicky direktním součinem dvou kružnic, ale není to direktní součin ve smyslu Riemannovy geometrie. Pokud bychom sestrojili „riemannovský“ součin dvou kružnic podle našeho obecného předpisu, dostaneme topologicky opět anuloid, ale tentokrát vložený do čtyřrozměrného prostoru R^4 a lokálně izometrický s euklidovskou rovinou. Tato Riemannova varieta se nazývá (dvojrozměrný) *plochý torus.*

Pro direktní součin Riemannových variet se poměrně snadno určí příslušné spektrum a rozdělovací funkce, známe-li tyto údaje pro jednotlivé faktory:

A. $\mathrm{Spec}(M \times N, g \times h)$ *je množina všech čísel tvaru* $\lambda + \mu$, *kde* $\lambda \in \mathrm{Spec}(M, g)$, $\mu \in \mathrm{Spec}(N, h)$. *Přitom násobnosti všech čísel ze* $\mathrm{Spec}(M \times N, g \times h)$ *obdržíme tak, že všechna čísla* $\lambda \in \mathrm{Spec}(M, g)$, $\mu \in \mathrm{Spec}(N, h)$ *necháme probíhat s příslušnými násobnostmi.*

B. $Z(M \times N, g \times h; t) = Z(M, g; t) \,.\, Z(N, h; t)$.

Poznamenejme, že tvrzení B je okamžitým důsledkem tvrzení A. Velmi jednoduše se též dokáže, že direktní součin Riemannových variet má za své vlastní hodnoty všechna čísla uvedená v tvrzení A. Netriviální je však důkaz toho, že náš direktní součin *nemá žádné další* vlastní hodnoty — ten se opírá o Stoneovu-Weierstrassovu větu o algebrách funkcí.

4.4. Ukážeme nyní, jak vypadá spektrum některých jednoduchých Riemannových variet, zejména kompaktních symetrických prostorů hodnosti 1 (srv. odst. 3.2. z první části) a kompaktních Riemannových variet s nulovou křivostí.

A. Uvažujme *jednotkovou sféru* $S^n \subset R^{n+1}[x_1,\ldots,x_{n+1}]$ určenou rovnicí $(x_1)^2 + \ldots + (x_{n+1})^2 = 1$, a přirozenou Riemannovou metrikou g_0. Spec (S^n, g_0) je pak množina všech čísel tvaru $\lambda_k = k(n + k - 1)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Vlastní podprostor $\mathscr{P}_k(S^n, g_0)$ příslušný k λ_k je tvořen všemi funkcemi na S^n, které jsou restrikcemi homogenních harmonických polynomů stupně k definovaných v R^{n+1}. (Polynom f v R^{n+1} je ovšem harmonický, když $\sum_i \partial^2 f/(\partial x_i)^2 = 0$.) Konečně pro $k = 1, 2, \ldots$ platí

$$m_k = \frac{(n + k - 2)(n + k - 3)\ldots(n + 1)\, n}{k!}(n + 2k - 1).$$

Pěknou ilustraci těchto údajů dostaneme v nejjednodušším případě, kdy dimenze $n = 1$. Zde můžeme prostor $R^2[x_1, x_2]$ interpretovat jako komplexní rovinu $C[z]$, v níž je jednorozměrná sféra S^1 popsána rovnicí $z = e^{it}$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Prostor všech komplexních harmonických polynomů v $C[z]$ má bázi $\{1, z, \bar{z}, z^2, \bar{z}^2, \ldots\}$. Přechodem k reálným funkcím odtud snadno dostaneme všechna základní fakta o existenci periodických řešení klasické diferenciální rovnice $d^2u/dt^2 + \lambda u = 0$.

B. *Reálný projektivní prostor* $(P^n(R), \tilde{g}_0)$ je definován tak, že na sféře $S^n \subset R^{n+1}$ vezmeme všechny dvojice protilehlých bodů a ty budeme chápat jako prvky našeho nového prostoru. Snadno lze definovat jak příslušnou topologii prostoru $P^n(R)$, tak i jeho Riemannovu metriku $\tilde{g}_0$, která je *lokálně izometrická* s metrikou g_0 sféry S^n. Poznamenejme, že $(P^n(R), \tilde{g}_0)$ je neorientabilní*) varieta pro sudá n a že objem této variety je roven polovině objemu variety (S^n, g_0).

Jestliže na sféře S^n přiřadíme každému bodu bod k němu protilehlý, dostáváme jistou izometrii sféry, kterou nazveme *involuce*. Involuci zřejmě odpovídá identická transformace prostoru $P^n(R)$ na sebe. Každá vlastní funkce variety $(P^n(R), \tilde{g}_0)$ se nyní zřejmě dostane z takové vlastní funkce variety (S^n, g_0), která je invariantní vzhledem k involuci sféry. (Uvědomme si, že obě variety jsou lokálně izometrické a mají proto „týž" laplasián). Z předešlého příkladu pak vidíme, že každá vlastní funkce na $(P^n(R), \tilde{g}_0)$ se dostane restrikcí z některého homogenního harmonického polynomu v R^{n+1}, který je *invariantní vůči středové symetrii prostoru* R^{n+1} *podle počátku*. Tuto vlastnost ovšem mají právě ty homogenní polynomy, které jsou sudého stupně.

Můžeme tedy učinit závěr, že *vlastní hodnoty a jejich násobnosti pro varietu* $(P^n(R), \tilde{g}_0)$ *dostaneme z příslušných údajů pro varietu* (S^n, g_0) *uvedených v příkladě* A, *jestliže se omezíme na sudé indexy* $2k$, $k \geqq 0$.

---

*) Hladká varieta $M \subset R^{n+k}$ se nazývá *orientabilní* (neboli *schopná orientace*), jestliže v každém jejím bodě x lze zvolit některou orientaci tečného prostoru M_x (viz odst. 2.3) tak, aby výsledné „pole orientací" bylo na M spojité. Poslední vlastnost lze přesně vyjádřit například takto: Pro každou lokální souřadnicovou soustavu $(t_1, \ldots, t_n)$ definovanou na *souvislé* podmnožině $U \subset M$ jsou souřadnicové vektorové báze $\{\partial\varphi/\partial t_1, \ldots, \partial\varphi/\partial t_n\}$ v příslušných tečných prostorech buď všechny kladné, nebo všechny záporné vzhledem ke zvoleným orientacím. (K definici souřadnicových bází viz odst. 1.3.)

Ve speciálním případě, kdy je dána n-rozměrná hladká varieta M v prostoru R^{n+1}, je orientabilita ekvivalentní s existencí spojitého (nebo hladkého) pole jednotkových normálových vektorů podél M v R^{n+1}.

C. *Komplexní projektivní prostor* $(P^n(C), \hat{g}_0)$ se definuje takto: uvažujme komplexní kartézský prostor C^{n+1}, který ztotožníme s reálným kartézským prostorem R^{2n+2} prostřednictvím zobrazení

$$(x_1 + iy_1, \dots, x_{n+1} + iy_{n+1}) \mapsto (x_1, y_1, \dots, x_{n+1}, y_{n+1}) .$$

Na C^{n+1} je definována operace násobení komplexním číslem (po složkách), speciálně pak operace násobení komplexní jednotkou. Všechny komplexní jednotky se ovšem zobrazují na jednotkové kružnici S^1 v komplexní rovině C. Můžeme tedy říci, že každému bodu $x \in S^1$ přísluší některá transformace komplexního prostoru C^{n+1} a tím i transformace reálného euklidovského prostoru R^{2n+2}, která je ovšem izometrií. Při těchto izometriích se zachovává sféra S^{2n+1} o rovnici

$$\sum_{i=1}^{n+1} (x_i)^2 + (y_i)^2 = 1 .$$

Tedy kružnice S^1 reprezentuje jistou grupu izometrií sféry S^{2n+1}. Nyní prostor $P^n(C)$ budeme definovat jako faktorový prostor S^{2n+1}/S^1, tj. prostor orbitů zmíněné grupy izometrií. Každému bodu prostoru $P^n(C)$ takto odpovídá jistá hlavní kružnice sféry S^{2n+1} (jde o tzv. *Hopfovu fibraci*). Metrika $\hat{g}_0$ prostoru $P^n(C)$ je odvozena z metriky g_0 sféry S^{2n+1} takto: Jestliže $p \in P^n(C)$ je pevný bod, kterému v S^{2n+1} odpovídá kružnice k, potom za *tečný vektor* v $p \in P^n(C)$ prohlásíme soustavu tečných vektorů sféry S^{2n+1} v bodech kružnice k, které jsou kolmé na tuto kružnici a přecházejí jeden v druhý při transformacích grupy S^1. *Skalární součin* dvou tečných vektorů v bodě $p \in P^n(C)$ pak definujeme jako skalární součin libovolných jejich reprezentantů sestrojených v témže bodě kružnice k.*)

Poznamenejme, že metrika $\hat{g}_0$ má *nekonstantní* (kladnou) sekcionální křivost – souvislost této metriky s přirozenou metrikou g_0 sféry S^{2n+1} není tak jednoduchá, jako byla v případě reálného projektivního prostoru $P^n(R)$. Pokud však jde o objem, platí intuitivně zřejmá formule:

$$\mathrm{Vol}\,(P^n(C)) = \mathrm{Vol}\,(S^{2n+1}, g_0)/\mathrm{Vol}\,(S^1, g_0) .$$

O vlastnostech spektra nyní platí:

Spec $(P^n(C), g_0)$ *je množina všech čísel* $\lambda_k = 4k(n + k)$, $k \geqq 0$; *násobnosti jsou dány vzorcem*

$$m_k = n(n + 2k) \left[\frac{n(n + 1) \dots (n + k - 1)}{k!} \right]^2 , \quad k \geqq 1 .$$

Způsob odvození je podobný jako v předchozím příkladě: Je třeba určit ty homogenní

*) Vynecháváme ovšem řadu důležitých detailů, jako například důkaz toho, že $P^n(C)$ má strukturu hladké variety. K tomuto důkazu je nutno použít abstraktní definice hladké variety a přímé modelování pomocí podvariet euklidovských prostorů je nám zde málo platné. Tento příklad je dobrým argumentem do metodické diskuse o tom, zdali se celá teorie diferencovatelných variet dá nebo nedá vykládat jako teorie jistých podmnožin euklidovských prostorů.

harmonické polynomy v R^{2n+2}, které jsou invariantní vzhledem k operaci grupy izometrií S^1; vlastní funkce na $(P^n(C), \hat{g}_0)$ se pak určí jako restrikce takových polynomů na sféru S^{2n+1}.

Poznámka. Přesně obdobně, jako jsme definovali komplexní projektivní prostor, se definuje *kvaternionový projektivní prostor*. Zde se však vyjde od kvaternionového kartézského prostoru Q^{n+1}, který ztotožňujeme s reálným kartézským prostorem R^{4n+4} a na kterém operuje grupa S^3 jednotkových kvaternionů. Výsledný model je „Hopfova fibrace jednotkové sféry S^{4n+3} na 3-rozměrné jednotkové podsféry."

D. Budeme nyní obecně definovat důležité Riemannovy variety, kterým říkáme *ploché torusy* (srv. též odst. 4.3). Jsou to orientabilní kompaktní Riemannovy variety s nulovou sekcionální křivostí. (Jim odpovídající neorientabilní kompaktní Riemannovy variety se nazývají *ploché Kleinovy láhve.*)

V n-rozměrném euklidovském prostoru R^n vezmeme libovolnou vektorovou bázi $\{f_1, \ldots, f_n\}$. Nechť Γ je (diskrétní) podgrupa v R^n generovaná vektory $f_1, \ldots, f_n$ a uvažujme faktorový prostor R^n/Γ. Tento prostor lze popsat jako Riemannovu varietu *lokálně* izometrickou s euklidovským prostorem R^n a homeomorfní s kartézským součinem $S^1 \times \ldots \times S^1$ n kružnic. Avšak pro dvě různé báze $\{f_1, \ldots, f_n\}$, $\{f'_1, \ldots, f'_n\}$ nejsou obecně dvě takové variety spolu izometrické.

Nechť dále $\{\xi^1, \ldots, \xi^n\}$ je báze lineárních forem v R^n, která je duální k vektorové bázi $\{f_1, \ldots, f_n\}$. Označme Γ^* aditivní grupu všech lineárních forem tvaru $\sum_i c_i \xi^i$, kde $c_1, \ldots, c_n$ probíhají všechny celočíselné hodnoty. Dále definujme *normu* $|\xi|$ libovolné lineární formy ξ takto:

$$|\xi|^2 = \sum_i (\xi(e_i))^2 ,$$

kde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ je libovolná *ortonormální* vektorová báze v R^n.
Nyní platí:

Věta. *Nezáporné číslo λ patří do spektra* $\mathrm{Spec}(R^n/\Gamma, g_0)$, *právě když existuje lineární forma $\xi \in \Gamma^*$ taková, že $\lambda = 4\pi|\xi|^2$. Násobnost každé vlastní hodnoty λ je rovna počtu všech takových lineárních forem.*

Poznamenejme, že vlastním funkcím na n-rozměrném plochém torusu odpovídají v klasické teorii n-násobně periodické vlastní funkce laplasiánu v euklidovském prostoru R^n.

4.5. Jednou ze základních otázek teorie spektra laplasiánu je: *do jaké míry určuje spektrum Riemannovy variety spolu s příslušnými násobnostmi geometrii této variety. Bude například každá Riemannova varieta jednoznačně určena svými spektrálními vlastnostmi až na izometrii?*

Uvedeme pro ilustraci několik speciálních výsledků:

(i) Riemannovy variety (S^2, g_0), $(P^2(R), \tilde{g}_0)$, a libovolný dvojrozměrný plochý torus $(R^2/\Gamma, g_0)$ jsou jednoznačně určeny (až na izometrii) svými spektry a jejich násobnostmi.

(ii) Riemannovy variety (S^3, g_0) a $(P^3(R), \tilde{g}_0)$ jsou jednoznačně určeny (až na izometrii) svými spektry a jejich násobnostmi.

Na otázku o jednoznačném určení Riemannovy variety z jejích spektrálních vlastností je však *obecně* třeba odpovědět záporně. První protipříklad nalezl v šedesátých letech John Milnor. Našel dva ploché torusy dimenze 16, které mají stejná spektra včetně všech příslušných násobností, ale nejsou spolu izometrické (jsou ovšem stále ještě lokálně izometrické). K důkazu byly použity hluboké klasické výsledky teorie modulárních forem.

Poznamenejme, že problém úplné charakterizace pomocí spektrálních vlastností zůstává otevřený i pro tak speciální podtřídu, jako jsou ploché torusy dimenze 3.

5. Geometrické věty o první nenulové vlastní hodnotě

Uvedeme zde bez důkazu několik vět dávajících hluboké souvislosti mezi vlastní hodnotou λ_1 a lokálními, resp. globálními geometrickými vlastnostmi kompaktní Riemannovy variety.*)

Věta A. Lichnerowicze. *Nechť (M, g) je kompaktní Riemannova varieta dimenze n s kladnou Ricciovou křivostí, tj. nechť číslo $\varrho_{\min}$ definované vzorcem $\varrho_{\min} = \min\{\varrho_x(u, u) | x \in M, u \in M_x, |u| = 1\}$ je kladné. Potom pro první nenulovou vlastní hodnotu variety (M, g) platí*

$$\lambda_1 \geqq \frac{n}{n-1} \cdot \varrho_{\min} . \tag{5.1.}$$

Věta M. Obaty. *Nechť pro varietu (M, g) platí $\varrho_{\min} > 0$, přičemž nerovnost (5.1) přejde v rovnost. Potom je varieta (M, g) izometrická jednotkové sféře v eukleidovském prostoru R^{n+1}.*

První věta J. Cheegera. *Nechť (M, g) je kompaktní Riemannova varieta s nezápornou sekcionální křivostí a nechť* diam (M, g) *označuje průměr variety (M, g), tj. supremum vzdáleností všech dvojic bodů na M. Platí nerovnost*

$$\lambda_1 \leqq \frac{1}{4(n+2)^3} \left[1 - \frac{3}{n+2}\right]^{n-1} \frac{1}{[\operatorname{diam}(M, g)]^2} .$$

Druhá věta J. Cheegera. *Nechť (M, g) je kompaktní Riemannova varieta. Nechť $\mathfrak{S}$ označuje množinu všech podvariet $S \subset M$ o jedničku nižší dimenze, které rozdělují (M, g) na dvě otevřené podvariety M_1, M_2 se společnou hranicí S. Položme*

$$h = \inf_{S \in \sigma} \frac{\operatorname{Vol}(S)}{\min[\operatorname{Vol}(M_1), \operatorname{Vol}(M_2)]} .$$

Potom $\lambda_1 \geqq h^2/4$.

---

*) Původní znění uvedené v [2] bylo autorem po formální stránce přepracováno.

6. Rovnice vedení tepla na varietě a spektrální geometrické invarianty

6.1. Nechť je opět (M, g) kompaktní Riemannova varieta a Δ příslušný Laplaceův operátor. *Tepelným operátorem na* (M, g) nazveme diferenciální operátor $L = \Delta + \partial/\partial t$ definovaný na Riemannově varietě $(M, g) \times (0, +\infty)$ (tj. na prostoru $\mathscr{F}(M \times (0, +\infty))$ všech hladkých funkcí $u(x, t)$, $x \in M$, $t \in (0, +\infty)$). Diferenciální rovnici $Lu = 0$ nazveme stručně *tepelnou rovnicí na* (M, g). Přesněji řečeno, jde o rovnici vedení tepla na varietě (M, g) uvažované jako homogenní těleso nemající vnitřních zdrojů tepla a izolované od prostředí.*) Budeme se pak zajímat pouze o hladká řešení této rovnice. Povšimněme si ovšem, že náš pojem řešení v sobě explicitně nezahrnuje „počáteční stav“ $t = 0$, o jehož charakteru není a priori nic řečeno. V dalším se budeme zajímat jen o řešení, která jsou určena některým počátečním stavem.

Předpokládejme nejprve, že počáteční rozložení tepla na varietě (M, g) v časovém okamžiku $t = 0$ je popsáno hladkou funkcí f. Počátečnímu stavu f pak odpovídá jediné hladké řešení $\tilde{f}(x, t)$ tepelné rovnice, které formálně zapisujeme ve tvaru $\tilde{f}(x, t) = \exp(-t\Delta)(f)$. Symbol $\exp(-t\Delta)$ se přitom nazývá *evoluční operátor*. Smysl tohoto zápisu je v tom, že pokud na (M, g) konverguje *formální* mocninná řada

$$\exp(-t\Delta)(f) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\Delta^n f)}{n!} t^n \tag{6.1}$$

(kde Δ^n ovšem označuje n-tou iteraci laplasiánu Δ), pak její součet je požadovaným hladkým řešením tepelné rovnice s počátečním stavem f. (Čtenář si poslední tvrzení snadno ověří.)

Poznamenejme, že evoluční operátor $\exp(-t\Delta)$ může být spojitě prodloužen z prostoru $\mathscr{F}(M)$ všech hladkých funkcí na prostor všech distribucí na varietě (M, g). Důležité přitom je, že i k takovému počátečnímu stavu, který není funkcí, ale pouze distribucí, dostaneme takto hladké řešení tepelné rovnice pro $t > 0$.

Dokážeme si nyní tento jednoduchý vzorec svazující rozdělovací funkci variety (M, g) s jejím evolučním operátorem:

$$Z(M, g; t) = \operatorname{tr}(\exp(-t\Delta)), \quad t \in (0, +\infty), \tag{6.2}$$

kde pro každé $t > 0$ chápeme evoluční operátor jako lineární endomorfismus prostoru $\mathscr{F}(M)$ a „tr“ označuje *stopu* příslušného endomorfismu.

Nechť $\{\varphi_j\}$ je ortonormální báze prostoru $\mathscr{F}(M)$ složená z vlastních funkcí laplasiánu Δ. Potom pro každé j máme rovnost tvaru $\Delta\varphi_j = \mu_j\varphi_j$, kde μ_j postupně proběhne všechny vlastní hodnoty $\lambda_i \in \operatorname{Spec}(M, g)$ s příslušnými násobnostmi m_i. Dále podle (6.1)

$$\exp(-t\Delta)(\varphi_j) = e^{-\mu_j t} \,.\, \varphi_j$$

a odtud

$$\operatorname{tr}(\exp(-t\Delta)) = \sum_j e^{-\mu_j t} = Z(M, g; t), \tag{6.3}$$

což bylo třeba dokázat.

---

*) Je třeba připomenout naši konvenci o znaménku laplasiánu Δ.

6.2. *Fundamentálním řešením* tepelné rovnice na (M, g) nazveme funkci $E(x, y, t) \in \in \mathscr{F}(M \times M \times (0, +\infty))$, která splňuje tyto podmínky:

(i) Pro každé $x \in M$ je $LE(x, \cdot, \cdot) = 0$, tj. $E(x, y, t)$ je řešením tepelné rovnice vzhledem k proměnným $y \in M$, $t \in (0, +\infty)$.

(ii) $\lim_{t \to +0} E(x, \cdot, t) = \delta_x$ ($=$ *Diracova míra v bodě* x) pro každé $x \in M$. Druhá vlastnost znamená, že pro každé pevné $x \in M$ a každou spojitou funkci $\varphi(y)$ na M platí

$$\lim_{t \to +0} \int_M E(x, y, t)\, \varphi(y)\, \mathrm{d}v_y = \varphi(x)\,.$$

Poznamenejme, že fundamentální řešení je vlastně jistá soustava řešení tepelné rovnice parametrizovaná pomocí bodů variety M. Pro každý bod $x \in M$ vychází příslušné řešení $E(x. \cdot, \cdot)$ tepelné rovnice ze singulárního stavu, kdy je v okamžiku $t = 0$ veškeré teplo soustředěno v bodě x.

6.3. Z klasické teorie je dobře známo, že pro euklidovský prostor R^n (tentokrát jde o nekompaktní Riemannovu varietu!) existuje jediné fundamentální řešení tepelné rovnice, a to

$$E(x, y, t) = (4\pi t)^{-n/2}\, \mathrm{e}^{-d^2(x,y)/4t}, \quad x, y \in R^n,\ t \in (0, +\infty)\,, \tag{6.4}$$

kde $d(x, y)$ označuje vzdálenost bodů x, y. Poznamenejme, že číselný koeficient vychází z podmínky (ii) pro fundamentální řešení.

Ptáme se nyní, zdali existuje fundamentální řešení tepelné rovnice pro každou kompaktní Riemannovu varietu (M, g) a zdali je lze vyjádřit formulí, která by vhodným způsobem zobecňovala vztah (6.4). Uspokojivou odpověď dává tato věta:

Věta. (Minakshisundaran-Pleijel). *Pro každou kompaktní Riemannovu varietu (M, g) (dimenze n) existuje jediné fundamentální řešení tepelné rovnice a pro toto řešení platí asymptotická formule*

$$E(x, y, t) \underset{t \to +0}{\sim} (4\pi t)^{-n/2}\, \mathrm{e}^{-d^2(x,y)/4t} \left(u_0(x, y) + u_1(x, y)\, t + \ldots + u_k(x, y)\, t^k + \ldots\right), \tag{6.5}$$

kde $u_i(x, y) \in \mathscr{F}(M \times M)$ pro $i = 0,1,\ldots$ a $d(x, y)$ označuje riemannovskou vzdálenost dvou bodů na (M, g).

Pro výpočet příslušných funkcí $u_i(x, y)$ existují poměrně jednoduché rekurentní formule. Ale počínaje již funkcí $u_2(x, y)$ se výpočty stávají značně komplikovanými z čistě technické stránky.

6.4. Uvedeme ještě vzorec, který svazuje rozdělovací funkci variety (M, g) s fundamentálním řešením příslušné tepelné rovnice:

$$Z(M, g; t) = \int_M E(x, x, t)\, \mathrm{d}v\,. \tag{6.6}$$

Nástin důkazu: Nechť $\{\varphi_j\}$ je opět ortonormální báze prostoru $\mathscr{F}(M)$ složená z vlastních funkcí variety (M, g). Položme

$$(6.7) \qquad \mathscr{E}(x, y, t) = \sum_j e^{-\mu_j t} \varphi_j(x) \varphi_j(y),$$

kde každé μ_j je vlastní hodnota příslušná k vlastní funkci φ_j a každá vlastní hodnota $\lambda_i \in \operatorname{Spec}(M, g)$ je takto probíhána s násobností m_i. *Formálně* je velmi snadné ukázat, že funkce $\mathscr{E}(x, y, t)$ je fundamentálním řešením tepelné rovnice — to předkládáme čtenáři jako cvičení. (Obtížné je pouze dokázat korektnost všech potřebných operací, mj. konvergenci řady (6.7).) Podle výše uvedené základní věty musí platit $\mathscr{E}(x, y, t) = E(x, y, t)$ a s využitím (6.7), (6.3) dostáváme

$$\int_M E(x, x, t)\, dv = \sum_j e^{-\mu_j t} \int_M \varphi_j^2(x)\, dv = \sum_j e^{-\mu_j t} \|\varphi_j\|^2 = \sum_j e^{-\mu_j t} = Z(M, g; t),$$

což bylo třeba dokázat.

Dosaďme nyní do asymptotické formule (6.5) rovnost $x = y$. Využijeme-li identity $d(x, x) = 0$, dostáváme

$$E(x, x, t) \underset{t \to +0}{\sim} (4\pi t)^{-n/2} (u_0(x, x) + u_1(x, x)\, t + \ldots)$$

a po integraci obou stran dává vzorec (6.6)

$$(6.8) \qquad Z(M, g; t) = \sum_j e^{-\mu_j t} \underset{t \to +0}{\sim} (4\pi t)^{-n/2} (a_0 + a_1 t + \ldots + a_k t^k + \ldots),$$

kde

$$(6.9) \qquad a_k = \int_M u_k(x, x)\, dv \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Ze vztahu (6.8) vidíme, že koeficienty $a_0, a_1, \ldots$ jsou *spektrální invarianty*, tj. závisí pouze na spektrálních vlastnostech kompaktní Riemannovy variety. Na druhé straně McKean a Singer [6] ukázali, že funkce $u_k(x, x)$ jsou polynomiální funkce složek tenzoru křivosti R a jejich postupných kovariantních derivací. (Tohoto poznatku lze využít i při praktickém počítání.) Lze tedy intuitivně očekávat, že invarianty $a_0, a_1, \ldots$ by mohly mít rozumný geometrický smysl. Tím jsme se dostali k vyvrcholení celé naší předchozí teorie.

Poznámka. Přechodem k asymptotickému rozvoji ve vzorci (6.8) se ztrácí určitá faktická informace o spektru příslušné variety. Například se snadno dokáže, že pro každý plochý torus je asymptotický rozvoj triviální, tj. platí $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = \ldots = 0$ a a_0 je rovno objemu rovnoběžnostěnu sestrojeného na vektorové bázi $\{f_1, \ldots, f_n\}$ (viz odst. 4.4, část D). Tedy asymptotický rozvoj téměř nerozlišuje ploché torusy, zatímco spektra těchto torusů mohou být přitom velmi různorodá. Ztráta informace je však celkově vynahrazena „geometrickým utříděním“ zbývající informace, jak uvidíme v dalším odstavci.

6.5. Ukážeme nyní některé geometrické aplikace vzorce (6.8) a význam nejjednodušších spektrálních invariantů.

Věta A. *Jestliže dvě kompaktní Riemannovy variety mají totéž spektrum (včetně příslušných násobností), potom mají tutéž dimenzi.*

Důkaz. Číslo $\dim M/2$ udává řád, se kterým funkce $Z(M, g; t)$ roste polynomiálně k $+\infty$ když $t \to +0$.

Věta B. *Platí formule* $a_0 = \mathrm{Vol}(M, g)$. *Jestliže dvě kompaktní Riemannovy variety mají stejná spektra, potom mají v důsledku toho týž objem.*

Věta C. *Platí formule*

$$a_1 = \tfrac{1}{6} \int_M \tau(x)\, dv\,,$$

kde $\tau(x)$ *označuje skalární křivost variety* (M, g) *v bodě* x.

Tato věta má velmi zajímavou aplikaci v případě dvojrozměrných Riemannových variet. Jedna ze základních vět teorie diferencovatelných variet říká, že hladká varieta připouští hladkou triangulaci. V případě dvojrozměrné hladké variety je taková triangulace pokrytím variety křivočarými trojúhelníky (homeomorfními s obyčejnými rovinnými trojúhelníky), z nichž každé dva buď mají prázdný průnik, nebo mají právě jednu společnou stranu nebo právě jeden společný vrchol. Nyní lze ukázat, že výraz

$$\chi(M) = V - H + S\,,$$

kde V označuje počet vrcholů, H počet hran a S počet stěn triangulace, je týž pro jakoukoliv triangulaci téže *kompaktní orientabilní dvojrozměrné variety* M. Výraz $\chi(M)$ je dokonce stejný pro dvě navzájem homeomorfní variety a nazývá se *Eulerova charakteristika* variety M. (V algebraické topologii se ovšem Eulerova charakteristika studuje v podstatně obecnější situaci.) Je známo, že například Eulerova charakteristika dvojrozměrné sféry je rovna dvěma, zatímco dvojrozměrný torus má Eulerovu charakteristiku rovnou nule. Nyní klasická *Gaussova-Bonnetova věta* říká, že *pro každou kompaktní orientabilní dvojrozměrnou Riemannovu varietu* (M, g) *platí*

$$\chi(M) = \frac{1}{2\pi} \int_M K(x)\, dv\,,$$

kde $K(x)$ *je Gaussova křivost* (viz odst. 1.5 z první části). Dále máme (viz konec odst. 1.6) $\tau(x) = 2K(x)$. Odtud a z věty C konečně dostáváme:

Důsledek. *Pro každou kompaktní orientabilní dvojrozměrnou Riemannovu varietu* M *platí* $a_1 = (2\pi/3)\chi(M)$. *Jestliže dvě takové variety mají stejná spektra, potom mají i tutéž Eulerovu charakteristiku.*

Vzorec pro další koeficient a_2 uvádíme bez komentáře:

Věta D. *Platí formule*

$$a_2 = \frac{1}{360} \int_M (2|R|^2 - 2|\varrho|^2 + 5\tau^2)\, dv\,,$$

kde $|R|$, $|\varrho|$ *označují velikost tenzoru křivosti a Ricciova tenzoru, tj.*

$$|R|^2(x) = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} g_x(R(e_i, e_j)\, e_k, e_l)^2\,, \; |\varrho|^2(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \varrho_x(e_i, e_j)^2$$

pro libovolnou ortonormální bázi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *v uvažovaném bodě* $x \in M$, a τ *označuje skalární křivost.*

Konečně koeficient a_3 určil poprvé T. Sakai [8]. Ukázal, že příslušná funkce $u_3(x, x)$ je lineární kombinací (s racionálními koeficienty) 17 dosti komplikovaných geometrických invariantů, které se nazývají *riemannovské invarianty řádu 6*. Zde veškeré snahy o explicitní výpočet dalších koeficientů (rozumí se v plné obecnosti) skončily a pozornost se obrátila k užitečnějším a perspektivnějším otázkám.

Vypočtené invarianty a_0, a_1 a a_2 spolu s dalšími geometrickými poznatky stačí v každém případě k tomu, abychom například dokázali, že Riemannovy variety (S^2, g_0), (S^3, g_0), $(P^2(R), g_0)$ a $(P^3(R), g_0)$ jsou jednoznačně určeny (až na izometrii) svými spektry.

6.6. Existuje zajímavá analogie mezi fundamentálním řešením tepelné rovnice a vzorci pro objem geodetické sféry, resp. geodetické koule na analytické Riemannově varietě. A. Gray a L. Vanhecke [5] ukázali, že pro objem geodetické sféry $S^{n-1}(x; r)$ analytické Riemannovy variety platí tento rozvoj v mocninnou řadu podle příslušného poloměru $r > 0$:

$$\mathrm{Vol}\,(S^{n-1}\,(x; r)) = \omega r^{n-1}(1 + b_1(x)\, r^2 + b_2(x)\, r^4 + \ldots)\,.$$

Zde ω označuje objem $(n-1)$-rozměrné jednotkové euklidovské sféry. Je zajímavé, že např. koeficienty $b_1(x)$, $b_2(x)$ a $b_3(x)$, určené Grayem a Vanheckem, mají úplně analogickou stavbu jako příslušné funkce $u_1(x, x)$, $u_2(x, x)$ a $u_3(x, x)$ asymptotického rozvoje funkce $E(x, x, t)$. Jsou to lineární kombinace naprosto stejných geometrických invariantů a liší se navzájem jen numerickými koeficienty. Navíc při výpočtu jedné série funkcí lze využít již známého vyjádření pro druhou sérii funkcí a naopak. Zdali však jde o podobnost čistě formální nebo zdali to vše má nějaký hlubší smysl, není autorovi známo.

K hořejší problematice viz též článek autora [7].

6.7. Poznámka na závěr. Článek zdaleka nezahrnuje přehled nejnovějších výsledků v geometrii laplasiánu. Výzkum se v posledních letech soustřeďuje na otázky, které vyžadují hlubší znalosti z globální diferenciální geometrie, jako jsou například spektra laplasiánu pro diferenciální formy na varietách nebo obecněji, spektra eliptických diferenciálních operátorů na fibrovaných varietách. Autor se úmyslně vyhnul ve svém populárním příspěvku těmto dosti komplikovaným záležitostem. (Viz např. [3], [4].) Lze doufat, že čtenář z autorova výkladu mohl získat dojem, že problematika geometrie laplasiánu je dostatečně živá a zajímavá.

[1] AGMON S.: *Lectures on Elliptic Boundary Value Problems.* Van Nostrand, 1965.
[2] BERGER M., GAUDUCHON P., MAZET E.: *Le Spectre d'une Variété Riemannienne.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. *194*, Springer-Verlag, 1971.
[3] GILKEY P.: *The spectral geometry of a Riemannian manifold*, J. Differential Geometry, *10* (1975), 601—618.
[4] GILKEY P.: *Recursion relations and the asymptotic behavior of the eigenvalues of the Laplacian.* Compositio Mathematica *38* (1979), 201—240.
[5] GRAY A., VANHECKE L.: *Riemannian geometry as determined by the volumes of small geodesic balls.* Acta mathematica, Vol. *142*, 1979, 157—198.
[6] McKEAN H. P., SINGER I. M.: *Curvature and the eigenvalues of the Laplacian.* J. Differential Geometry, *1*, 1967, 43—69.
[7] KOWALSKI O.: *Additive volume invariants of Riemannian manifolds.* Acta mathematica, Vol. *145*, 1980, No. 3—4, 205—225.
[8] SAKAI T.: *On eigen-values of Laplacian and curvature of Riemannian manifolds*, Tôhoku Math. J., *23* (1971), 589—603.

150 rokov od objavu elektromagnetickej indukcie

Rudolf Zajac, Bratislava

Pred 150 rokmi, 29. augusta 1831 objavil Michael Faraday elektromagnetickú indukciu a vytvoril tak predpoklady pre novú éru v dejinách techniky a energetiky, éru elektrifikácie. Z hľadiska dejín fyziky zavŕšil týmto objavom experimentálnu základňu elektrodynamiky.

Ak jeho predchodcovia ukázali, že elektrické prúdy vyvolávajú magnetické účinky, M. Faraday dokázal opak: pomocou stálych magnetov alebo elektromagnetov možno vo vodičoch indukovať elektrické prúdy. Keby nebol urobil viac, delil by sa rovnakým dielom s A. M. Ampèrom (a jeho súčasníkmi H. Ch. Oerstedom, J. B. Biotom a F. Savartom) o objav elektromagnetizmu.

Faraday však zohral v histórii fyziky ešte aj inú úlohu. Bol prvý, čo opustil Newtonovu schému okamžitého silového pôsobenia na diaľku a položil základy teórie elektromagnetického poľa. Prostriedkom, ktorým preniesol silové pôsobenie elektricky nabitých diskrétnych hmotných bodov alebo elementov vodiča pretekaným prúdom do priestoru, do poľa, kde už niet okamžitého pôsobenia na diaľku, boli siločiary, ktoré zaviedol do náuky o elektrine a magnetizme. Pole, ktoré zaviedli francúzski matematici 18. storočia ako matematickú konštrukciu, stalo sa vo Faradayovom ponímaní fyzikálnou realitou.