Jaroslava Žáčková

Problém kvadratury kruhu a Lambertův důkaz iracionality čísla pi

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 11 (1966), No. 4, 240--250

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138641

ZPRÁVY, JUBILEA, HISTORIE

PROBLÉM KVADRATURY KRUHU A LAMBERTŮV DŮKAZ IRACIONALITY ČÍSLA π

Kvadratura kruhu je jedním ze tří proslulých matematických problémů starověku (trisekce úhlu, zdvojení krychle, kvadratura kruhu). S úlohou zápolili matematici několik tisíciletí. Jde totiž o následující úkol:

Lze sestrojit čtverec o stejném plošném obsahu jako má daný kruh, a to jen pravítkem a kružítkem?

S tímto úkolem je v podstatě matematicky ekvivalentní tzv. rektifikace kružnice, tj. konstrukce délky π, vyjadřující poměr obvodu kruhu k jeho průměru.*)

Popularita problému kvadratury kruhu záležela hlavně v tom, že se mu mohlo porozumět bez větších matematických znalostí.

Problémy jsou zdánlivě jednoduché, a proto se je snažili řešit po celá staletí vedle matematiků i laici, kteří neměli v matematice často ani dostatečné znalosti.

Teprve J. H. Lambertovi se podařilo v r. 1767, jako prvnímu, dokázat iracionalitu čísla π a Lindemannovi v r. 1882 jeho transcendentnost. Tím byla dokázána neřešitelnost úlohy a celý problém definitivně ukončen.

Dějiny kvadratury kruhu můžeme rozdělit do několika období ([2], str. 8—9).

První období sahá od začátku matematiky přibližně až do poloviny 17. století; charakterizuje ho skoro výhradně geometrický přístup ke studiu problému, který byl základem i numerických výpočtů čísla π.

Druhé období začíná v době, kdy vznikající diferenciální a integrální počet začíná skýtat prostředky i pro studium kvadratury kruhu a převládá v něm použití a rozvinutí infinitezimálních metod.

Třetí období můžeme přesně vydělit: začíná rokem 1767, tj. rokem vydání Lambertova pojednání „Mémoires sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes, circulaires et logarithmiques" (červenec 1767 v Mémoire de l'Académie de Berlin, Année 1761, Berlin 1768, str. 2265—322) a končí r. 1882, kdy vychází v Berlínské akademii Lindemannova práce „Über die Ludolphische Zahl" (viz Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1882, str. 679—682) a pojednání „Über die Zahl π" (viz Mathematischen Annalen, roč. *20*, str. 213—225). Teprve toto období přináší konečnou odpověď poznáváním povahy čísla π,

---

*) Historicky jsou však rektifikace kružnice a kvadratura kruhu odlišné. Oba problémy snad byly až do doby Archimedovy řešeny nezávisle na sobě a jejich souvislost se nechápala.

Označíme-li si totiž r poloměr kruhu, $d = 2r$ jeho průměr, u jeho obvod a P jeho obsah, potom

$$u = \pi d = 2\pi$$

$$P = \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2 = \frac{1}{2} ur .$$

Z druhého vztahu vyplývá, že P se rovná obsahu trojúhelníka, jehož základna je rovna obvodu kruhu a výška poloměru kruhu. Jde tedy o geometrické sestrojení délky u (rektifikace kružnice), neboť dále již umíme sestrojit čtverec rovnoplochý danému trojúhelníku.

když Lambert zahájil období poznáním iracionality čísla π a Lindemann důkazem jeho transcendentnosti vývoj ukončuje.

V tomto článku chceme podrobněji charakterizovat první a druhé období a podrobněji se zabývat vlastním Lambertovým důkazem iracionality čísla π a s ním úzce spojeným důkazem iracionality čísla e.

V prvním období byla kvadratura kruhu řešena jen vepsanými a opsanými mnohoúhelníky s velkým počtem stran. Existovala snaha určit číslo π výpočtem tak přesně, jak jen bude numericky možné. Šlo tedy pouze o aproximační provedení kvadratury kruhu s jistou přesností *). Největší přínos v matematice tohoto období přinesli Archimedes a Huygens.

Jeden z prvých pokusů o výpočet obsahu kruhu se nachází na egyptském papyrusu „Rhind", uloženém v Britském museu ([3], str. 19, 43). Bez dalšího vysvětlení se tam dovídáme, že plocha kruhu je rovna ploše čtverce o straně, která je o 1/9 menší než průměr d. Tedy:

$$\left(d - \frac{d}{9}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \frac{64}{81}d^2 = \frac{1}{4}\pi d^2$$

Z toho tedy dostáváme, že $\pi = 256/81 = 3{,}1605$, což je poměrně dobrým přiblížením. Naproti tomu Babyloňané používali hodnotu $\pi = 3$ a jen vzácně hodnotu $\pi = 3\frac{1}{8}$ ([3], str. 102).

V r. 420 př. n. l. našel Hippias z Elisu křivku ([4], str. 101–2), která s jistou přesností, i když omezenou, řešila jak problém trisekce úhlu, tak i problém kvadratury kruhu*). Nazývala se kvadratrix (*τετραγωνίζουσα*), což je první známá transcendentní křivka. Nebyla ovšem hledaným řešením, protože ji samotnou nelze sestrojit pouze pravítkem a kružítkem.

Pro některé speciální případy vypočítal plochy ohraničené oblouky — „menisky" — Hippokrates z Chia (ve 2. pol. 5. stol. př. n. l.), ([3], str. 183–8, nebo [4], str. 103–5).

Největším přínosem pro řešení problému kvadratury kruhu byly však ve starověku práce Archimeda ze Syrakus (287–212). Archimedes dokázal ve svém díle „Měření kruhu" ([2], str. 71–81) tři důležité věty:

1. věta: Každý kruh je obsahově rovný pravoúhlému trojúhelníku, jehož jedna odvěsna je rovna obvodu kruhu a druhá odvěsna je rovna jeho poloměru ([2], str. 71).

2. věta: Poměr plochy kruhu a čtverce jeho průměru je přibližně roven poměru 11 : 14 ([2], str. 74).

3. věta: Obvod kruhu je větší než trojnásobek jeho průměru a rozdíl obvodu kruhu a trojnásobku průměru je menší než 1/7 a větší než 10/71 průměru:

$$3{,}14084\ldots = 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} = 3{,}14285\ldots$$

([2], str. 75).

Při důkazech používá Archimedes opsané a vepsané mnohoúhelníky s rostoucím počtem stran.

---

*) Demokritovská matematika nepředpokládala limitu. Kruh byl tedy mnohoúhelník o velkém počtu stran, a kvadratura kruhu byla tedy možná.

Naproti tomu Archimedes použil myšlenky limitního přechodu a dále nemluví o přesném určení čísla π, ale pouze o jeho aproximaci. U něho se vlastně úloha kvadratury kruhu mění v úlohu rektifikace kružnice a tím začínají vlastně snahy o co nejpřesnější stanovení čísla π. Nesmíme však zapomenout, že úvahy řecké matematiky, tedy i Archimeda, byly vyjadřovány v geometrických pojmech.

*) Hippias pomocí kvadratrix řešil pouze trisekci úhlu. Teprve Dinostrat (284–305) jí použil při řešení kvadratury kruhu.

Archimedova horní aproximace čísla π, tj. $3\frac{1}{7}$, se stala v pozdější době v Řecku používanou hodnotou pro poměr obvodu kruhu k jeho průměru.

Ještě přesnější hodnota π, než je Archimedova, se vyskytuje v PTOLEMAIOVĚ „Almagestu" okolo r. 150 n. l. ([4], str. 190–2):

$$\pi \doteq 3\frac{17}{120} = 3{,}1416$$

U Číňanů se setkáváme s hodnotou $\pi = \sqrt{10}$ u ČŽAN-CHENA (78–139). Hodnoty $\pi = \sqrt{10}$ používal též Ind BRAHMAGUPTA (*598) a v 9. století Arab MUCHAMMAD AL-CHOREZMÍ. LIU HUI (3. stol.) se pokoušel aproximovat plochu kruhu stejným způsobem jako Archimedes. Vycházel přitom z vepsaných pravidelných $k\,.\,2^n$-úhelníků. Pro aproximaci plochy kruhu S používal nerovnosti

$$S_{2n} < S < S_n + 2(S_{2n} - S_n)\,,$$

kde S_n, S_{2n} jsou plochy pravidelných n a $2n$-úhelníků. Pro 96-úhelník dostal tak hodnotu $\pi = 3{,}14$ a při použití 3072-úhelníka $\pi = 3{,}14159$.

Ještě přesnější hodnotu π získal CU ČCHUNG TI (430–501). Podle něho:

$$3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927\,,$$

což je hodnota správná na 6 desetinných míst ([5], str. 70–3).

Indové, jmenovitě ÁRYABHATTA I. (*476), znali hodnotu

$$\pi = \frac{62832}{20000} = 3{,}1416\,.$$

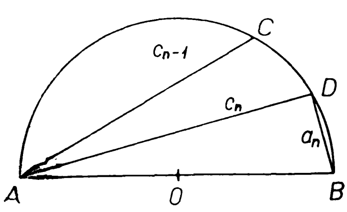
K tomuto výsledku se můžeme dostat při použití vzorce

$$s_{2n} = \sqrt{[2 - \sqrt{(4 - s_n^2)}]}\,,$$

kde s_n je strana vepsaného n-úhelníka; pro 384-úhelník dostaneme $\sqrt{98694}$ a to vede na Aryabhattovu hodnotu π.

Arabové při výpočtu čísla π nepřekonali po dlouhou dobu přesnost dosaženou Řeky. Ve III. knize „Kanona Masuda" vypočítal AL-BIRUNI (973–1048) $\pi = 3{,}1417$. Použil přitom vepsaného a opsaného mnohoúhelníka. Výsledek byl tedy méně přesný než dříve známá hodnota $\pi = 3{,}1416$.

Velmi důležitý je výpočet čísla π DŽEMŠIDEM GEJASEDDINEM AL-KAŠIM v „Rysala al-muchitijja" (Traktát o kružnici) z r. 1424. Al-Kašimu se podařilo spočítat π na 17 správných cifer. Při výpočtu si položil podmínku, že π musí být určeno tak, aby chyba v obvodu kružnice o průměru rovném 600 000 průměrů Země nepřevyšovala „šířku vlasu" ([5], str. 301). Při výpočtu se také opírá o vepsané mnohoúhelníky, jejichž strany si však vyjadřuje poněkud jiným způsobem než např. Archimedes. V kružnici o poloměru 60 určuje posloupnost tětiv příslušejících obloukům 120°, 150°, 165°, 172,5°, ... (obecně $\alpha_n = 180° - 60°/2^{n-1}$). Dále používá věty ([6], str. 268):



Obr. 1.

Plocha obdélníka o stranách rovných poloměru OA a součtu průměru AB s tětivou AC oblouku menšího než 180° je rovna ploše čtverce tětivy AD součtu tohoto oblouku a poloviny jeho doplňku do 180° (obr. 1).

Věta vyjadřuje rekurentně členy zmíněné posloupnosti tětiv. Označíme-li r poloměr, t_α tětivu příslušnou úhlu α, pak platí

$$(2r + t_\alpha)\, r = t^2_{[\alpha + (180^\circ - \alpha)/2]}\,.$$

Položíme-li $\alpha_n = (180^\circ + \alpha)/2$, potom $\alpha = \alpha_{n-1}$ a předchozí rovnice přejde na tvar

$$t^2_{\alpha_n} = (2r + t_{\alpha_{n-1}})\, r\,.$$

Zapíšeme-li toto v našem označení (podle obr. 1), dostaneme:

$$c_n^2 = r(2r + c_{n-1})$$

a odtud

$$c_n = \sqrt{[r/2r + c_{n-1})]}\,.$$

Stranu vepsaného mnohoúhelníka a_n pak lze snadno vyjádřit pomocí Pytagorovy věty:

$$a_n = \sqrt{(4r^2 - c_n^2)}\,.$$

Výpočet provedl al-Kaši v šedesátkové soustavě. Ale jako první mezi arabskými matematiky použil při vyjádření 2π též desetinných zlomků. S jeho jménem je však spojen ještě jeden důležitý fakt: třebaže vyjádřil π mnohem přesněji než Archimedes, říká: „... kromě Allaha nezná nikdo jeho přesnou hodnotu", čímž zřejmě pochybuje o možnosti vyjádření π v konečném tvaru. O tom, že číslo π není racionální, byl také přesvědčen již al-Biruni ([5], str. 305). Podobně hebrejský filosof MOISEJ BEN MAJSON (1135—1204) se již okolo r. 1190 zmínil o tom, že číslo π se nedá přesně vyjádřit stejně jako $\sqrt{5000}$.

Evropský středověk znamenal, podobně jako ve všech vědách, i v matematice dobu stagnace. A tak teprve FRANÇOIS VIETÉOVI (1540—1603) se podařilo postoupit kupředu a novým způsobem určit číslo π na 9 desetinných míst. Vycházel přitom z jím dokázané věty:

Vepíšou-li se kruhu dva pravidelné mnohoúhelníky, z nichž první má poloviční počet stran než druhý, je plošný obsah prvního mnohoúhelníka k druhému v poměru suplementární tětivy (apotomy) prvního k průměru ([2], str. 33).

Vieté tak došel k výsledku, že plocha kruhu (pro $2r = 1$) je

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}})}\cdot\sqrt{[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}})}]}\ldots}$$

čili

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}})}\cdot\sqrt{[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}})}]}\ldots}$$

Odtud odvodil r. 1593 vztah:

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{32}\ldots$$

Zásluhou Vietéovou bylo, že patrně jako prvý používal pro vyjádření π analytických prostředků, mimo jiné i nekonečného součinu ([7], str. 89).

Naproti tomu LUDOLPH VAN CEULEN (1539—1610), jehož jméno číslo π nese, ve svém díle „Van den Circkel" pouze spočítal Archimedovou metodou při použití až $60 \,.\, 2^{29}$-úhelníka číslo π na 19 desetinných míst. Později provedl výpočet až na 35 desetinných míst. Číslo π nese tedy jeho jméno přesto, že Ludolph nepřinesl principiálně nic nového.

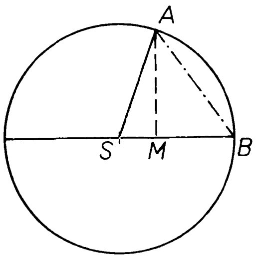
Druhou nejvýznamnější osobou prvního období byl vedle Archimeda holandský matematik Christian HUYGENS (1629—1695), který ve svém díle „De circuli magnitudine inventa" ([2], str. 85—131) vědecky zdokonalil a o nové myšlenky rozmnožil Archimedovu metodu numerické rektifikace kružnice. Podařilo se mu při výpočtu čísla π získat třikrát více desetinných míst, než dávají obvyklé metody. Pro 60úhelník dostal hranice čísla π: $3{,}1415926533 < \pi < 3{,}1415926538$, kdežto podle Archimeda by se dostala desetinná místa pouze dvě ([2], str. 130). Huygens dokázal ve svém díle řadu zajímavých vět:

Věta V ([2], str. 93—4): Plocha každého kruhu je větší než plocha jemu vepsaného pravidelného mnohoúhelníka zvětšená o třetinu přebytku, o který převyšuje plocha tohoto mnohoúhelníka jiný vepsaný mnohoúhelník s polovičním množstvím stran.

Věta VI ([2], str. 95): Plocha každého kruhu je menší než dvě třetiny plochy jemu opsaného pravidelného mnohoúhelníka, zvětšené o jednu třetinu podobného vepsaného mnohoúhelníka.

Věta VII ([2], str. 96): Obvod každého kruhu je větší než obvod jemu vepsaného pravidelného mnohoúhelníka, zvětšený o třetinu přebytku, kterým převyšuje tento mnohoúhelník obvod jiného vepsaného mnohoúhelníka s polovičním počtem stran.

Věta IX ([2], str. 99): Obvod každého kruhu je menší než dvě třetiny obvodu jemu vepsaného pravidelného mnohoúhelníka, zvětšené o třetinu obvodu podobného opsaného mnohoúhelníka.



Obr. 2.

Věta XI ([2], str. 110): Obvod každého kruhu je menší než menší z obou středních úměrných mezi obvody podobných pravidelných mnohoúhelníků, z nichž jeden je kruhu vepsán, druhý opsán. Plocha kruhu je však menší než plocha mnohoúhelníka podobného oněm dvěma, jehož obvod je roven větší z obou středních úměrných.

Věta XVI ([2], str. 123): Každý libovolný kruhový oblouk, který je menší než polovina obvodu kruhu, je větší než jeho tětiva zvětšená o třetinu rozdílu, kterým tětiva převyšuje sinus. Současně je však menší než tětiva zvětšená o veličinu, která se má k této třetině jako čtyřnásobná tětiva zvětšená o sinus, k dvojnásobné tětivě zvětšené o trojnásobný sinus. Tedy označíme-li si a délku oblouku, který je menší než polovina kružnice, s jeho sinus, s' jeho tětivu (obr. 2), dostáváme:

$$s' + \frac{s' - s}{3} < a < s' + \frac{s' - s}{3}\,\frac{4s' + s}{2s' + 3s}.$$

Druhé období se datuje přibližně od r. 1650 do r. 1766, zahrnuje tedy přibližně sto let. Během tohoto století však se objevily v matematice takové osobnosti jako byl NEWTON, LEIBNIZ, BERNOULLIOVÉ a EULER. V tomto období se již místo „geometrické metody" začalo používat nově vzniklé analýzy. Byla zde snaha určit číslo π analytickými výrazy. Tak se např. podařilo Johnu WALLISOVI (1616—1703) vyjádřit číslo π pomocí nekonečného součinu („Arithmetica infinitorum", Oxford 1656):

$$\frac{4}{\pi} = \frac{1.3.3.5.5.7.7\ldots}{2.4.4.6.6.8.8\ldots},$$

přičemž $\pi/4$ nazýval „malým čtvercem" ([8], str. 109). Velmi důležitá je i Leibnizova řada ([9], str. 30):

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$$

Je to vlastně rozvoj funkce arctg x

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad \text{pro } x = 1\,.$$

V r. 1706 vyjádřil anglický matematik John MACHIN (1680—1752) číslo π na 100 desetinných míst ([8], str. 148; [10] str. 299). Vycházel přitom ze vztahu

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239},$$

rozvinutého do tvaru

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \ldots\right)$$

V r. 1719 určil francouzský matematik DE LAGNY (1660—1734) číslo π na 127 desetinných míst*.

Největší přínos ve druhém období znamenal nesporně Leonhard EULER (1707—1783). Zavedl jako první označení π a e (báze přirozených logaritmů). Symbolu π užil poprvé ve svém pojednání „Variae observationes circa teries infinitas" (1737). Euler odvodil také vztahy mezi exponenciálními a goniometrickými funkcemi ([8], str. 146), které vyjádřil v nám známém tvaru:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \tag{1}$$

kde e^x značí exponenciální funkci, definovanou vždy konvergující řadou:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

Vzorce (1) můžeme psát též ve tvaru:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

Položíme-li $x = \pi$, potom $e^{i\pi} = -1$,

či pro $x = 2\pi$ $\qquad e^{2i\pi} = 1$.

Takto dospěl Euler k významným vztahům mezi čísly e a π; pro Lambertovy výsledky připravil Euler půdu i dalším zjištěním.

Ve svém díle „Introductio in analysin infinitorum" (Lausanne 1748) vyjádřil e a $\sqrt{e}$ řetězovým zlomkem:

$$e = (2; \overline{1, 2m, 1}) = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}}$$
$$m = 1, 2, 3, \ldots$$

---

* Pro úplnost uvedeme i další pozdější výpočty čísla π. Tak VEGA (1754—1802) ve svém „Thesauru" podal π na 140 míst, z nichž 136 bylo správných, a přitom bylo zjištěno, že de Langyho hodnota je platná s výjimkou 113. místa, kde mělo být 8 místo 7 ([10], str. 442). V r. 1844 určil Zacharias DASE (1824—1861) pomocí Schulzovy formule

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8}$$

číslo π na 200 desetinných míst ([8], str. 367; [2], str. 46). Ještě později se podařilo RICHTROVI spočítat π na 500 a SHANKSOVI na 700 desetinných míst.

$$\sqrt{e} = (1; \overline{4m + 1, 1, 1}) = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}}}$$

Podobně vyjádřil i

$$\frac{e - 1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \dots}}}}} \tag{2}$$

V souvislosti s rozsáhlými výpočty čísla π na mnoho desetinných míst a s použitím nových analytických prostředků, zesílily v 17. a 18. století pochybnosti, zda vůbec patří číslo π mezi racionální čísla. Objevila se řada pokusů o důkaz jeho iracionality, ale teprve když Euler odvodil vztahy mezi goniometrickými a exponenciálními funkcemi, podařilo se v r. 1767 Johannu Heinrichu LAMBERTOVI*) jako prvnímu iracionalitu čísla π dokázat.

Od tohoto roku se datuje třetí a poslední období v dějinách problému kvadratury kruhu. Lambertův důkaz iracionality čísla π a současně i čísla e^x a tg x pro racionální x je obsažen v jeho původní práci, citované v úvodu, nebo v jeho pozdějším pojednání „Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen" ([11], str. 140—169).

Pokusíme se v dalším o stručné nastínění Lambertových myšlenek.

Ještě před vlastním důkazem Lambert uvažuje: Kdyby bylo možné psát poměr

$$2r : 2\pi r = 1 : \pi \quad (2^x)$$

jako racionální číslo, potom by čitatel i jmenovatel musela být velmi veliká celá čísla (jak plyne z Ludolphova či Lagnyho výpočtu). Postupně pro (2^x) dostává posloupnost poměrů:

$$\begin{gathered} 1 : 3 \\ 7 : 22 \\ 106 : 333 \\ 113 : 355 \\ \dots\dots \\ 324521540032945 : 1019514486099146 \\ \text{atd.} \end{gathered}$$

Přitom každý z těchto poměrů je přesnější než předchozí. Pro názornost poslední zde udaný poměr určuje π pouze na 25 desetinných míst. Kdyby tedy šel poměr $1 : \pi$ vyjádřit racionálním číslem, tvořila by jej čísla ještě nesrovnatelně větší. Lambertem udané poměry pro $1 : \pi$ tvoří vlastně sblížené zlomky řetězového zlomku:

$$\frac{1}{\pi} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \dots}}}}}}}}}$$

*) Johann Heinrich Lambert (1728—1777), německý matematik, fyzik, astronom a filosof, člen Berlínské akademie.

Je zřejmé, že kdyby poměr $1 : \pi$ šel vyjádřit jako poměr celých čísel, i když velikých, musel by tento řetězový zlomek být konečný (nebo periodický), jak již dokázal Euler. Po této úvaze se Lambert dovolává některých svých výsledků z pojednání „Verwandlung der Brüche" ([11], str. 82—3). Zde totiž stanovil kromě jiného i nekonečný řetězový zlomek (neperiodický) vyjadřující oblouk kruhu jako funkci tangenty odpovídajícího úhlu (při jednotkovém poloměru). Naopak také nalezl Lambert opačně vyjádření tangenty příslušného oblouku jako funkci tohoto oblouku; tento vztah je vyjádřen následujícím řetězovým zlomkem:

$$\operatorname{tg} v = \cfrac{1}{\cfrac{1}{v} - \cfrac{1}{\cfrac{3}{v} - \cfrac{1}{\cfrac{5}{v} - \cfrac{1}{\cfrac{7}{v} - \cfrac{1}{\cfrac{9}{v} - \dots}}}}} \tag{3}$$

Odtud vyplývá, že tangenta oblouku rovného $1/n$ poloměru (n přirozené) musí být iracionální, neboť pro $v = 1/n$ dostáváme z (3) řetězový zlomek nekonečný a neperiodický:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{n} = \cfrac{1}{n - \cfrac{1}{3n - \cfrac{1}{5n - \cfrac{1}{7n - \dots}}}}$$

Speciálně pro oblouk rovný poloměru ($v = 1$):

$$\operatorname{tg} 1 = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{5 - \cfrac{1}{7 - \cfrac{1}{9 - \dots}}}}} \tag{4}$$

Další Lambertův postup lze také vyjádřit takto:

Sblížené zlomky $\alpha_i = p_i/q_i$ výrazu (4) si vyjádříme v tabulce:

a_i	p_i	q_i
	1	0
1	0	1
−3	1	1
5	−3	−2
−7	−14	−9
9	95	61
−11	841	540
13	−9156	−5879
atd.	atd.	atd.

$$p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2}$$

$$q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}$$

Odtud pro ně dostáváme posloupnost čísel p_i/q_i:

$$\frac{3}{2}, \frac{14}{9}, \frac{95}{61}, \frac{841}{540}, \frac{9156}{5879}, \text{ atd.} \tag{5}$$

jejíž každý následující člen určuje tg 1 přesněji než předchozí. Posloupnost (5) je nekonečná, přičemž čitatel i jmenovatel (aniž by existoval jejich společný dělitel) stále v absolutní hodnotě monotonně rostou.

Nalezené sblížené zlomky si rozepíšeme:

$$\frac{14}{9} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2.9}$$

$$\frac{95}{61} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2.9} + \frac{1}{9.61}$$

$$\frac{841}{540} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2.9} + \frac{1}{9.61} + \frac{1}{61.540}$$

$$\frac{9156}{5879} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2.9} + \frac{1}{9.61} + \frac{1}{61.540} + \frac{1}{540.5879}$$

Pokračujeme-li dále, můžeme konečně tangentu oblouku rovného poloměru vyjádřit nekonečnou řadou:

$$\text{tg } 1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2.9} + \frac{1}{9.61} + \frac{1}{61.540} + \frac{1}{540.5879} + \frac{1}{5879.76887} + \dots$$

Lambert o této řadě podotýká, že „konverguje rychleji než každá geometrická řada"*), a tvrdí, že „její součet je iracionální" ([11], str. 165)**). Dále Lambert ukazuje, že nejen tg $1/n$ pro n přirozené, nýbrž každá tg m/n (m, n přirozená) je iracionální. Tím vlastně dokázal Lagnyho větu, že tangenta racionálního oblouku je iracionální.

Lambert však současně tvrdí, že však musí platit i věta obrácená, tj. že oblouk racionální tangenty je iracionální. Kdybychom totiž předpokládali, že jak tangenta oblouku, tak i oblouk jsou racionální, bylo by to v rozporu s právě dokázanou větou.

Tím je v podstatě vlastní důkaz iracionality čísla π ukončen.

Lambert na základě počtářské zkušenosti, získané při výpočtu trigonometrických tabulek, tvrdí, že se vyskytuje jediná racionální tangenta, jmenovitě pro úhel 45°, která je rovna jedné. Je tedy oblouk příslušný 45° a dále též oblouk příslušný 90°, 180°, 360° iracionální, a proto poměry těchto oblouků k poloměru nejsou racionální čísla.

Poněvadž platí

$$\text{tg arc } 45° = \text{tg } \frac{\pi}{4} = 1 ,$$

plyne odtud podle právě dokázané věty, že $\pi/4$ je iracionální.

---

*) Lambert se zabýval konvergencí a dokonce rychlostí konvergence řady. Srovnává řadu s geometrickou řadou. V 18. století se s něčím podobným setkáváme jen ojediněle.

**) Lambertův závěr vyplývá zde však z Legendreovy věty, kterou ani nevyslovuje ani nedokazuje, ale kterou pravděpodobně na základě početních zkušeností pokládal za zřejmou, jak se o tom zmíníme dále.

V závěru pojednání se Lambert zabývá otázkou souměřitelnosti oblouku, jeho tangenty a poloměru. Protože oblouk a tangenta nemohou být současně racionální, plyne odtud, že tedy oblouk, tangenta a poloměr jsou nesouměřitelné.

Lambertův důkaz je na svou dobu velmi přesný a naprosto správně myšlenkově proveden. Chybí mu však matematické odůvodnění věty o iracionalitě některých nekonečných řetězových zlomků, které se v důkaze vyskytují. Tuto větu dokázal později Adrien LEGENDRE(1752–1833) ve svých „Éléments de geométrie" na str. 161 ([2], str. 157–166). Věta zněla:

Je-li

$$\cfrac{m}{n + \cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n'' + \dots}}}$$

nekonečný řetězový zlomek, kde m, n, m', n', m'', n'', ... jsou libovolná celá čísla různá od nuly a kde kromě toho všechny jednotlivé zlomky m/n, m'/n', m''/n'', ... jsou menší než 1, je hodnota řetězového zlomku iracionální. Legendre též ukázal, že řetězový zlomek má iracionální hodnotu i tehdy, když zlomky m/n, m'/n', m''/n'', ... nejsou všechny menší než 1, ale až od určitého počínaje. Touto větou pak Legendre doplnil důkaz iracionality čísla π. Stejné rozvoje mu dovolily dokázat i iracionalitu čísla π^2, což provedl poněkud jiným způsobem později i Hermite.

Citované Lambertovy práce obsahují také požadavek na další studium iracionalit. Lambert totiž upozorňuje, že v matematice existují vedle čísla π i jiná čísla, u nichž bude zapotřebí zjistit, zda je lze nebo nelze vyjádřit pomocí poměru celých čísel. K nim patří např. číslo e, které podle Lamberta má v souvislosti s logaritmy právě takovou úlohu jako číslo π vzhledem k délce kruhu. Obě mají tedy velký význam. Přesto se matematici zabývali více číslem π a studium podstaty čísla e opomíjeli*). Lambert vidí důvod především v tom, že pojmy kruhu a čtverce jsou známé skoro každému, což se nedá říci o pojmu logaritmu, který se začal studovat až v 17. století. Kdyby toho nebylo, pak by se podle Lamberta jistě vyskytlo právě tolik chybných a marných pokusů dokazujících racionalitu čísla e, jako se jich vyskytlo v souvislosti s číslem π.

Problém kvadratury kruhu však důkazem iracionality π a e^x nebyl ukončen. Toho si byl vědom i sám Lambert a vyslovil proto ve svém pojednání „Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques" domněnku, že e a π nejsou vůbec algebraická čísla. Podobnou domněnku vyslovil i Legendre v „Éléments de géométrie" ([2], str. 166): „... je pravděpodobné, že číslo π není obsaženo mezi algebraickými iracionalitami, tj., že nemůže být kořenem žádné algebraické rovnice s konečným počtem členů, jejíž koeficienty jsou racionální. Ale bude asi těžké tuto větu přesně dokázat". Byla to jakási výzva pro další následovníky. Nejpozoruhodnější však bylo, že Lambert svou domněnku vyslovil v době, kdy nebyla známa vůbec žádná transcendentní čísla. Vývoj studia algebraických a transcendentních čísel se však vymyká z tematiky, kterou jsme sledovali.

Jaroslava Žáčková

*) Euler nalezl rozvoj čísla e a výrazu $(e - 1)/2$ v nekonečný řetězový zlomek. Lambert v tomto ohledu na něj navázal ([11], str. 161) a dokázal, že také výrazy $(e - 1)/(e + 1)$ a $(e^2 -)/(e^2 + 1)$ a konečně i obecně $(e^x - 1)/(e^x + 1)$ (kde x je racionální) lze vyjádřit jako nekonečné neperiodické řetězové zlomky.

Literatura

[1] *„Johann Heinrich Lamberts deutscher gelehrter Briefwechsel“*, vydáno Joh. Bernoullim, Berlin 1782—1787.

[2] F. RUDIO: „Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre“, Leipzig 1892.

[3] L. VAN DER WAERDEN: *„Probuždajuščajasja nauka matěmatiki drevněvo Egipta, Vavilona, i Grecii“*, Moskva 1959, přelož. z holand. orig. („Ontwakende wetenschap. Egyptische, babylonischeen griekse wiskunde“, Groningen 1950).

[4] A. KOLMAN: *„Istoria matěmatiki v drevnosti“*, Moskva 1961.

[5] A. P. JUŠKIEVIČ: *„Istoria matěmatiki v srednije věka“*, Moskva 1961.

[6] DŽEMŠÍD GIJASEDDIN AL-KAŠI: *„Ključ arifmetiki. Traktát ob okružnosti“*, Moskva 1956, přelož. z arab.

[7] D. J. STRUIK: *„Dějiny matematiky“*, Praha 1963, přelož. z angl. orig. („A consise History of Mathematics“, London 1956.

[8] H. WIELEITNER: *„Istoria matěmatiki od Děkarta do serěding XIX stoletija“*, Moskva 1960, přelož. z něm. orig. („Geschichte der Mathematik II“).

[9] F. LÖWENHAUPT: *„Johann Heinrich Lambert — Leistung und Leben“*, Mülhausen 1943.

[10] M. CANTOR: *„Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“*, IV. díl, Leipzig 1911.

[11] J. H. LAMBERT: *„Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung“*, II. sv., Berlin 1770.

ŠEDESÁT LET DR. JIŘÍHO KABELE, CSc.

Dne 16. ledna 1966 se dožil šedesáti let zasloužilý školský pracovník RNDr Jiří KABELE, který je dobře znám naší učitelské obci jako neúnavný a houževnatý pracovník zabývající se dlouhá léta problematikou vyučování matematice, deskriptivní geometrii a rýsování. Na tomto úseku pracoval zejména v posledních dvaceti letech, kdy ve svém úředním postavení musil často hájit únosné podmínky pro vyučování zmíněných oborů na základní i na střední škole. Využíval přitom svých znalostí a zkušeností, kterých nabyl po absolvování přírodovědecké fakulty Masarykovy university v Brně nejprve na této škole jako asistent profesora Seiferta a později při svém působení na průmyslových školách. Od roku 1945 je pracovníkem Výzkumného ústavu pedagogického v Praze, kde vede nyní skupinu metodiky vyučování matematice a fyzice.

Z dlouholeté metodické a výzkumné práce dr. Kabele vznikla vedle mnoha zpráv a sdělení o provedených výzkumech řada jeho studií o vyučování matematice a několik osobitě pojatých publikací k závažným otázkám uplatnění vědeckého světového názoru při vyučování matematice na základní a střední škole. Velmi záslužnou práci vykonal dr. Kabele jako dlouholetý vedoucí redaktor časopisu Matematika ve škole, kde věnoval nemálo úsilí snaze o pozvednutí odborné i metodické úrovně našich učitelů matematiky, deskriptivní geometrie a rýsování.

I když vzpomínáme životního jubilea dr. Kabele, který je doluholetým pracovníkem i v naší Jednotě, poněkud opožděně, přejeme mu do dalších let života upříměně mnoho zdraví a životní pohody k realizaci jeho osobních i pracovních plánů.

Josef Harálek

DOC. DR. BOHUMIL VLACH ŠEDESÁTNÍKEM

Dne 30. července 1966 se dožívá 60 let RNDr Bohumil VLACH, docent fyziky na přírodovědecké fakultě University J. E. Purkyně v Brně.

Po studiích na přírodovědecké fakultě v Brně učil matematice a fyzice na bývalých měšťanských