Vilém Novák; Martin Černý; Jiří Nekola

Fuzzy množiny - perspektivy, problémy a aplikace

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 29 (1984), No. 3, 126--137

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138621

Fuzzy množiny – perspektivy, problémy a aplikace

Vilém Novák, Martin Černý, Jiří Nekola.

1. ÚVOD

Představme si hromadu kamení a zkusme z ní postupně ubírat jeden kámen po druhém, přičemž vždy po ubrání jednoho kamene rozhodneme, zda ještě máme hromadu nebo ne. Ve kterém okamžiku prohlásíme, že již nemáme hromadu kamení?

Tento paradox je známý již od starověku jako paradox hromady. Souvisí s významnou vlastností přirozeného jazyka, kterou je schopnost funkčně používat vágně vymezené pojmy.

Problém vágnosti byl dlouhou dobu dosti opomíjen. V matematice se vyžaduje naprostá přesnost a tato přesnost se přenáší i do těch věd, v nichž se matematika aplikuje. Ukazuje se však, že snaha o stále větší přesnost vede k neúměrnému nárůstu definic a šíře pojednání o prakticky jednoduchých věcech. Mezní přesnost znamená schopnost popsat každý jev v realitě. Věda se tím dostává do situace, kdy říká „stále více a více o stále menším úseku skutečnosti". Tzv. *princip inkompatibility* zformulovaný L.A. Zadehem v [21] říká, že „popisujeme-li složitý systém, pak s růstem jeho složitosti klesá naše schopnost formulovat přesné a zároveň významné soudy o jeho chování, až je dosaženo hranice, za níž jsou přesnost a relevantnost vzájemně se vylučující charakteristiky".

Pojem vyjádřený v přirozeném jazyce (např. stůl, zvíře, červený apod.) lze chápat jako nějakou vlastnost. Dokážeme ukázat objekt (reprezentanta), který tuto vlastnost má, avšak dostaneme se do značných potíží, bude-li po nás někdo chtít, abychom vyjmenovali všechny takové objekty. Nelze o každém prvku univerza jednoznačně rozhodnout, zda danou vlastnost má nebo ne. Dostali jsme tedy třídu prvků, jejíž hranice nejsou přesně určeny a která proto netvoří množinu*). Nemůžeme bez újmy na výstižnosti aplikovat klasickou matematiku, v níž je pojem množiny ústředním pojmem. Na druhé straně je existence nepřesně (vágně) vymezených tříd a schopnost přirozeného jazyka je funkčně zachytit patrně hlavní příčinou, proč je přirozený jazyk univerzální a proč lze pomocí něho velmi stručně postihnout i dosti složité jevy v realitě.

Matematický aparát, který by umožnil výstižněji podchytit vágně vymezené třídy by proto jistě byl velmi užitečný. V polovině šedesátých let navrhl L. A. Zadeh v [22] modifikovanou teorii množin nazývanou *teorie fuzzy množin*. Základní idea je velmi jednoduchá a poměrně přirozená: nejsme-li schopni stanovit přesné hranice třídy určené vágním pojmem, nahraďme rozhodnutí o příslušnosti či nepříslušnosti daného prvku k ní mírou vybíranou z nějaké škály. Tato míra, kterou budeme nazývat *stupeň*

---

*) Připomeňme, že množina je soubor prvků, ke kterému existuje vlastnost taková, že lze pomocí ní *jednoznačně* rozhodnout o libovolném prvku, zda do tohoto souboru patří nebo ne.

příslušnosti, určuje místo a roli prvku v dané třídě. Menší stupeň příslušnosti vyjadřuje, že daný prvek je někde „blíže k okraji třídy". Funkci přiřazující prvkům univerza jejich stupně příslušnosti nazveme fuzzy množina*).

V tomto příspěvku uvedeme základní pojmy této teorie a zmíníme se o některých jejich aplikacích. Naším cílem je podat čtenáři stručnou a přehlednou informaci o teorii fuzzy množin.

2. TEORIE FUZZY MNOŽIN A JAZYKOVÁ PROMĚNNÁ

2.1 Základní pojmy teorie fuzzy množin

Nechť U je množina prvků představujících *univerzum* a $\mathscr{L} = \langle L, \vee, \wedge \rangle$ je svaz. Pak *fuzzy množina* A je funkce

$$A : U \to L.$$

Funkce A se nazývá *funkce příslušnosti* a prvek $Ax \in L$ stupeň příslušnosti prvku $x \in U$ do fuzzy množiny A. Fuzzy množina je tedy ztotožněna se svou funkcí příslušnosti (někteří autoři označují funkci příslušnosti fuzzy množiny A symbolem μ_A). Je-li A fuzzy množina v U, budeme psát $A \lessapprox U$.

Svaz stupňů příslušnosti není zcela libovolný. Existují dobré důvody předpokládat, že $\mathscr{L}$ je úplný, nekonečně distributivní svaz $\mathscr{L} = \langle L, \vee, \wedge, \otimes, \to, \mathbf{1}, \mathbf{0} \rangle$, který má dále tyto vlastnosti: Operace $\otimes$ je binární komutativní izotonní operace *součinu* a $\to$ binární operace *rezidua*, která je antitonní v první a izotonní ve druhé proměnné, tj. pro každé $\delta \in L$ a $\alpha, \beta \in L$ takové, že $\alpha \leqq \beta$, platí

$$\alpha \to \delta \geqq \beta \to \delta$$
$$\delta \to \alpha \leqq \delta \to \beta$$
$$\delta \otimes \alpha \leqq \delta \otimes \beta$$

Obě operace musí splňovat podmínku adjunkce, tj. pro všechna $\alpha, \beta, \gamma \in L$

$$\alpha \otimes \beta \leqq \gamma, \quad \textit{právě když} \quad \alpha \leqq \beta \to \gamma$$

a zároveň $\langle L, \otimes, \mathbf{1} \rangle$ musí být komutativní monoid. Svaz $\mathscr{L}$ s uvedenými vlastnostmi se nazývá *reziduovaný svaz*.

Vhodným a nejčastěji používaným svazem stupňů příslušnosti je reziduovaný svaz $I = \langle \langle 0, 1 \rangle, \vee, \wedge, \otimes, \to, 1, 0 \rangle$, kde $\vee$, $\wedge$ jsou operace maxima a minima a součin a rezidium jsou operace

$$(1) \qquad \alpha \otimes \beta = 0 \vee (\alpha + \beta - 1) \qquad \alpha \to \beta = 1 \wedge (1 - \alpha + \beta).$$

*) Výběr českého ekvivalentu k anglickému „fuzzy set" naráží na těžko překonatelné potíže, neboť tento termín se používá v různých spojeních, a proto je každý překlad alespoň někde nevhodně zavádějící. Vyskytly se překlady „mlhavá množina", „rozmazaná množina", „neostrá množina" aj. Nejvhodnější se však zdá používat i v češtině původní přívlastek „fuzzy", neboť se již mezi specialisty vžil a v žádném spojení nemá nežádoucí konotaci.

Speciálním případem reziduovaného svazu je Booleův svaz $\langle\{0, 1\}, \vee, \wedge, -\rangle$, kde $\otimes = \wedge$ a $\rightarrow$ je operace definovaná pro všechna $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$ takto:

$$\alpha \rightarrow \beta = \bar{\alpha} \vee \beta \tag{2}$$

Tento svaz hraje ústřední roli v klasické teorii množin. Základní operace s klasickými množinami lze definovat pomocí operací „$\vee$, $\wedge$, $\otimes$, $-$“. Proto lze pomocí operací v obecném reziduovaném svazu $\mathscr{L}$ definovat operace s fuzzy množinami, které jsou přirozeným zobecněním operací s klasickými množinami:

sjednocení

$C = A \cup B$, *právě když* $Cx = Ax \vee Bx$,

průnik

$C = A \cap B$, *právě když* $Cx = Ax \wedge Bx$,

součin (odvážný průnik) [bold intersection]

$C = A * B$, *právě když* $Cx = Ax \otimes Bx$,

doplněk (vzhledem k U)

$C = \bar{A}$, *právě když* $Cx = Ax \rightarrow \mathbf{0}$

pro všechna $x \in U$ a $A, B \cong U$. Tyto operace jsou ve shodě s intuicí, neboť např. stupeň příslušnosti prvku x do sjednocení dvou fuzzy množin A, B musí být alespoň tak velký, jako větší z obou stupňů příslušnosti Ax, resp. Bx.

Zastavme se u doplňku. Tato operace je od počátku předmětem mnoha sporů, neboť obecně neplatí

$$A \cup \bar{A} = U \qquad A \cap \bar{A} = \emptyset,$$

tj. je porušen zákon vyloučení třetího. Struktura fuzzy množin tedy netvoří Booleův svaz. Ve výše uvedeném reziduovaném svazu I je operace doplňku dána vztahem

$$\bar{A}x = 1 - Ax.$$

Tento vztah původně navrhl ve [22] L. A. Zadeh. Zároveň je to jediná možná definice doplňku vyplývající z fuzzy logiky na svazu I (viz dále).

Operace součinu fuzzy množin také plyne z fuzzy logiky. Intuitivně je x současně prvkem A a B ve stupni, který nemůže být větší než menší z obou stupňů příslušnosti Ax, Bx. Někdy je však menší, a to v tom případě, kdy je mezi A a B nějaká vnitřní souvislost. Vhodným modelem této situace je operace součinu fuzzy množin $A * B$, která je zesílením průniku $A \cap B$ (pro klasické množiny operace průniku a součinu splývají).

Důležité charakteristiky fuzzy množiny jsou:

nosič

$\mathrm{Supp}(A) = \{x \in U; Ax > \mathbf{0}\}$,

α-řez

$A_\alpha = \{x \in U; Ax \geqq \alpha\}$ pro $\alpha \in L$, *jádro*

$\operatorname{Ker}(A) = \{x \in U; Ax = \mathbf{1}\}$.

Konkrétní fuzzy množina se zpravidla zapisuje

$$(3) \qquad A = {}^{Ax_1}/_{x_1} + {}^{Ax_2}/_{x_2} + \ldots = \sum_{x \in U} {}^{Ax}/_{x},$$

je-li univerzum konečné nebo spočetné a

$$(4) \qquad A = \int_{x \in U} {}^{Ax}/_{x},$$

je-li nespočetné. V těchto zápisech „+", „$\sum$", „$\int$" mají význam sjednocení dvojic ${}^{Ax}/_{x}$, kde Ax je stupeň příslušnosti a $x \in U$. Např. (pro reziduovaný svaz I) je

$$A = {}^{0,1}/_{x_1} + {}^{0,3}/_{x_2} + {}^{0,6}/_{x_3} + {}^{0,9}/_{x_4} + {}^{1}/_{x_5}$$

fuzzy množina $A \subsetapprox U$, kde $x_i \in U$, $i = 1, \ldots, 5$ a prvek x_1 do ní patří se stupněm 0,1, prvek x_2 se stupněm 0,3 atd. Prvek x_5 do ní „stoprocentně" patří, tedy je to její typický reprezentant (dvojice ${}^{0}/_{x}$ se v zápisech (3) a (4) vynechávají).

V rámci teorie fuzzy množin lze definovat většinu pojmů a operací, které jsou zobecněním odpovídajících pojmů z teorie klasických množin, např. konvexní fuzzy množina, relace, funkce, ekvivalence, uspořádání apod.

Kartézský součin fuzzy množin $A \subsetapprox U$, $B \subsetapprox V$ je definován jako fuzzy množina $A \times B \subsetapprox U \times V$ se stupni příslušnosti

$$(A \times B)\langle x, y\rangle = Ax \wedge By$$

pro všechna $x \in U$ a $y \in V$. *Fuzzy relace* je fuzzy množina $R \subsetapprox U \times U$, tj. funkce $R : U \times U \to L$.

Významný princip umožňující převést prakticky libovolnou strukturu do teorie fuzzy množin je tzv. *princip rozšíření* [extension principle]: Nechť v U je definována operace $*$ (pro zjednodušení binární) a nechť $A, B \subsetapprox U$. Pak výsledek rozšíření této operace na fuzzy množiny A, B je fuzzy množina $A * B$ se stupni příslušnosti

$$(5) \qquad (A * B)\, z = \begin{cases} \bigvee_{x * y} Ax \wedge By \\ \mathbf{0} \text{ jinak}. \end{cases}$$

Pomocí principu rozšíření lze vytvořit aritmetiku tzv. *fuzzy čísel*, tj. speciálních fuzzy množin v univerzu reálných čísel Re, která má velký význam při aplikacích.

Platí tato důležitá věta o *reprezentaci fuzzy množin.*

Věta 1: Pro každou fuzzy množinu $A \subsetapprox U$ a každé $x \in U$ platí

$$Ax = \bigvee\{\alpha; x \in A_\alpha\}.$$

Z této věty plyne, že každou fuzzy množinu A lze ztotožnit s posloupností jejích α-řezů $\mathscr{A}_L = \{A_\alpha; \alpha \in L\}$, a tedy fuzzy množinu lze chápat jako systém klasických množin.

Jednou z možných námitek proti teorii fuzzy množin je nutnost definovat přesně stupeň příslušnosti prvku do dané fuzzy množiny. Nepřesnost na jedné straně je nahrazena přesností jinde, což podle mínění některých autorů zužuje význam této teorie a vhodnost jejího aparátu pro práci s vágně vymezenými třídami. Dosavadní výsledky práce s fuzzy množinami však tento názor nepotvrzují. Je pravda, že problém nepřesnosti se v teorii fuzzy množin nahrazuje větší složitostí aparátu a že jistá přesnost stupňů příslušnosti v rozporu s podstatou vágnosti je nutná. To však naopak tvoří z teorie fuzzy množin vhodný technický prostředek, který umožňuje funkčně pracovat s vágně vymezenými třídami a který nabídl širokou perspektivu pro modelování sémantiky přirozeného jazyka na počítači, což přináší kvalitativně nové aplikační možnosti.

2.2 Vícehodnotová fuzzy logika

V přechozím odstavci jsme se zmínili o motivaci operace doplňku a součinu fuzzy množin výsledky dosaženými ve fuzzy logice. Pod pojmem fuzzy logika se rozumí buď *jazyková logika*, jejíž pravdivostní hodnoty jsou vyjádřeny slovně, např. *pravda*, *částečně nepravda* apod. nebo *vícehodnotová logika* mající více než dvě pravdivostní hodnoty vybírané z reziduovaného svazu $\mathscr{L} = \langle L, \vee, \wedge, \otimes, \rightarrow, \mathbf{1}, \mathbf{0}\rangle$. V další části krátce popíšeme tuto fuzzy logiku.

Základní spojky ve fuzzy logice jsou disjunkce ($\bigvee$), konjunkce ($\bigwedge$), odvážná konjunkce ($\&$), implikace ($\Rightarrow$) a nulární spojky $\boldsymbol{\alpha}$ definované ke všem $\alpha \in L$. Formule jsou tvořeny z výrokových proměnných a uvedených spojek běžným způsobem.

Pravdivostní ohodnocení V je fuzzy množina v univerzu všech formulí, pro niž platí

$$V\boldsymbol{\alpha} = \alpha \text{ pro každé } \alpha \in L$$

$$V(\varphi \bigwedge \psi) = V\varphi \wedge V\psi \qquad V(\varphi \bigvee \psi) = V\varphi \vee V\psi$$

$$V(\varphi \,\&\, \psi) = V\varphi \otimes V\psi \qquad V(\varphi \Rightarrow \psi) = V\varphi \rightarrow V\psi\,.$$

Dále lze definovat *pravidla úsudku*, která mají dvě části: *syntaktickou* a *sémantickou*. Např. pravidlo *modus ponens* je definováno takto:

$$\frac{\varphi, \varphi \Rightarrow \psi}{\psi}\left(\frac{\alpha, \beta}{\alpha \otimes \beta}\right),$$

tj. z formulí φ s pravdivostí α a $\varphi \Rightarrow \psi$ s pravdivostí β odvodíme formuli ψ s pravdivostí $\alpha \otimes \beta$. Kromě modus ponens jsou zavedena ještě další pravidla úsudku.

Důkaz formule je definován běžným způsobem. Poznamenejme, že v souladu s intuicí je pravdivostní hodnota formule, která je posledním členem nějakého důkazu, obecně menší než pravdivost výchozích formulí (pokud ovšem není tautologií).

Řekneme, že fuzzy logika je *úplná*, jestliže pravdivostní hodnota formule, která je výsledkem nějakého důkazu, je rovna infimu pravdivostních hodnot této formule při libovolném pravdivostním ohodnocení V.

Věta 2: Pro reziduovaný svaz $I = \langle\langle 0, 1\rangle, \vee, \wedge, \otimes, \rightarrow, 1, 0\rangle$ je vícehodnotová fuzzy logika úplná.

Podobná věta platí i pro případ, kdy nosičem reziduovaného svazu pravdivostních hodnot je konečný řetězec. Zároveň platí tato věta.

Věta 3: Nechť $L = \langle 0, 1 \rangle$ a nechť $\rightarrow'$ je operace rezidua na tomto intervalu. Není-li tato operace spojitá na $L \times L$, pak nelze sestrojit vícehodnotovou logiku na $\mathscr{L} = \langle \langle 0, 1 \rangle, \vee, \wedge, \otimes, \rightarrow', 1, 0 \rangle$ tak, aby měla úplnou syntaxi.

Vzhledem k tomu, že každá adjungovaná dvojice spojitých operací součinu $\otimes$ a rezidua $\rightarrow$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ je izomorfní s operacemi (1), plyne z vět 2 a 3, že výše uvedený svaz I je jediným reziduovaným svazem na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, na němž lze vybudovat úplnou fuzzy logiku. Podrobnosti včetně důkazů najde čtenář v [18].

2.3 Modelování sémantiky a jazyková proměnná

Rozvoj teorie fuzzy množin úzce souvisí s modelováním sémantiky přirozeného jazyka. Z lingvistiky pochází motivace mnoha pojmů a pro ni přinesla teorie fuzzy množin nejzajímavější podněty.

Nechť $\mathscr{T}$ je množina slov přirozeného jazyka a U je univerzum. Daný prvek univerza může být charakterizován více slovy, přičemž každé slovo jej charakterizuje jen do „určité míry". Budeme-li předpokládat, že tyto míry jsou prvky reziduovaného svazu $\mathscr{L}$, pak dostáváme fuzzy relaci

$$S \lessapprox T \times U ,$$

kterou nazveme *sémantická fuzzy relace*. Význam slova $\mathscr{A} \in \mathscr{T}$ je pak fuzzy množina

$$M(\mathscr{A}) = \int_{x \in U} S\langle \mathscr{A}, x \rangle / x$$

Význam slov, popř. složitějších slovních spojení, je tedy popsán nějakou funkcí (funkcí příslušnosti) z univerza U do svazu $\mathscr{L}$. Z psychologického hlediska se tento přístup zdá být velmi přirozený. Uvažujme např. „malá čísla". Pak si lze v daném kontextu snadno představit, jak by asi měla vypadat funkce příslušnosti významu tohoto pojmu, např.

$$M\,(\mathit{mal\acute{a}\ \check{c}\acute{\imath}sla}) = {}^{1}/_{1} + {}^{1}/_{2} + {}^{1}/_{3} + {}^{0,9}/_{4} + {}^{0,9}/_{5} + {}^{0,8}/_{6} + \ldots \tag{6}$$

Stupně příslušnosti by intuitivně měly klesat. Na tomto místě je třeba zdůraznit, že nezáleží příliš na konkrétních hodnotách stupňů příslušnosti, nýbrž mnohem více na tvaru křivky funkce příslušnosti. Bylo provedeno několik psychologických experimentů a v jejich rámci se odhadovala funkce příslušnosti. Výsledky jsou navzájem v dosti dobré shodě a potvrzují, že tento pojem je člověku blízký a pochopitelný.

Pomocí základních operací lze definovat význam složitějších slovních spojení (jazykových výrazů). Nechť $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 \in \mathscr{T}$. Pak

$$\begin{aligned} &M(\mathscr{A}_1\ a\ \mathscr{A}_2) = M(\mathscr{A}_1) \cap M(\mathscr{A}_2) \\ &M(\mathscr{A}_1\ i\ \mathscr{A}_2) = M(\mathscr{A}_1) * M(\mathscr{A}_2) \\ &M(\mathscr{A}_1\ nebo\ \mathscr{A}_2) = M(\mathscr{A}_1) \cup M(\mathscr{A}_2) \\ &M(ne\ \mathscr{A}_1) = \overline{M(\mathscr{A}_1)}\ . \end{aligned} \tag{7}$$

Velmi zajímavá je problematika tzv. *jazykových operátorů*, na které teorie fuzzy množin vrhla nové světlo a naznačila možnost přímého počítání funkcí příslušnosti významů nových výrazů z několika základních slov. Jedná se o slova např. *velmi*, *značně*, *více méně* apod. Každý jazykový operátor $\boldsymbol{m}$ má přiřazenu asociovanou funkci

$$\mathrm{Asf}_{\boldsymbol{m}} : L \to L .$$

pomocí níž je význam výrazu $\boldsymbol{m}\mathscr{A}$ pro $\mathscr{A} \in \mathscr{T}$ vypočten jako složená funkce

$$M(\boldsymbol{m}\mathscr{A}) = \mathrm{Asf}_{\boldsymbol{m}} \circ M(\mathscr{A}) . \tag{8}$$

Nejvíce používaným jazykovým operátorem je operátor *velmi* s asociovanou funkcí ($L = \langle 0, 1 \rangle$)

$$\mathrm{Asf}_{velmi} = \alpha^2 .$$

Pak např. význam jazykového výrazu „velmi malá čísla", kde význam „malá čísla" je dán fuzzy množinou (6), je

$$M\,(velmi\ mal\acute{a}\ \check{c}\acute{\imath}sla) = {}^{1}\!/_{1} + {}^{1}\!/_{2} + {}^{1}\!/_{3} + {}^{0,81}\!/_{4} + {}^{0,81}\!/_{5} + {}^{0,64}\!/_{6} + \ldots$$

Stupně příslušnosti se působením jazykového operátoru velmi koncentrují kolem jádra fuzzy množiny. Podobně jsou zavedeny asociované funkce dalších operátorů.

Pro aplikace má velký význam pojem *jazykové proměnné*. Je to proměnná, jejíž hodnoty jsou jazykové výrazy (budeme je nazývat termy), jejichž významy jsou fuzzy množiny. Příkladem jazykové proměnné může být *věk*, *výška*, *pravdivost*, *inteligence*, jejichž hodnoty jsou slova např. *mladý*, *značně velký*, *nepravda*, *ne příliš chytrý* aj. Formálně je jazyková proměnná pětice

$$\langle \mathscr{X}, \mathscr{T}(\mathscr{X}), U, G, \mathscr{M} \rangle ,$$

kde $\mathscr{X}$ je jméno jazykové proměnné, $\mathscr{T}(\mathscr{X})$ je množina jejích termů, *U je univerzum*, *G syntaktické pravidlo*, pomocí něhož jsou generovány termy $\mathscr{A} \in \mathscr{T}(\mathscr{X})$ z několika základních (atomických) termů a jazykových operátorů a $\mathscr{M}$ je *sémantické pravidlo*, které každému termu $\mathscr{A} \in \mathscr{T}(\mathscr{X})$ přiřadí jeho význam $M(\mathscr{A}) \subsetneqq U$ ve formě fuzzy množiny. Syntaktické pravidlo G je zpravidla bezkontextová gramatika. Na ně navazuje pravidlo $\mathscr{M}$, které ke generování významů využívá vztahů (7).

Zajímavá je také opačná úloha tzv. *lingvistické aproximace*, kdy se dané fuzzy množině přiřazuje slovo (jazykový výraz), jehož význam lze touto fuzzy množinou modelovat. Zpravidla se vychází z jazykové proměnné s konečným počtem termů. Byly zkonstruovány algoritmy, které dávají uspokojivé výsledky ve shodě s intuicí.

3. APLIKACE FUZZY MNOŽIN PŘI MODELOVÁNÍ SLOŽITÝCH PROCESŮ

3.1 Obecný model

Ve vědě i v technice jsou často popisovány systémy a procesy dvojího druhu: jedny lze označit jako „fuzzy", tj. jejich přesný popis teoreticky neexistuje (např. rozsáhlé společensko-ekonomické systémy). Druhé svou podstatou fuzzy nejsou, avšak jsou natolik složité, že je přesně popsat neumíme, nebo je tento popis prakticky nepoužitelný (složité elektrizační sítě aj.). V obou případech se nabízí použití teorie fuzzy množin, která by mohla vytvořit most mezi verbálním a matematickým modelem systému.

Obecně jsou lingvistické (verbální) modely zformulovány jako soustava podmíněných výroků

(9) $\mathscr{R}_i =$ JESTLIŽE X_1 *je* $\mathscr{A}_{i1}$ A X_2 *je* $\mathscr{A}_{i2}$ A ... A X_n *je* $\mathscr{A}_{in}$ PAK Y *je* $\mathscr{B}_i$,

kde $X_1, \ldots, X_n$, Y jsou proměnné s hodnotami v univerzech $U_1, \ldots, U_n$, V a $\mathscr{A}_{i1}, \ldots, \mathscr{A}_{in}$, $\mathscr{B}_i$ jsou jazykové výrazy s významy $M(\mathscr{A}_{ij}) \subsetneqq U_j, j = 1, \ldots, n$ a $M(\mathscr{B}_i) \subsetneqq V$. V praxi jsou výrazy $\mathscr{A}_{ij}$, $\mathscr{B}_i$ obvykle slova typu „malý, velký, průměrný" apod. Výroky (9) jsou mezi sebou spojeny spojkou NEBO do výsledného výroku

(10) $$\mathscr{R} = \mathscr{R}_1 \text{ NEBO } \mathscr{R}_2 \text{ NEBO } \ldots \text{ NEBO } \mathscr{R}_m .$$

Význam výroků $\mathscr{R}_i$, $i = 1, \ldots, m$ je zpravidla modelován pomocí kartézského součinu fuzzy množin $M(\mathscr{A}_{i1}), \ldots, M(\mathscr{A}_{in})$, $M(\mathscr{B}_i)$

(11) $$M(\mathscr{R}_i) = M(\mathscr{A}_{i1}) \times \ldots \times M(\mathscr{A}_{in}) \times M(\mathscr{B}_i) .$$

Definice (11) je zdůvodněna tím, že (9) vyjadřuje vztah mezi prvky univerz U_i. Čistě z logického hlediska bychom význam (9) modelovali spíše jako fuzzy množinu $M(\mathscr{R}_i)$ se stupni příslušnosti

(12) $$M(\mathscr{R}_i)\langle x_1, \ldots, x_n, y\rangle = (M(\mathscr{A}_{i1})\, x_1 \wedge \ldots \wedge M(\mathscr{A}_{in})\, x_n) \rightarrow M(\mathscr{B}_i)\, y .$$

Význam výroku $\mathscr{R}$ je pak sjednocení významů $M(\mathscr{R}_i)$

(13) $$M(\mathscr{R}) = \bigcup_{i=1}^{m} M(\mathscr{R}_i) .$$

Výraz (13) představuje model složitého procesu vyjádřený pomocí fuzzy množin.

Chování tohoto procesu můžeme zkoumat pomocí tzv. kompozičního pravidla úsudku. Předpokládejme, že známe jazykové výrazy $\mathscr{A}'_1, \ldots, \mathscr{A}'_n$ s významy $M(\mathscr{A}'_1) = A'_1, \ldots, M(\mathscr{A}'_n) = A'_n$. Pak hledaná hodnota $\mathscr{B}'$ má význam

(14) $$M(\mathscr{B}') = (M(\mathscr{A}'_1) \times \ldots \times M(\mathscr{A}'_n)) \circ M(\mathscr{R}) ,$$

kde „$\circ$" značí kompozici fuzzy relací. Převedeno na stupně příslušnosti je výraz (14) ekvivalentní

$$M(\mathscr{B}')\, y = \bigvee_{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in U_1 \times \ldots \times U} (A'_1 \times \ldots \times A'_n)\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \wedge R\langle x_1, \ldots, x_n, y\rangle ,$$

resp. v případě vztahu (12)

$$M(\mathscr{B}') = \bigvee_{\langle x_1, \ldots x_n\rangle \in U_1 \times \ldots \times U} (A'_1 \times \ldots \times A'_n)\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \otimes R\langle x_1, \ldots, x_n, y\rangle ,$$

kde $R = M(\mathscr{R})$. Výsledkem je fuzzy množina $M(\mathscr{B}')$ vyjadřující odezvu modelovaného procesu na hodnoty $\mathscr{A}'_1, \ldots, \mathscr{A}'_n$. Chceme-li výsledek vyjádřit opět v přirozeném jazyce, musíme pro nalezení jazykového výrazu $\mathscr{B}'$ řešit úlohu lingvistické aproximace.

Popsaný model slouží jako základ ve většině aplikací fuzzy množin. Velmi zajímavá je např. aplikace při modelování inovačního procesu [12, 13].

3.2 Fuzzy regulace

Nejvýznamnější použití modelu popsaného v odstavci 3.1 je v regulaci. Byl navržen model regulátoru zjednodušeně nazývaný *fuzzy regulátor*, jehož cílem je nahradit člověka při regulování složitých rozsáhlých systémů.

Označme $u \in U$ akční veličinu, $\Delta u \in V$ její přírůstek, $e \in E$ regulační odchylku a $\Delta e \in S$ její přírůstek. Pak lze definovat fuzzy regulátor jako výrok typu (10), kde jednotlivé $\mathscr{R}_i$ mají závisle na typu regulátoru jeden z těchto tvarů:

regulátor typu P

$$\mathscr{R}_i = \text{JESTLIŽE } e \text{ je } \mathscr{A}_{E,i} \text{ PAK } u \text{ je } \mathscr{A}_{U,i}$$

regulátor typu S

$$\mathscr{R}_i = \text{JESTLIŽE } e \text{ je } \mathscr{A}_{E,i} \text{ PAK } \Delta u \text{ je } \mathscr{A}_{\Delta U,i}$$

regulátor typu PD

$$\mathscr{R}_i = \text{JESTLIŽE } e \text{ je } \mathscr{A}_{E,i} \text{ PAK JESTLIŽE } \Delta e \text{ je } \mathscr{A}_{\Delta E,i} \text{ PAK } u \text{ je } \mathscr{A}_{U,i}$$

regulátor typu PS

$$\mathscr{R}_i = \text{JESTLIŽE } e \text{ je } \mathscr{A}_{E,i} \text{ PAK JESTLIŽE } \Delta e \text{ je } \mathscr{A}_{\Delta E,i} \text{ PAK } \Delta u \text{ je } \mathscr{A}_{\Delta U,i}\,;$$

kde $\mathscr{A}_{U,i}$, $\mathscr{A}_{\Delta U,i}$, $\mathscr{A}_{E,i}$, $\mathscr{A}_{\Delta E,i}$ jsou jazykové výrazy pro aktuální hodnoty po řadě akční veličiny, jejího přírůstku, regulační veličiny a jejího přírůstku. Nejčastěji se pro ně používají výrazy *kladná velká* (KV), *kladná střední* (KS), *kladná malá* (KM), *přibližně nulová* (PN), *záporně malá* (ZM), *záporně střední* (ZS), *záporně velká* (ZV).

Konkrétní hodnoty funkcí příslušnosti jsou zpravidla odhadnuty tak, aby vyhovovaly intuici a byly v souhlase s používanými hodnotami řídících veličin u konkrétního regulátoru (tj. aby byly v souhlase s daným kontextem).

Významy výroků $\mathscr{R}_i$ jsou modelovány pomocí kartézského součinu (11) a vlastní regulace je realizována pomocí kompozičního pravidla úsudku (14). Výsledný algoritmus je deterministický a silně nelineární. Je dosti robustní a často vykazuje oscilace kolem stabilního stavu. Je vhodné ho použít tehdy, je-li řízený proces příliš složitý, matematicky nedostatečně popsaný, nebo když implementace klasického regulátoru by byla příliš náročná.

Fuzzy regulátor má již řadu konkrétních aplikací. Byl navržen např. pro řízení lodi, řízení koncentrace metanu v dole, řízení křižovatky, řízení výroby cementu v cementářské peci aj. V ČSSR je zkoušen při řízení sušení řeziva a řízení pecní linky na výrobu portlandského slínku. Dosavadní výsledky jsou až překvapivě dobré.

4. MODELOVÁNÍ ROZHODOVACÍCH PROCESŮ

V situacích, kdy je průběh a výsledek rozhodovacího procesu ovlivněn náhodnými faktory, se dosud používají stochastické modely rozhodování. Je-li naproti tomu sama rozhodovací situace vágně vymezena, ať již jde o neurčitou definici množiny přípustných variant nebo neurčité rozhodovatelovy preference na této množině, zdá se vhodnější využít při modelování takové situace aparát teorie fuzzy množin. Rozvoj aplikací této teorie při modelování rozhodovacích procesů probíhá ve třech hlavních směrech: užití fuzzy preferenčních relací, přístupy fuzzy optimalizace a rozhodovací modely, v nichž hlavní roli hraje jazyková proměnná. Dále se krátce zmíníme o prvních dvou.

4.1 Fuzzy optimalizace

Pojem fuzzy optimalizace (optimalizace ve fuzzy prostředí) byl zaveden v práci [1]. Podstatou je nalezení takové varianty, která vyhovuje zadaným fuzzy omezením a co nejlépe splňuje dané fuzzy cíle.

Fuzzy cílem G na množině variant rozhodování nazýváme fuzzy množinu $G \lesssim X$. Funkci příslušnosti G lze v jistém smyslu ztotožnit s preferenční funkcí umožňující uspořádat danou množinu variant. Je totiž přirozené preferovat variantu x před y právě tehdy, je-li $Gx > Gy$. Tato preferenční funkce umožňuje ovšem uspořádat pouze množinu $\mathrm{Supp}(G) \subseteq X$. Analogicky se definuje fuzzy omezení C jako fuzzy množina $C \lesssim X$. Pak fuzzy rozhodnutí definujeme jako fuzzy množinu $D = G \cap C$. Je-li zadáno m cílů $G_1, \ldots, G_m$ a n omezení $C_1, \ldots, C_n$, pak fuzzy rozhodnutí bude

$$D = G_1 \cap \ldots \cap G_m \cap C_1 \cap \ldots \cap C_n .$$

Chceme-li při praktické aplikaci pouze jedinou variantu, pak obvykle vybíráme variantu $x_0 \in X$, pro niž platí

$$Dx_0 = \max_{x \in X} Dx$$

(tzv. *optimální rozhodnutí*). Úlohou fuzzy optimalizace zpravidla rozumíme úlohu nalezení optimálního rozhodnutí.

Jeden z příkladů aplikace fuzzy optimalizačních postupů je uveden v práci [10]. Původně zadaná soustava nekonzistentních omezení je nahrazena soustavou fuzzy omezení, která se řeší jako úloha *fuzzy programování*. Optimálním rozhodnutím je řešení, které v jistém smyslu nejméně porušuje původní soustavu ne-fuzzy omezujících podmínek.

4.2 Fuzzy preferenční relace

Fuzzy preferenční relací rozumíme fuzzy binární relaci na množině variant X, tj. fuzzy množinu $R \lesssim X \times X$. Hodnotu funkce příslušnosti R přiřazenou dvojici variant $\langle x, y \rangle$ interpretujeme jako stupeň preference varianty x před variantou y.

Fuzzy preferenční relace se ukazují jako zvláště vhodný prostředek k modelování vícekriteriálních rozhodovacích situací, kdy zdrojem neurčitosti rozhodovatelových preferencí je skutečnost, že se uvažuje více než jedno hledisko a uvažovaná hlediska mohou být více či méně v rozporu. Máme-li na množině variant zadáno $m > 1$ klasických preferenčních relací R_i vyjadřujících preference podle jednotlivých hledisek a je-li relativní důležitost těchto hledisek vyjádřena pomocí čísel (vah – viz např. [16]) $p_i \geqq 0$, je možné souhrnné preference vyjádřit fuzzy relací $R \subsetsim X \times X$ danou předpisem

$$R\langle x, y\rangle = \sum_{i \in I_{xy}} p_i / \sum_{i=1} p_i ,$$

kde $I_{xy} = \{i; xR_iy\}$. Pro účely praktického rozhodování je pak obvykle třeba tuto fuzzy preferenční relaci vhodně aproximovat relací umožňující uspořádat varianty a vybrat z nich buď nejlepší variantu nebo alespoň množinu „efektivních" variant. Takové aproximující relace je možné konstruovat různými způsoby (viz např. [4, 5]).

5. ZÁVĚR

V tomto příspěvku jsme krátce vyložili pojmy teorie fuzzy množin a nastínili způsob, jak je teorie v praxi aplikována. Nejzajímavější aplikace se týkají modelování a řízení složitých systémů, rozhodování, lineárního programování a některých oborů umělé inteligence, zejména rozpoznávání obrazců, porozumění přirozenému jazyku, logickému usuzování a expertních systémů.

Teorie fuzzy množin představuje organické spojení lingvistického a matematického modelování. Proto je velmi lákavá pro nejrůznější aplikace. Zároveň nabízí řadu problémů, které jsou zajímavé jak z matematického, tak z filozofického hlediska. Vzhledem k tomu, že se dotkla základního pojmu matematiky, kterým je pojem množiny, dotkla se prakticky celé matematiky a veškerých jejích aplikací. Proto se neubráníme záplavě prací nejrůznější úrovně, které často pouze rozmělňují předmět do neúnosné šíře, aniž by hlouběji studovaly vztahy a souvislosti uvnitř teorie. V současné době však už počáteční nadšení přechází ve střízlivý pohled a celá teorie je podrobována vážnému studiu.

Závěrem ještě podotkněme, že problematika matematického postižení vágnosti je teprve na začátku svého rozvoje. Fuzzy množiny jsou nejznámějším a nejslibnějším prostředkem na této cestě. Existují však i jiné prostředky. Z československých výsledků si zaslouží pozornost tzv. *alternativní teorie množin* [19]. Zatímco teorie fuzzy množin ve své podstatě z klasické teorie množin nevybočuje, představuje alternativní teorie množin radikální zásah do soudobých představ v matematice.

Literatura

[1] BELLMAN, R., ZADEH, L. A.: *Decision-making in a fuzzy environment.* Management Science, *17* (1970), č. 4

[2] BORISOV, A. N. a kol.: *Modeli prinjatija rešenij na osnove lingvističeskoj peremennoj.* Riga, Zinatne 1982.

[3] BRAAE, M., RUTHERFORD, M. A.: *Theoretical and Linguistic Aspects of the Fuzzy Logic Controller.* Automatica, *15* (1979), 553

[4] ČERNÝ, M., GLÜCKAUFOVÁ, D., TOMS, M.: *Metody komplexního vyhodnocování variant.* Praha, Academia 1980.

[5] ČERNÝ, M., GLÜCKAUFOVÁ, D.: *Vícekriteriální vyhodnocování v praxi.* Praha, SNTL 1982.

[6] ČERNÝ, M., GLÜCKAUFOVÁ, D.: *Využití mlhavých množin při rozhodování podle více hledisek.* Ekonomicko-matematický obzor *14* (1978), č. 1
[7] DUBOIS, D., PRADE, H.: *Fuzzy Sets and Systems. Theory and Applications.* Academic Press, New York 1980.
[8] GAINES, B. R., KOHOUT, L., J.: *The fuzzy decade: a bibliography of fuzzy systems and closely related topic.* Int. J. of Man-Mach. Stud. *9* (1977), 1.
[9] MAMDANI, E. H., GAINES, B. R.: *Fuzzy Reasoning and its Applications.* Academic Press, London 1981.
[10] NEGOITA, C. V., SULARIA, M.: *On fuzzy mathematical programming and tolerances in planning.* Econ. Comput. Econ. Cybern. Stud. Res., *1* (1976), 3.
[11] NEGOITA, C. V., RALESCU, D. A.: *Application of Fuzzy Sets to System Analysis.* Birkhäuser Verlag, Stuttgart 1975.
[12] NEKOLA, J. VRBA, J.: *Modelování inovačního procesu za neurčitosti.* Pracovní skupina pro efektivnost VTR. Min. výst. a techniky ČSR, Praha 1981.
[13] NEKOLA, J., VRBA, J.: *Hodnocení efektivnosti projektů vědeckotechnického rozvoje s použtiím techniky mlhavých množin.* Chemický průmysl, *32* (1982), 325.
[14] NOVÁK, V.: *Fuzzy množiny a jejich aplikace.* Vyjde v nakladatelství SNTL Praha.
[15] NOVÁK, V.: *Fuzzy Sets — The Approximation of Semisets.* Fuzzy Sets and Systems (k publikaci).
[16] NOVÁK, V.: *Určení vah veličin pomocí kalkulu fuzzy množin.* Ekonomicko-matematický obzor *16* (1980), 1.
[17] NOVÁK, V.: *Využití fuzzy množin při prezentaci informací.* Informačné systémy, *6* (1977), 519.
[18] PAVELKA, J.: *On Fuzzy Logic I, II, III.* Zeitschrift f. math. Logii u. Grundl. d. Math., *25* (1979), 45, 119, 447.
[19] VOPĚNKA, P.: *Mathematics in the Alternative Set Theory.* Teubner-Texte zur Mathematik. Leipzig 1979.
[20] ZADEH, L. A.: *The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning I, II, III.* Inf. Sci. *8* (1975), 199, 301, *9* (1975), 43. Rusky také Mir, Moskva 1976.
[21] ZADEH, L. A.: *Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes.* IEEE Trans. Syst. Man. Cybern., *1* (1973), 28.
[22] ZADEH, L. A.: *Fuzzy Sets.* Inf. Control *8* (1965), 338.

Matematika je schopna odhalit mezery v přírodovědeckých představách a znalostech, a to je bezpochyby pro přírodní vědy velmi cenné. Sestrojování matematických modelů totiž odhaluje disharmonii, nerovnoměrnost či jednostrannost v rozvíjení empirických znalostí. Například v oborech, jako je fyziologie, nauka o ontogenezi, biogeocenologie, ale i teorie evoluce a nauka o biosféře vůbec, se daleko víc pozornosti věnuje studiu struktur a jejich složek než studiu jejich činnosti, funkce a vzájemného působení. Přitom pro praxi je důležité objasnit právě funkci struktur.

Není daleko doba, kdy se v běžných demografických dotaznících bude vedle základního vzdělání uvádět i údaj, zda člověk dovede pracovat s počítači. Děti, které dnes chodí do školy, budou už pracovat v době, kdy mistr v továrně, ale možná i každý kvalifikovaný dělník bude denně zacházet s nejrůznějšími automaty. Je nesmírná chyba, jestliže na to naši mládež nepřipravujeme. Budoucnost lidstva, obranyschopnost státu a další technický pokrok v podstatě přímo závisí na tom, do jaké míry se široké masy pracujících naučí zacházet s elektronickými automaty a výpočetní technikou. Jaké problémy to přinese a jak by se na to lidé měli připravovat a školit, to jsou otázky pro současnou filozofii.

N. I. Karpova.