Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Donald E. Knuth

Nadreálná čísla [Pokračování]

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 23 (1978), No. 4, 187--196

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/138565`

Nadreálná čísla

Povídka o tom, jak dva bývalí studenti matematiky skrze matematiku ke štěstí došli

Donald E. Knuth, Stanford, California, USA)*

9. Odpověď

A. Bille, spíš?

B. Už ne, ale jsem celý rozlámaný, to byla hrozná noc. V hlavě se mi pořád něco honilo a já jsem se převracel a různě kroutil ... Zdálo se mi, že jsem v jednom kuse něco logicky odvozoval a dokazoval, a když jsem se probudil, byly to samé nesmysly.

A. Tak nevím, jestli nám ta matematika skutečně prospívá. Včera to bylo moc fajn, ale ...

B. (ji přeruší) Jo, včera jsme se cítili, ale dneska dopadneme tvrdě. Pořád to z toho nemohu dostat, nebudu mít pokoj, dokud nebudeme mít další výsledky. Kde je tužka?

A. Neměl byses napřed trochu nasnídat? Je tu pár meruněk a fíků.

B. Dobře, ale hned potom se do toho pustím.

A. Já jsem taky zvědavá, jak to všechno dopadne, ale Bille, prosím tě, slib mi jednu věc.

B. Jakou?

A. Že budeme dneska dělat jenom sčítání a odčítání, ale násobení necháme. Vůbec se na něj ani nepodíváme.

B. To ti klidně slíbím. Sám za sebe si skoro přeju odložit násobení na neurčito, protože mi připadá strašně komplikované.

A. (ho líbá) Dobře a teď odpočívej.

B. (se protahuje) Jsi na mě moc hodná, Alice.

A. To už je mnohem lepší. V noci jsem přemýšlela o problému, který jsi vyřešil včera ráno. Myslím, že to je důležitá věc, kterou bychom měli zapsat jako větu. Snad nějak takhle:

Nechť je dáno libovolné číslo y a nechť x je nejstarší číslo s tou vlastností, že

$$Y_L < x \text{ a } x < Y_P, \text{ pak platí } x \equiv y\,. \tag{T8}$$

B. Myslím, že je to skutečně ono. Pojď zkusit, jestli se nám podaří rekonstruovat důkaz v téhle nové symbolice. Jestli se dobře pamatuju, zkonstruovali jsme číslo $z =$

*) Pokračování překladu knížky D. E. KNUTHA *Surreal Numbers*, která vyšla v roce 1974 v nakladatelství Addison-Wesley. První dvě části překladu vyšly v číslech 2 a 3, zbývající část překladu vyjde v 5. čísle tohoto ročníku. Přeložila HELENA NEŠETŘILOVÁ.

$(Y_L \cup X_L, X_P \cup Y_P)$ a potom jsme podle (T7) dostali $x \equiv z$. Na druhé straně víme, že žádný prvek x_L z X_L nesplňuje $Y_L < x_L$, protože x_L bylo stvořeno před x, a tedy podle (T4) je každé $x_L \leqq$ než nějaké y_L. Proto $X_L < y$ a stejně $y < X_P$. Takže podle (T7) je $y \equiv z$. To se nám to teď dokazuje, když už máme k dispozici takovouhle zásobu výsledků.

A. Líbí se mi, že (T8) zjednodušuje všechny výpočty, které jsme dělali včera večer. Když jsme třeba počítali $b + b = (\{b\}, \{b + 1\})$, byli bychom si hned mohli uvědomit, že 1 je nejstarší číslo mezi b a $b + 1$.

B. Tak já to zkusím pro $c + c$: to bude nejstarší číslo mezi $b + c$ a $1 + c$, což je $b + 1$, vlastně $1\frac{1}{2}$, takže c jsou $\frac{3}{4}$. To je pro mne překvapení, myslel jsem si, že c budou $\frac{2}{3}$.

A. A d je $\frac{1}{4}$.

B. Přesně tak.

A. Takže obecný předpis se už začíná rýsovat: Čísla $\geqq 0$ stvořená po prvních čtyřech dnech jsou

$$0,\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{3}{4},\ 1,\ \tfrac{3}{2},\ 2,\ 3$$

a po pěti dnech to pravděpodobně budou...

B. (ji přeruší)

$$0,\ \tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{3}{8},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{5}{8},\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{7}{8},\ 1,\ \tfrac{5}{4},\ \tfrac{3}{2},\ \tfrac{7}{4},\ 2,\ \tfrac{5}{2},\ 3,\ 4\,.$$

A. Přesně tak. Umíš to dokázat?

B. .....

Ano, ale nejde to tak jednoduše, jak jsem si myslel. Když jsem například zjišťoval hodnotu $f = (\{\frac{3}{2}\}, \{2\})$, která, jak se později ukázalo, je $\frac{7}{4}$, hledal jsem nejprve hodnotu součtu $f + f$. Tenhle součet je roven nejstaršímu číslu mezi 3 a 4 a tak jsem si musel „odskočit do budoucnosti“, abych zjistil, že je to $\frac{7}{2}$. Myslím si, že náš obecný předpis je správný, ale byl bych mnohem spokojenější, kdyby se nám to podařilo dokázat.

A. Vzpomeň si Bille, že hodnotu $\frac{3}{2}$ ze čtvrtého dne jsme spočítali jako $1 + \frac{1}{2}$, nemuseli jsme sčítat $\frac{3}{2} + \frac{3}{2}$. Možná, že přičítání 1 by to spravilo.

B. Tak to zkusme, pravidlo (3) definuje

$$1 + x = ((1 + X_L) \cup \{x\},\ 1 + X_P)$$

za předpokladu, že $0 + x = x$. Neplatí vlastně, že ... no jo, pro kladná čísla se dá vždycky vybrat X_L tak, že $1 + X_L$ obsahuje prvek $\geqq x$, takže můžeme jednoduše psát

$$1 + x = (1 + X_L,\ 1 + X_P)\,.$$

A. To je ono, Bille. Podívej se na posledních osm čísel z pátého dne, vždycky jsou právě o jedničku větší než čísla ze čtvrtého dne.

B. Krásně nám to souhlasí, teď už tedy stačí ověřit náš postup pro čísla x mezi 0 a 1..., ale to se dá pokaždé udělat uvážením $x + x$, které je vždycky menší než 2.

A. Ano, náš postup je správný, teď už je to vidět.

B. To mi spadl kámen ze srdce. Dokonce už si ani nepotřebuju celý důkaz formalizovat, já vím, že je správný.

A. Bille, není náhodou naše pravidlo pro $1 + x$ jenom speciálním případem nějakého obecnějšího pravidla? Neplatí například, že

$$y + x = (y + X_L, y + X_P)\ ?$$

Tohle by bylo mnohem jednodušší než Conwayovo pravidlo.

B. Zní to dost logicky, protože přičtením y by se všechno mělo „posunout" o y jednotek. Vlastně ne, vezmi si $x = 1$, tvoje pravidlo by říkalo, že $y + 1$ je $(\{y\}, \emptyset)$, což ale neplatí pro $y = \frac{1}{2}$.

A. Promiň, máš pravdu. Vlastně tvoje pravidlo pro $1 + x$ taky neplatí pro $x = 0$.

B. Ano, dokázal jsem ho jenom pro kladná x.

A. Asi bychom se měli pořádně zamyslet nad pravidlem (3), které definuje sčítání. Pokusme se zjistit, co se z něho dá dokázat obecně. Zatím máme jenom jména čísel a ta musí být správná, pokud se ovšem Conwayova čísla chovají jako skutečná čísla. Pořád ale ještě nevíme, jestli Conwayova pravidla jsou stejná jako pravidla pro počítání s normálními čísly. Navíc mě to docela baví, podívej, jakou spoustu věcí se nám podařilo dokázat jen z několika málo pravidel.

B. Můžeme to zkusit. Tak za prvé: sčítání má zcela zřejmě vlastnost, které říkáme komutativní, to znamená, že

(T9) $$x + y = y + x\,.$$

A. Ano. A zkusme ještě dokázat to, co tvrdí Conway, že totiž

(T10) $$x + 0 = x\,.$$

B. Příslušné pravidlo říká, že

$$x + 0 = (X_L + 0, X_P + 0)\,.$$

Teď už stačí použít zase indukci podle „dnů stvoření". Můžeme totiž předpokládat, že $X_L + 0$ je totéž jako X_L a $X_P + 0$ je X_P, protože všechna tahle čísla byla stvořena před x. Q.E.D.

A. Nedokázali jsme vlastně, že $x + 0 \equiv x$, ne $= x$?

B. Ty jsi ale puntičkář. Jestli chceš, tak na tvé přání (T10) změním, protože ve skutečnosti v tom není žádný rozdíl. Ale počkej, vždyť je přímo z důkazu vidět, že číslo $x + 0$ je identicky tatáž dvojice množin jako číslo x.

A. Moc se omlouvám, máš pravdu.

B. Tak tím bychom měli deset vět. Nepustíme se hned do dalších, když nám to tak jde?

10. Věty

A. Co třeba asociativní zákon

$$\text{(T11)} \qquad (x + y) + z = x + (y + z).$$

B. Pochybuji, že ho budeme potřebovat, ve výpočtech jsme na něj ještě nikde nenarazili. Nic nám to ale neudělá, když ho zkusíme dokázat. Můj učitel matematiky si například vždycky myslel, že je to veliká věc. Tak prosím, dáme si jeden asociativní zákon. Mohla bys sestavit definici?

A.
$$(x + y) + z = (((X_L + y) + z) \cup ((Y_L + x) + z) \cup (Z_L + (x + y)),$$
$$((X_P + y) + z) \cup ((Y_P + x) + z) \cup (Z_P + (x + y)))$$
$$x + (y + z) = ((X_L + (y + z)) \cup ((Y_L + z) + x) \cup ((Z_L + y) + x),$$
$$(X_P + (y + z)) \cup ((Y_P + z) + x) \cup ((Z_P + y) + x)).$$

B. No jo, v zašmodrchaných vzorcích tě nikdo nepřekoná. Proboha, ale jak se dá dokázat, že tyhle dvě příšernosti se navzájem rovnají?

A. Nebude to tak hrozné, na (x, y, z) zase použijeme náš trik se součtem dnů a bude to. Podívej, $(X_L + y) + z = X_L + (y + z)$, protože (x_L, y, z) má menší součet dnů než (x, y, z) a na to už můžeme použít indukci. Pro ostatních pět množin se dá postupovat úplně stejně, a to tak, že se v některých případech použije komutativní zákon.

B. Já ti gratuluju, znova Q.E.D. a znova důkaz $=$ místo $\equiv$.

A. Trochu mi dělá starost tohle $\equiv$. Dokázali jsme záměnnost prvků, které jsou jeden „jako" druhý v relacích $<$ a $\leqq$, ale neměli bychom to ověřit taky pro sčítání? Třeba takhle:

$$\text{(T12)} \qquad \text{Je-li} \quad x \equiv y, \quad \text{potom} \quad x + z \equiv y + z.$$

B. To bychom asi měli, jinak bychom totiž, přesně vzato, nesměli dělat to zjednodušení, kterého se dopouštíme při pojmenovávání čísel. Pojď, zkusíme to hned dokázat.

A. Mohli bychom vlastně dokázat silnější tvrzení:

$$\text{(T13)} \qquad \text{je-li} \quad x \leqq y, \quad \text{pak} \quad x + z \leqq y + z,$$

důkaz (T12) by z něho potom okamžitě plynul.

B. Aha, x je totiž $\equiv y$ tehdy a jen tehdy, je-li $x \leqq y$ a $y \leqq x$. Připadá mi, že (T13) se nám bude moc hodit. Neměli bychom třeba dokázat ještě víc,

$$\text{je-li} \quad x \leqq y \quad \text{a} \quad w \leqq z, \quad \text{pak i} \quad x + w \leqq y + z\,?$$

A. Tohle přece vyplývá z (T13), protože

$$x + w \leqq y + w = w + y \leqq z + y = y + z.$$

B. To je dobře, protože (T13) je jednodušší.
Ty jsi expert na vzorečky, čemu je ekvivalentní (T13)?

A. Nechť $X_L < y$ a $x < Y_P$, pak musíme dokázat, že

$$X_L + z < y + z\,, \quad Z_L + x < y + z\,, \quad x + z < Y_P + z$$
$$\text{a} \quad x + z < Z_P + y\,.$$

B. To bude zase další indukce podle součtu dnů, viď? Už to začíná být nějak moc snadné.

A. Tentokrát to tak snadno nepůjde. Bojím se, že indukcí dostaneme jenom $X_L + z \leqq y + z$ atd., mohlo by se totiž stát, že $x_L < y$ a přitom $x_L + z \equiv y + z$.

B. No jo, to je zajímavé. Potřebujeme tedy obrácené tvrzení:

(T14) Je-li $x + z \leqq y + z$, pak $x \leqq y$.

A. Fajn. A to tvoje obrácení je ekvivalentní tomuhle:
Nechť $X_L + z < y + z$, $Z_L + x < y + z$, $x + z < Y_P + z$ a $x + z < Z_P + y$, pak je třeba dokázat, že $X_L < y$ a $x < Y_P$.

B. Hm, obrácené tvrzení by šlo dokázat indukcí až na to, že může nastat případ, kdy řekněme $x_L + z < y + z$ a současně $x_L \equiv y$. Tyhle případy vylučuje (T13), ale...

A. Ale my potřebujeme (T13), abychom dokázali (T14) a (T14) abychom dokázali (T13). A (T13) k důkazu (T12).

B. Proboha, už se zase motáme v kruhu.

A. Neboj se, existuje způsob, jak z toho ven, dokážeme obojí současně. Spojené tvrzení „(T13) a (T14)“ můžeme dokázat indukcí podle součtů dnů pro (x, y, z).

B. (září) Alice, ty jsi geniální! Báječná, úžasná a geniální!

A. Ne tak rychle, ještě pořád budeme mít co dělat. Co kdybychom radši dokázali, že

(T15) $$x - x \equiv 0\,.$$

B. Co tam dělá to minus? Conwayovo pravidlo pro odčítání jsme ještě ani nezapsali.

A. $x - y = x + (-y)$.

B. Vidím, že v (T15) píšeš $\equiv$, dobře děláš, protože je jasné, že $x + (-x)$ se s výjimkou případu, kdy x je 0, nerovná nule identicky, tedy nemá prázdnou současně levou i pravou množinu.

A. Pravidla (3), (4) a (5) říkají, že (T15) je ekvivalentní s tímhle:

$$((X_L + (-x)) \cup ((-X_P) + x)\,, \quad (X_P + (-x)) \cup ((-X_L) + x)) \equiv 0\,.$$

B. Ach jo, moc jednoduše to nevypadá. Jakpak vůbec dokážeme, že něco $\equiv 0$...
Protože 0 byla stvořená první, a je tedy nejstarší, je podle (T8) $y \equiv 0$ tehdy a jen tehdy, je-li $Y_L < 0$ a $0 < Y_P$.

A. Stejné tvrzení plyne taky okamžitě z pravidla (2):
$y \leqq 0$ tehdy a jen tehdy, je-li $Y_L < 0$ a $0 \leqq y$ tehdy a jen tehdy, je-li $0 < Y_P$. Takže teď musíme dokázat, že

$$X_L + (-x) < 0 \quad \text{a} \quad (-x_P) + x < 0\,,$$
$$x_P + (-x) > 0 \quad \text{a} \quad (-x_L) + x > 0\,,$$

pro všechna x_L z X_L a pro všechna x_P z X_P.

B. Nemohli bychom náhodou předpokládat, že $x_L + (-x_L) \equiv 0$ a $x_P + (-x_P) \equiv 0$?

A. Mohli, protože (T15) se dá dokazovat indukcí.

B. V tom případě je to hotové. Kdyby totiž bylo $x_L + (-x) \geqq 0$, pak by $(-X)_P + x_L$ bylo podle definice >0. Ale $(-X)_P$ je $-(X_L)$, obsahuje tedy $-x_L$ a $(-x_L) + x_L$ není >0. Proto $x_L + (-x)$ musí být <0 a stejným způsobem se dají dokázat taky ostatní případy.

A. To se ti moc povedlo, (T15) jsme už tedy dokázali.

B. A co dál?

A. Třeba tohle

(T16) $$-(-x) = x\,.$$

B. To je triviální. A dál?

A. Napadá mě jenom Conwayova věta

(T17) $$(x + y) - y \equiv x\,.$$

B. Čemu je to ekvivalentní?

A. To je ale blázinec ... copak nemůžeme věci dokazovat bez toho, že bychom se vždycky museli vracet k definici?

B. No vidíš, tohle půjde skoro samo:

$$\begin{aligned}
(x + y) - y &= (x + y) + (-y) && \text{podle (5)}\\
&= x + (y + (-y)) && \text{podle (T11)}\\
&= x + (y - y) && \text{podle (5)}\\
&\equiv x + 0 && \text{podle (T12) a (T15)}\\
&= x && \text{podle (T10).}
\end{aligned}$$

No prosím, už máme zase spoustu užitečných výsledků, dokonce i ten asociativní zákon se nám při tom hodil. Dobře, žes ho proti mně prosadila.

A. Tím jsme, zdá se, vyčerpali všechny možnosti pro sčítání, tvoření záporu a odčítání. Je tu ještě několik věcí, které by se pravděpodobně daly dokázat, jako například

(T18) $$-(x + y) = (-x) + (-y)\,,$$

(T19) $$\text{je-li} \quad x \leqq y\,, \quad \text{pak} \quad -y \leqq -x\,,$$

ale mně připadá, že v nich žádná nová myšlenka nebude. Pokud je nikde nebudeme potřebovat, tak snad ani nemá cenu, abychom je dokazovali.

B. Páni, devatenáct vět, které jsme dostali jen z několika primitivních pravidel.

A. Bille, vzpomeň si, co jsi mi slíbil, dneska už žádná matematika a odpoledne si uděláme prázdniny. Nechci, aby se ti zase špatně spalo kvůli nějakému příšernému násobení.

B. Dneska jsme skutečně udělali kus práce, viď? Přinejmenším se nám podařilo vyřešit všechny problémy.
Podívej, právě je příliv, tak Alice, když nebudeš první ve vodě, budeš vařit večeři.

11. Nabídka k sňatku

A. Udělal jsi hrozně dobrou večeři.

B. (si lehá vedle ní) To bylo hlavně tím, že jsi chytila čerstvou rybu.
Na copak zrovna myslíš?

A. (zčervená) No ... vlastně ... přemýšlela jsem, co by se stalo, kdybych přišla do jiného stavu.

B. Ty myslíš ..., že tady, blízko pásu plodnosti ...?

A. To je legrace, dali jsme si tolik práce, abychom dokázali, že $1 + 1 = 2$ a nakonec zjistíme, že $1 + 1 = 3$.

B. Jedna nula pro tebe a už žádné další vtipy.
Ale pojď o tom přemýšlet, Conwayova pravidla pro čísla mi připadají jako kopulace, jako že když se spojí levá a pravá množina...

A. Bille, vždyť ty dokážeš myslet jenom na jednu..., vlastně na dvě ... věci. Mluv chvíli vážně, co uděláme, když budu skutečně těhotná?

B. No, stejně jsem si už říkal, že bychom to tu měli brzo zabalit a vrátit se domů. Peníze nemáme a počasí už taky za nic nestojí a ať už jsi v jiném stavu nebo nejsi, docela rád bych si tě vzal ... jestli mě ovšem budeš chtít.

A. Jsem moc ráda, že máme oba stejný pocit. Tahle cesta mě přesvědčila, že bychom mohli přemýšlet i o něčem trvalejším. Co myslíš, Bille ... naučíme svoje děti naši číselnou teorii?

B. Proč? Určitě je bude víc bavit, když na ni přijdou sami.

A. Ale člověk přece nemůže na všechno přijít sám, musí v tom mít nějakou rovnováhu.

B. Nepřipadá ti, že když se něco učíš, vlastně to sama pro sebe znova objevuješ? Nejlepší učitelé přece vždycky pomáhají svým studentům, aby se naučili přemýšlet sami.

A. No jistě, svým způsobem máš pravdu, ale to už je tak trochu filozofování.

B. Je mi z té hloupé matematiky tak dobře, že tomu ani věřit nemůžu. Kdysi jsem ji strašně nesnášel a teď mě dokáže vyloženě nadchnout.

A. Taky mi dává dobrý pocit. Připadá mi o moc lepší než drogy, mozek se ti stimuluje sám a přirozeně.

B. Kromě toho byl taky prokázán pozitivní vliv na sexualitu.

A. (pozoruje hvězdy) To, co jsme dneska dokázali, nebude nikdy k ničemu, nikdo z toho nemůže udělat bombu nebo něco takového a víš, to se mi na čisté matematice taky líbí.

B. No ano, ale člověk nemá před světem utíkat. Podívej, co je na něm problémů, a ty je můžeš pomoct vyřešit, když pro ně najdeš ten druh matematiky, která se pro ně hodí. Víš, už jsme asi dlouho nečetli noviny, a proto jsme na všechny problémy zapomněli.

A. Asi jo, až z toho mám někdy špatný pocit. Možná máš pravdu, když říkáš, že správný druh matematiky může pomoct takové problémy řešit, když já se spíš bojím, že se to dá taky zneužít.

B. To je právě ten paradox, to dilema. Nic se nedá udělat bez nástrojů, ale nástroje se bohužel dají použít k špatnému účelu stejně jako k dobrému. Přestaneme-li tvořit věci proto, že by se mohli dostat do špatných rukou a škodit, přestaneme tím taky dělat věci, které jsou užitečné.

A. Já uznávám, že čistá matematika nedává odpověď na všechno. Ale snad ji nechceš zavrhnout jenom proto, že neřeší všechny světové problémy?

B. To jsme si asi špatně rozuměli. Přesvědčil jsem se tady, že čistá matematika je velice krásná. Je to druh umění stejně jako poezie, malířství nebo hudba a dokáže nás taky stejně nadchnout. Člověku je přirozená zvědavost a taky tuhle naši potřebu je třeba uspokojit. I když život není vzdycky legrace, člověk v něm má nacházet taky jeho veselejší, zábavnější stránku.

A. Je to fajn, Bille, že o tom všem s tebou mohu mluvit.

B. Vždyť já jsem taky rád, cítím, že jsem ti blízko a naplňuje mě to takovým zvláštním klidem.

12. Katastrofa

B. Alice, spíš?

A. Nespím, vzbudila jsem se asi před hodinou a přemýšlím. Představ si Bille, že to, co jsme včera dokázali, má jeden veliký nedostatek.

B. To není možné!

A. Bohužel. Zapomněli jsme dokázat, že $x + y$ je číslo.

B. To je nesmysl, součet dvou čísel přece musí být číslo.
Aha, už to vidím ... musíme ověřit, je-li splněno pravidlo (1).

A. Ano, definice sčítání nebude mít smysl, dokud nedokážeme, že

$$X_L + y < X_P + y \quad \text{a} \quad X_L + y < Y_P + x \quad \text{a}$$
$$Y_L + x < X_P + y \quad \text{a} \quad Y_L + x < Y_P + x\,.$$

B. To by vyplývalo z (T13) a (T14) ... aha, už vím, jak to myslíš. Při důkazu (T13) a (T14) jsme vlastně mlčky předpokládali, že součet dvou čísel je číslo. Jak tě ten problém vůbec napadl?

A. To je docela zajímavé. Přemýšlela jsem, co by se stalo, kdybychom sčítání definovali takhle:

$$x \oplus y = (X_L \oplus Y_L,\ X_P \oplus Y_P).$$

Použila jsem označení $\oplus$, protože nebylo jasné, jestli to bude totéž jako $+$. Operace $\oplus$ je komutativní a asociativní, to je vidět na první pohled, proto mě začalo zajímat, co z toho nakonec bude.

B. Máš pravdu, součet x a y leží mezi $X_L + Y_L$ a $X_P + Y_P$. Tahle definice by mohla být jednodušší než Conwayova.

A. To jsem si říkala taky, ale moje naděje se brzo rozplynuly, zjistila jsem totiž, že

$$0 \oplus x = 0$$

pro všechna x.

B. Tak by $\oplus$ mohlo znamenat třeba násobení.

A. Jenže já jsem ještě dokázala, že $1 \oplus x = 1$ pro všechna $x > 0$ a $2 \oplus x = 2$ pro všechna $x > 1$ a $3 \oplus x = 3$ pro všechna $x > 2$ a...

B. Aha, takže pro všechna celá kladná čísla m a n je $m \oplus n$ rovno minimu z m a n. Navíc je to komutativní a asociativní. Mně ta tvoje operace $\oplus$ přece jenom připadá zajímavá.

A. Ano a $\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Ale pak jsem zkusila $(-\frac{1}{2}) \oplus \frac{1}{2}$ a úplně jsem se zhrozila.

B. Cože? $(-\frac{1}{2}) \oplus \frac{1}{2} = (\{(-1) \oplus 0\}, \{0 \oplus 1\})$, to je $(\{0\}, \{0\})$.

A. Jenomže $(\{0\}, \{0\})$ není číslo, protože nesplňuje pravidlo (1).

B. Tvoje definice $\oplus$ nebyla tedy v pořádku.

A. To nebyla, a tak jsem si uvědomila, že definici si nemůžeš vymyslet úplně libovolně. U každé definice musíš vždycky ověřit, jestli souhlasí s ostatními pravidly. Další problém s $\oplus$ byl ten, že například $(\{-1\}, \emptyset) \equiv 0$, ale $(\{-1\}, \emptyset) \oplus 1 \not\equiv 0 \oplus 1$.

B. Dobře, $\oplus$ tedy vynecháme, ale snad spolu dáme dohromady skutečnou definici $+$.

A. To nevím, všechno, co jsem vymyslela, jsem ti už řekla. Vlastně všechno kromě pseudočísel.

B. Pseudočísel?

A. Předpokládejme, že vytvoříme (X_L, X_P), kde X_L nemusí být vždycky menší X_P. Mezi takovými pseudočísly se ještě pořád dá použít pravidlo (2) k definování vztahu $\leqq$.

B. Aha ... takže $(\{1\}, \{0\})$ by bylo menší než 2.

A. Ano. A teď jsem si zrovna všimla, že při důkazu tranzitivního zákona jsme nikde nepoužili $\ngeq$ z pravidla (1). Tranzitivní zákon by tedy platil pro pseudočísla taky.

B. Máš pravdu, vzpomínám si, jak jsem říkal, že pravidlo (1) jsme v plném rozsahu před (T2) nikde nepotřebovali. Připadá mi, že už je to tak dávno.

A. A teď se připrav na menší šok: pseudočíslo $(\{1\}, \{0\})$ není ani $\leqq 0$ ani $\geqq 0$.

B. Nepovídej!

A. No ano, je to tak. Myslím, že se mi podaří dokázat, že $(\{1\}, \{0\})$ je $\leqq$ než číslo y tehdy a jen tehdy, je-li $y > 1$ a že je $\geqq$ než číslo x tehdy a jen tehdy, je-li $x < 0$, ale s žádným číslem mezi 0 a 1 se co do velikosti srovnávat nedá.

B. Kde je tužka? Musím si to zkusit ... asi budeš mít pravdu. Víš, připadá mi legrační dokazovat něco o veličinách, které vlastně vůbec neexistují.

A. Pseudočísla přece neexistují o nic míň než Conwayova čísla. Asi chceš říct, že teď dokazujeme něco o veličinách, které jsou uměle vytvořené a nemají ve skutečném světě žádný protějšek, který by mohl být pomůckou k jejich pochopení. Vzpomeň si, že $\sqrt{-1}$ kdysi považovali za neskutečné (imaginární) číslo a nikdo taky ani nepředpokládal, že by $\sqrt{2}$ byla rozumná (racionální).

B. Conwayovo pravidlo pro sčítání normálních čísel naznačuje taky možnost sčítat pseudočísla. K čemu by to asi vedlo? Je-li $x = (\{1\}, \{0\})$, pak $1 + x$ je ... $(\{2\}, \{1\})$.

A. A $x + x$ je $(\{1 + x\}, \{x\})$, pseudočíslo druhého řádu.

B. Čistá matematika člověku skutečně čistí mozek. Všimla sis Alice, že $(\{1\}, \{0\})$ není dokonce ani $\leqq$ samo sobě?

A. Zkusíme to: $x \leqq x$ znamená, že $X_L < x < X_P$, to může platit jen tehdy, je-li $X_L < X_P$. Vlastně počkej, to je omyl, nesmíme pro pseudočísla používat „<“ místo „$\ngeqq$“ protože (T4) obecně neplatí. Budeme se muset vrátit k pravidlu (2) a to říká, že $x \leqq x$ tehdy a jen tehdy, je-li $X_L \ngeqq x$ a $x \ngeqq X_P$. $(\{1\}, \{0\})$ je tedy $\leqq$ samo sobě.

B. Dobře že jsem neměl pravdu, myslím, že i pseudočíslo by mělo být „jako“ ono samo.

A. Možná, že existují komplikovanější pseudočísla, která nejsou $\nleqq$ sama sobě, ale je těžké si to představit, protože i množiny X_L a X_P mohou obsahovat pseudočísla.

B. Můžeme se znova podívat na důkaz (T3); aspoň zjistíme, co všechno vydrží.

A. To je dobrý nápad ... ano, platí i pro pseudočísla: x je vždycky jako x.

B. Fajn, ale tak se mi zdá, že jsme trochu utekli od našeho hlavního problému: Je $+$ dobře definováno nebo ne?

A. Naše důkazy, že $x + y = y + x$, $x + 0 = x$ a dokonce i asociativní zákon platí pro čísla i pseudočísla, a jestli se nám podaří dokázat, že pro pseudočísla platí taky nerovnosti z vět (T13) a (T14), pak je $+$ definováno dobře.

B. To je krásný, takže pro pseudočísla máme k dispozici věty (T1), (T3), (T5), (T6), (T9), (T10) a (T11). Pojď zkusíme se znova podívat na (T13).

A. Mám takovou obavu ... no jo, Bille, včerejší důkaz (T13) a (T14) pomocí součtu dnů jsme přijali moc lehkomyslně, byl příliš krásný na to, aby byl pravdivý.

B. Co tím chceš říct?

A. $Z_L + x < y + z$ jsme dokazovali indukcí, viď? K tomu je ale zapotřebí dvou kroků, nejdříve se dokáže $Z_L + x \leqq Z_L + y$ a pak $Z_L + y < z + y$. Indukcí se nám sice podaří dokázat první část, ale ve druhé části vystupuje (z_L, z, y) a to by mohlo mít větší součet dnů než (x, y, z).

B. To jsme tomu dali! Conway by se za nás styděl.

A. Ještě štěstí, že jsme na to nepřišli už včera, měli bychom zkažený celý den.

B. Nedá se nic dělat, začneme znova od začátku, ale napřed se na to nasnídáme.

Dokončení překladu v příštím čísle.