

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Meta olympiáda

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 17 (1972), No. 2, 108

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/138514>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1972

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

meta OLYMPIÁDA

Přinášíme další čtyři úlohy naší nové soutěže, které podle našeho mínění poskytují dosti příležitosti k metodickému rozpracování.

ÚLOHA 5. Nekonečná posloupnost $\{T_k\}$ je dána podmínkami:

$$T_k = k - 1 \quad \text{pro } k = 1, 2, 3, 4;$$

$$T_{2n-1} = T_{2n-2} + 2^{n-2}, \quad T_{2n} = T_{2n-5} + 2^n \quad \text{pro každé celé } n \geq 3.$$

Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$1 + T_{2n-1} = \left[\frac{12}{7} \cdot 2^{n-1} \right], \quad 1 + T_{2n} = \left[\frac{17}{7} \cdot 2^{n-1} \right].$$

Přitom symbol $[x]$ značí největší celé číslo y , pro které platí $y \leq x$.

ÚLOHA 6. Buďte α, β, γ velikosti vnitřních úhlů trojúhelníka. Platí-li

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2,$$

je trojúhelník pravoúhlý; dokažte.

ÚLOHA 7. V rovině je dána nekonečná množina M pravoúhelníků s vrcholy $[0; 0]$, $[p; 0]$, $[p; q]$, $[0; q]$, kde p, q jsou přirozená čísla. Dokažte, že M obsahuje aspoň dva takové pravoúhelníky, z nichž jeden je částí druhého.

ÚLOHA 8. Platí $8^3 - 7^3 = 169 = 13^2$, $13 = 2^2 + 3^2$. Dokažte větu: Je-li rozdíl třetích mocnin dvou bezprostředně za sebou následujících přirozených čísel druhá mocnina přirozeného čísla, pak je toto číslo součtem druhých mocnin dvou bezprostředně za sebou následujících přirozených čísel.

Řešení (tj. metodická zpracování jednotlivých úloh nebo celé skupiny) **zašlete do 30. června 1972 redakci *Pokroků*** (Trojanova 13, Praha 2) s **výrazným označením „METAOLYMPIÁDA“**.

V uveřejňování úloh budeme pokračovat a těšíme se na Vaše řešení.