

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Ivan Vlček; Józef Zieleniec

O teorii katastrof

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 22 (1977), No. 5, 246--262

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/138481>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1977

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

O teorii katastrof

*Ivan Vlček, Józef Zieleniec, Praha**

1. Úvod

Matematika je dnes uznávaným nástrojem většiny vědeckých disciplín. Přesto se zdá, že všeobecně dochází k jisté krizi, že je v podstatě vyčerpáno to, co podstatného mohla aplikacím přinést klasická matematika a že je potřeba hledat matematické přístupy přiměřenější novému okruhu problémů, které dnešní vědy (zejména společenské a biologické) matematické předkládají k řešení nebo spoluřešení. Nepokusíme se zde definovat, v čem tato novost spočívá, protože je to úkol příliš náročný, a omezíme se jen na několik poznámek a příkladů, které snad ujasní, co máme na mysli.

V historii matematiky hrála neobyčejně důležitou roli fyzika, která v určitém období byla hlavním zdrojem podnětů pro matematiku. Problémy řešené klasickou analýzou měly nejčastěji svou fyzikální motivaci (vzpomeňme na Newtonův infinitezimální počet). Tato vazba mezi fyzikou a matematikou byla oboustranná, obě vědy silně ovlivnily a dá se říci, že značná část matematiky, především klasická matematická analýza, teorie diferenciálních rovnic, lineární algebra a analytická geometrie vznikly zčásti na „fyzikální objednávku“. Negativní důsledek tohoto jevu nesly společenskovědní obory a některé obory přírodovědní. Zdá se, že spojitá povaha jevů zkoumaných klasickou fyzikou je spíše výjimkou než pravidlem. A spojitost jevu je základním předpokladem pro použití postupů nabízených aparátem matematické analýzy. Na druhé straně úspěšnost aplikace infinitezimálního počtu ve fyzice sváděla a dodnes svádí vědce z jiných oborů k použití tohoto kalkulu. Výsledek se dostavuje většinou pouze dílčí. Neúspěch bývá připsán na vrub „menší exaktnosti“ těchto oborů, jejich meritorní nepřipravenosti k použití tak „exaktních metod“, jaké dává matematika, atd.

Ovšem moderní matematika prošla procesem zobecnění, její pojmy se postupně osvobozují z původních rámců. Dnes převážná část matematických prací vzniká z problémů, které jsou dány vnitřním vývojem matematiky samé. Postupně se stále více ukazuje, že matematika je víc než vědou o množství, prostoru, funkcích atd., že se stává metodou studia reálných situací. Velmi důležité v tomto vývoji začínají být otázky společenských věd, biologie apod.

Dá se předpokládat, že způsob, jakým se požadavkům popisu specifického pro tyto vědy matematika přizpůsobí, bude v budoucnosti pro ní nejdůležitější. Je ostatně docela možné, že už v nynější matematické teorii existují kalkuly adekvátní potřebám některých věd a že si toho pouze dosud nikdo nepovšiml.

*) Autoři děkují doc. O. KOWALSKÉMU a doc. P. BRUNOVSKÉMU za cennou pomoc a připomínky při přípravě tohoto článku.

Jedním z rozšířených omylů je, že aplikace matematiky spočívá v přikládání reálných situací k šabloně v matematice už hotové. Někdy to je možné, ale častěji jde o hrubé násilí. Je naivní očekávat, že metody vyvinuté původně pro fyziku budou stejně úspěšné např. v psychologii. Spíše se zdá vhodné vyvíjet nové postupy na objednávku těchto „vzporných“, „neexaktních“ věd.

K pokusům o takovýto netradiční přístup patří i tzv. kvalitativní dynamika, na kterou v poslední době navázala teorie katastrof.

Kvalitativní dynamika staví na pojmu dynamického systému*), který je popsán rovnicemi tvaru:

$$(1) \quad dx_i/dt = X_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

x_i – stavové proměnné popisující systém, kde pravá strana nezávisí explicitně na t .
Za jistých podmínek lze systém (1) integrovat a dostaneme soustavu rovnic

$$x_i = h_i(x_1^0, \dots, x_n^0, t)$$

kteří popisují evoluci systému jako funkci počátečního stavu (x_1^0, \dots, x_n^0). Nejznámějším příkladem takového systému je nebeská mechanika.

Potíž je ale v tom, že:

- A) Jen výjimečně jsou známa explicitní vyjádření funkcí X_i na pravé straně rovnic (1).
- B) I když tato vyjádření jsou známa, nelze systém většinou integrovat kvadraturami a řešení (tj. funkce h_i) umíme najít jen přibližnou metodou.

S tímto problémem se klasická teorie diferenciálních rovnic neumí přes své jinak dobré výsledky vypořádat. Proto H. POINCARÉ zavedl r. 1881 jiné hledisko, které bylo nazváno „kvalitativní teorií diferenciálních rovnic“. Namísto snahy po explicitním řešení soustavy (1) hledáme globální geometrický obraz trajektorií pole definovaného rovnicemi. Jestliže se to podaří, je tím kvalitativně popsáno asymptotické chování systému (1). A to v mnoha případech stačí, neboť nám často víc než na kvantitativních výsledcích záleží na kvalitativním výsledku evoluce systému.

Tak vznikla „kvalitativní dynamika“. Původně speciální metoda v teorii diferenciálních rovnic se záhy osamostatnila. Jejím důležitým pracovním nástrojem jsou geometrické metody.

Aplikace moderních geometrických přístupů je v dnešní užití matematice vzácným jevem. Přitom právě geometrie nabízí možnost porozumění zkoumanému jevu pomocí tak významné lidské schopnosti, jako je představivost.

Popsání jevu pomocí rovnic, vzorců apod. může být přesné, ale přesto nám nemusí umožnit pochopení jeho struktury. Zvláště nematematic má velké obtíže s porozuměním takto popsanému jevu. Často se tento problém obchází např. grafickým vyjádřením průběhu nějaké závislosti. Ale složitější jevy, na které se funkční popis nehodí, se tomuto způsobu grafického vyjádření vymykají. A právě geometrie by mohla pomoci překlenout tuto mezeru.

*) Pojem dynamický systém a další, které s ním souvisí, jsou velmi pěkně vysvětleny ve [14]. V tomto článku je také mnoho údajů o důležitém pojmu strukturální stability.

V tomto článku popisujeme metodu, která je pokusem o vyřešení některých z výše naznačených problémů. Zda je vyřeší, zda cesta matematiky od čisté teorie k aplikacím bude schůdnější než dosud – to ukáže budoucnost.

2. Základní pojmy teorie katastrof

Jednou z nejslibnějších teorií, které se v matematice v poslední době objevily, je teorie katastrof, jejímž tvůrcem je známý francouzský matematik RENÉ THOM.

Tato teorie vzbudila velký rozruch v širokých kruzích vědecké veřejnosti, nejen mezi matematiky. Jedním z jejích hlavních a charakteristických rysů je totiž názornost, lépe řečeno možnost názorné interpretace výsledků, pro matematické teorie už dávno nezvyklá. Přitom její matematický i heuristický aparát je velmi složitý, důkaz hlavní věty teorie zabírá kolem stovky tiskových stran [11]. Teorie katastrof slibuje možnost aplikace v mnoha reálných situacích v embryologii, psychologii, sociologii, v ekonomických modelech, ve fyzice (autorem nejznámějších aplikací je anglický matematik E. C. ZEEMAN*). Tvůrci teorie se nikterak netají tím, že jejich teorie (nebo spíše metoda) je na počátku svého rozvoje, že je potřeba ji dále rozpracovávat, zkoušet v praxi a poznávat její možnosti a omezení [12].

Teorie katastrof si všímá systémů, v nichž postupná změna působících sil (v širokém, nejen fyzikálním smyslu) způsobuje náhlé změny stavu. Tento kontrast pomalé, spojitě změny působících faktorů a prudké změny výsledného stavu vystihl Thom užitím výrazu katastrofa. Ve své slavné větě (Thomův seznam katastrof) dokázal překvapující fakt: za jistých, pro případné aplikace dostatečně obecných předpokladů (především tzv. gradientnost systému), existuje pouze konečný počet tzv. elementárních katastrof (v nejobvyklejším případě jen sedm), které se navíc dají popsat jednoduchými algebraickými rovnicemi.

Zeemanův „stroj na katastrofy“

Probereme nyní jednoduché mechanické zařízení sestavené Zeemanem [9], na němž lze názorně demonstrovat podstatu tzv. cusp - katastrofy, která má zatím nejširší použití v aplikacích. Toto zařízení nám pomůže pochopit, jak mohou spojitě se měnící síly způsobit katastrofické skokové změny.

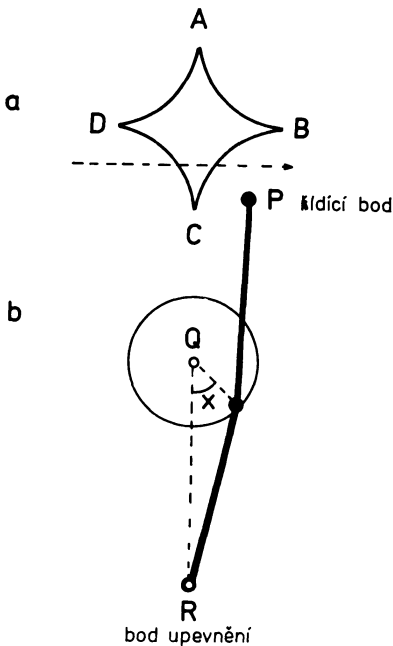
Zařízení se skládá z kruhového disku, který je otočný kolem své osy (např. gramofonový kotouč) a na jehož okraji jsou v jednom bodě upevněna dvě gumová vlákna. Druhý konec jednoho z vláken je upevněn v nějakém bodě roviny disku, kdežto koncový bod P druhého vlákna je v této rovině pohyblivý. Na tento bod se můžeme dívat jako na dvojici řídicích parametrů, kdežto stavovou veličinou je rovnovážná poloha, v níž se ustálí bod upevnění na disku, měřená úhlovou odchylkou x od RQ (obr. 1). Pohybuje-

*) V poslední době se objevují také kritické práce týkající se některých aplikací teorie katastrof. Možnost konstrukce kvantitativních modelů, a tím také predikce chování systému, bývá předmětem vážných námitek. Nejpodloženější je kritická studie [15]. Je to nová práce, která již nemohla být vzata v úvahu při přípravě tohoto článku.

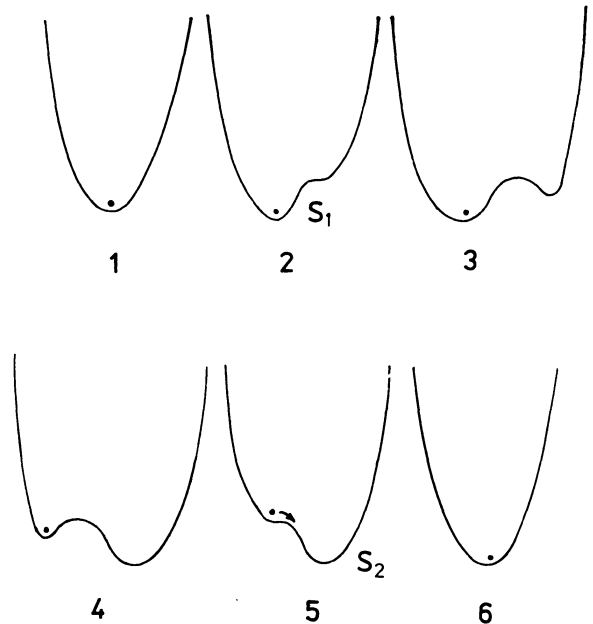
me-li řídícím bodem spojitě, také rovnovážná poloha se mění spojitě, ovšem někdy udělá disk při libovolně malé změně řídících parametrů v jednom směru náhlý skok z jedné rovnovážné polohy do úplně jiné, vzdálené rovnovážné polohy. Jestliže budeme hodnoty řídících parametrů v bodech náhlých skoků zakreslovat v rovině, dostaneme oblast hvězdicovitého tvaru $ABCD$ s touto vlastností: je-li řídící bod P vně $ABCD$, má disk jedinou rovnovážnou polohu; je-li uvnitř, má dvě rovnovážné polohy. Ke skokům dochází právě při přechodu z vnitřku $ABCD$ ven. Představme si např., že jeden řídící parametr necháme fixován a pohybujeme druhým, a že vzniklá vodorovná cesta protíná oblast $ABCD$ v bodech S_1 a S_2 (obr. 1). Na této cestě dojde ke skoku v bodě S_2 , ale nikoli v bodě S_1 . Další překvapení přinese zpáteční cesta S_2S_1 . Tentokrát dojde totiž ke skoku v bodě S_1 , takže chování disku se při zpáteční cestě neobrací.

K vysvětlení tohoto jevu uvažujme energetickou funkci f , představující elastickou energii vláken v závislosti na úhlové výchylce, když je řídící bod fixován. Tuto funkci určíme podle Hookova zákona.

Nechme nyní řídící bod pohybovat po vodorovné cestě S_1S_2 . Především, rovnováha nastává vždy tam, kde má funkce f minimum. Pokud řídící bod leží vně oblasti $ABCD$, má funkce f jediné lokální minimum. Pokud leží uvnitř oblasti $ABCD$, má funkce f dvě lokální minima a mezi nimi jedno lokální maximum. V polohách S_1 a S_2 řídícího bodu splyne jedno lokální minimum funkce f s lokálním maximem a vznikne inflexní bod. Jestliže se bod P pohybuje po S_1S_2 , je disk zpočátku v minimu a v důsledku



Obr. 1. Zeemanův stroj: a) bifurkační množina, b) náčrt Zeemanova stroje



Obr. 2. Různý tvar energetických funkcí v závislosti na poloze řídícího bodu P.

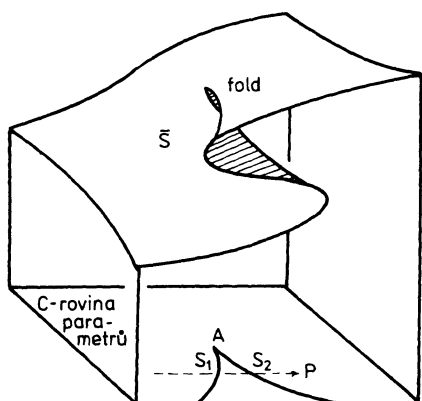
tření, které tlumí případné malé výchylky disku, v něm zůstane až do bodu S_2 . Pak disk přejde náhle skokem do druhé rovnovážné polohy, tj. do druhého, nově se utvořivšího minima energetické funkce. Posloupnost tvarů energetických funkcí v závislosti na poloze bodu P ukazuje obr. 2.

Jestliže nyní vytvoříme v E_3 graf, kde na vodorovnou rovinu souřadnic budeme vynášet polohu řídicího bodu P v rovině disku a na svislou osu úhlové výchylky odpovídající rovnovážným polohám disku, dostaneme hladkou plochu \bar{S} (obr. 3), tzv. rovnovážnou plochu. Všimněme si jejích vlastností.

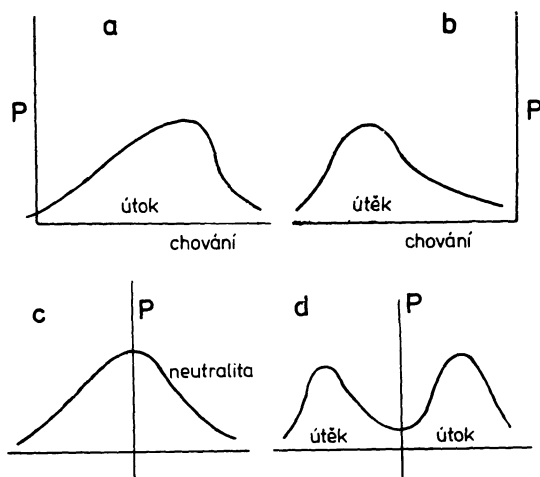
Předně, nad jistou částí roviny tvoří plocha trojitý záhyb, a to právě nad oblastí $ABCD$ (hranice této oblasti se nazývá bifurkační množina nebo prostě bifurkace (bifurcate – větvit se)). Mimo tento trojitý záhyb je plocha všude jednodlistová. Díváme-li se tedy na \bar{S} jako na graf, pak tento graf přiřazuje bodům uvnitř oblasti $ABCD$ tři rovnovážné hodnoty stavové proměnné, všem ostatním bodům roviny jedinou hodnotu.

Křivka na \bar{S} , která odpovídá bifurkaci, se nazývá záhyb (fold). Ačkoliv sám záhyb je hladkou prostorovou křivkou, je jeho průmět do vodorovné roviny křivkou se čtyřmi hroty (na obr. 3 je znázorněna pouze část celé konfigurace). Od toho pochází název celého jevu modelovaného plochou \bar{S} : katastrofa cusp (cusp – hrot, špička).

Povšimněme si ještě prostředního listu plochy \bar{S} . Úhlové výchylky znázorněné na tomto prostředním listu odpovídají lokálním maximům energetické funkce. Tato maxima jsou sice body rovnováhy, ale rovnováhy nestabilní (tj. při libovolně malé odchylce se systém do této polohy už nevrátí). Protože v reálném světě vždy dochází k malým otřesům, mají tyto body jen teoretický význam, v praxi se v nich disk nikdy neustálí. Jestliže jsme tedy řekli, že plochu \bar{S} tvoří body, ve kterých se disk během našeho experimentu ustálí, dopustili jsme se nepřesnosti, neboť plocha \bar{S} je ve skutečnosti o prostřední list bohatší.



Obr. 3. Rovnovážná plocha pro katastrofu cusp.



Obr. 5.

Thomova věta pro případ dvou řídicích parametrů

Všimněte si nyní obecných systémů se dvěma řídicími parametry a jednou stavovou proměnou. Uvidíme, že pro tyto systémy je typická katastrofa cusp, kterou již intuitivně známe z příkladu Zeemanova stroje.

Věta. Necht' E_2 je prostor řídicích parametrů, E_1 je stavový prostor, f je hladká, generická funkce definovaná na otevřené množině prostoru $E_3 = E_2 \times E_1$. Označíme \bar{S}_f množinu bodů E_3 , pro něž $\partial f / \partial x = 0$ (x je stavová proměnná). Pak \bar{S}_f je hladká plocha v E_3 . Všechny singulární body projekce \bar{S}_f do E_2 jsou typu fold a cusp.

Pojem generické funkce bude přesně vysvětlen v článku O. Kowalského v příštím čísle. Zde jen poznamenejme, že „skoro všechny“ hladké funkce jsou generické. Příkladem takové funkce je energetická funkce Zeemanova stroje. Plocha \bar{S}_f ve větě odpovídá ploše \bar{S} z našeho příkladu. Singulární body, o kterých se ve světě mluví, jsou ty body plochy \bar{S}_f , ve kterých je tečná rovina vertikální, tj. ty, kde zřejmě dochází k prudké změně stavové proměnné.

Dvě plochy \bar{S}_f, \bar{S}_g reprezentují ve smyslu Thomovy teorie kvalitativně stejné katastrofy, jestliže, velmi zhruba řečeno, mají ve vertikálním směru stejně složené záhyby“. Toto bude opět upřesněno v článku O. Kowalského. Věta říká, že pro případ dvou parametrů existují jen dva odlišné typy katastrof, a to fold a cusp.

Uvedeme nyní tzv. kanonické vyjádření katastrofy cusp (resp. fold), pomocí jednoduché algebraické plochy (resp. křivky). Začneme se složitějším případem cusp.

Uvažme funkci f danou na $E_3 = E_2 \times E_1$ vztahem

$$f(a, b, x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx.$$

Z podmínky $\partial f / \partial x = 0$ dostaneme rovnici plochy \bar{S}_f

$$x^3 + ax + b = 0.$$

Množina singulárních bodů na \bar{S}_f je nyní popsána rovnicí

$$0 = \partial^2 f / \partial x^2 = 3x^2 + a.$$

Porovnáním obou těchto rovnic a eliminací x dostaneme v E_2 křivku s jedním hrotem popsanou parametrickým vztahem

$$(a, b) = (-3\lambda^2, 2\lambda^3).$$

To je zřejmě bifurkační množina plochy \bar{S}_f . Její implicitní rovnice zní

$$4a^3 + 27b^2 = 0.$$

Tím je analyticky popsána elementární katastrofa cusp. Nutno poznamenat, že katastrofa cusp, tak jako všechny Thomovy katastrofy, je lokálním pojmem. Tedy při katastrofě cusp se zajímáme o chování plochy \bar{S}_f v libovolně malém okolí bodu ležícího nad hrotem bifurkační množiny.

Z kvalitativního hlediska jde o situaci rovnocennou s tou, jež je znázorněna na obr. 3. (Poznamenejme, že v případě Zeemanova stroje jsme měli konfiguraci složenou ze čtyř

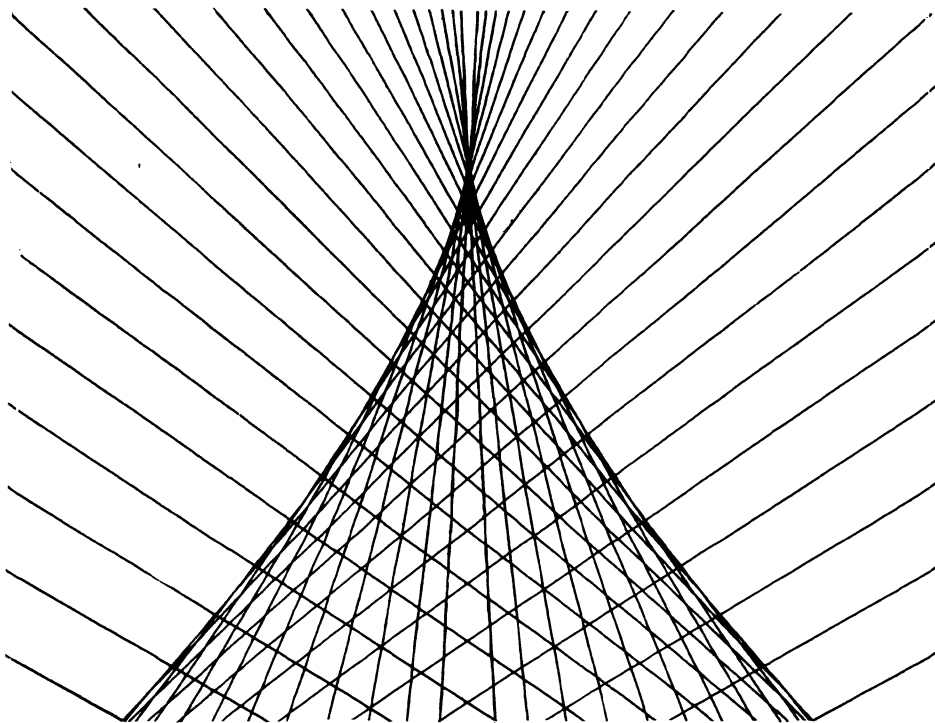
oddělených cusp katastrof, viz bifurkační množinu na obr. 1). Z Thomovy věty plyne, že pro případ dvou parametrů je plocha \bar{S} z obrázku 3 tím nejsložitějším, co se může stát.

Vzeme-li na ploše \bar{S}_f singulární bod, který neleží nad hrotem bifurkační množiny, dostaneme jednodušší katastrofu typu fold. Z názoru je zřejmé, že k popisu katastrofy typu fold jsou dva řídicí parametry zbytečně mnoho. Skutečně, v Thomově seznamu se ukazuje, že fold je jedinou možnou katastrofou pro případ jednoho řídicího parametru. V kanonickém tvaru je jí možno generovat funkcí

$$f(a, x) = \frac{1}{3}x^3 + ax$$

Plocha \bar{S}_f zde bude křivka v E_2 o rovnici $x^2 + a = 0$, tedy parabola. Bifurkační množina je jednobodová, složená z bodu 0, neboť $0 = \partial^2 f / \partial x^2 = 2x$ a tedy $a = 0$. Čtenář si tuto situaci snadno znázorní graficky.

Platí tento velmi zajímavý fakt: Thomova věta zůstává beze změny v platnosti nezávisle na dimenzi prostoru stavových veličin. Jestliže tato dimenze bude $n \geq 2$, pak sice nemůžeme udělat názorný model rovnovážné plochy katastrofy cusp, protože jde o plochu v alespoň čtyřrozměrném prostoru, ale projekce do roviny parametrů (a, b) bude stále cusp. Toho využívají Thomovy aplikace v embryologii. Stavový prostor



Obr. 4. Katastrofický cusp (nakresleno počítačem Hewlett-Packard ve VUSTE Praha)

má mnoho dimenzí, např. nás zajímají koncentrace různých chemických látek, a pokud vše závisí na dvou parametrech (např. teplotě a čase), lze užít informací daných katastrofou cusp. Za těchto okolností se tedy Thomova věta nabízí k modelování jevů, jež svou složitostí přesahují možnosti jiných metod.

Ještě terminologická poznámka: Řídicí parametr a v kanonickém tvaru katastrofy cusp se nazývá normal factor a parametr b splitting factor (split = rozštěpit), protože pro $b > 0$ je původně jednodílná plocha \bar{S}_f rozštěpena v trojdílnou. V aplikacích cusp katastrofy se při identifikaci dvou řídicích parametrů zavádí toto názvosloví: pokud jeden z faktorů je vynášen na osu cusp, nazývá se tento faktor splitting factor a faktor vynášený na osu k němu kolmou normal factor; v případě, že žádný z faktorů neleží na ose cusp, nazýváme tyto faktory konfliktními.

Příklad užití katastrofy cusp v bimodálních systémech

Než pokročíme dále, probereme užití katastrofy cusp na příkladu jiného rázu, než tomu bylo u Zeemanova stroje.

KONRAD LORENZ, německý biolog (nositel Nobelovy ceny 1974), konal pokusy se stresem a agresivitou u zvířat. Zjistil, že strach a vztek (stupeň vzrušení) jsou konfliktní faktory ovlivňující agresi. Zeeman [2] jeho experimenty použil jako empirický podklad a pomocí katastrofy cusp sestavil model chování psa, který dobře vysvětluje pozorované jevy.

Empiricky bylo zjištěno, že

- pokles vzteku má za následek pokles agrese
- pokles strachu růst agrese.

Co se však děje, rostou-li strach a vztek zároveň? Nejméně pravděpodobné je, že pes zůstane neutrální, a naopak nejpravděpodobnější je náhlý útok nebo náhlý útěk. Jak tuto situaci modelovat, a zvláště jaká bude v tomto případě vytvořující funkce f ? (U Zeemanova stroje to byla energetická funkce a systém se stabilizoval při jejich lokálních minimech.) Zeeman zvolil za tuto funkci pravděpodobnost chování. Mohou nastat čtyři odlišné případy (obr. 5 abcd). Nejzajímavější je případ 4, kde rozdělení je bimodální. Zeeman ve [2] popisuje experiment, při kterém jsou všechny tři hodnoty, tj. oba parametry (strach, vztek) a stavová veličina (nejpravděpodobnější chování při dané volbě parametrů) vynášeny do grafu. Objeví se charakteristická plocha: cusp - plocha \bar{S} (obr. 6).

Pak je možno po identifikaci jednotlivých listů plochy přikročit k interpretaci.

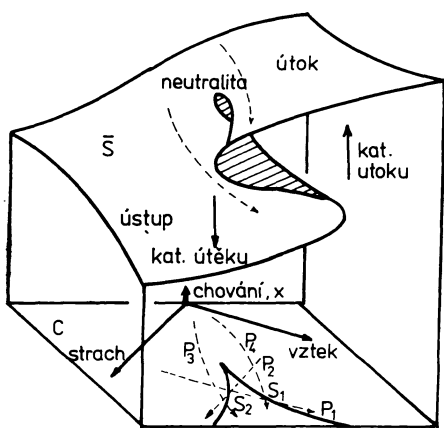
Horní list plochy představuje agresivní chování, dolní list útěk; trojdílná část – tj. případ 4 – bimodální chování; střední list představuje nejméně pravděpodobné chování, tj. neutralitu, horní a dolní listy představují nejpravděpodobnější chování, tj. agresi nebo útěk. (Všimněme si odlišnosti od Zeemanova stroje. Tam byly stabilní ty stavy, kde energie byla minimální, zde jsou stabilní ty, kde je pravděpodobnost výskytu maximální.) Přeskok z horní části plochy na dolní se nazývá katastrofa útěku, opačný přeskok katastrofa útoku. Sledujme obrázek 6 a zvolme v rovině parametrů čáry P_1 , P_2 rovnoběžné s jednotlivými osami souřadnic. Na P_1 je pes zpočátku bázlivý,

v ústupné náladě. Jestliže jeho vztek podněcujeme, např. vniknutím do jeho území, resp. omezováním tohoto území, pes jeví známky vzteku, ale zůstává příkrčený. Pak náhle, když P_1 překročí v bodě S_1 hranici bifurkačního cusp, přeskóčí chování (tj. nejpravděpodobnější chování) na horní list plochy a pes zaútočí. To byla katastrofa útoku. Podobně pohybem po P_2 dostaneme katastrofu útěku.

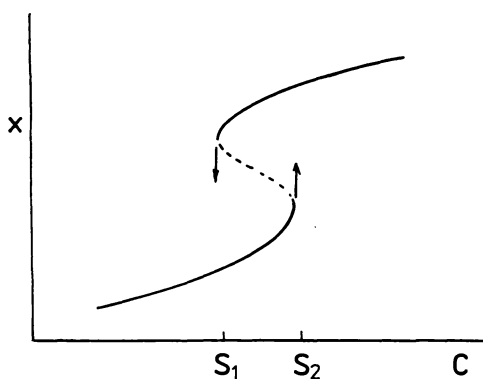
Všimněme si čelního řezu katastrofickou plochou (obr. 7). Z tvaru křivky vyplývá, že existuje jakési opoždění, hluché, necitlivé místo při „cestování“ po ploše \bar{S} . Systém je už připraven k přeskočení, ale posud setrvává v předchozím stavu. Tomuto jevu říkáme hystereze; obrázek demonstruje hysterezní cyklus. (Název je zvolen podle analogického jevu z magnetismu.)

Dalším kvalitativním rysem charakteristickým pro plochu katastrofy cusp je tzv. divergence. Sledujme v obrázku 6 čáry P_3, P_4 . Obě začínají a končí (v rovině parametrů) blízko sebe, ale jejich výsledné stavy jsou diametrálně odlišné; čáry P_3, P_4 leží totiž na opačných stranách cusp. V našem příkladu je pes na P_3 nejprve zastrašený, pak narůstá jeho vztek, ale celkové výsledné chování je ústupné. Na P_4 prožívá totéž v obráceném pořadí, výsledný stav parametrů na konci P_4 je blízký stavu na konci P_3 , ale rozdíl v chování je diametrální, pes má útočnou náladu! Tento jev záležející v tom, že malá změna cesty má za následek velkou změnu stavu, nazýváme divergencí; všeobecně se vyskytuje v biologii a ve společenských vědách, na rozdíl od toho, co je obvyklé v klasické fyzice; a zde je jeden z nehlubších rozdílů mezi těmito vědami, a tedy také zárodek potíží vznikajících při mechanické aplikaci klasické (tj. v podstatě fyzikální) matematiky na biologické a společenské vědy.

Další jev charakteristický pro katastrofu cusp je nejednoznačnost, tj. skutečnost, že plocha \bar{S} je trojlístová, a není tedy grafem funkce. Jinak řečeno, některým hodnotám řídicích parametrů odpovídají dva různé stabilní stavy systému a my neumíme říci, který skutečně nastane. Ovšem v kombinaci s divergencí vidíme, že znalost cesty,



Obr. 6. Cusp katastrofa; strach a vztek jsou konfliktní faktory ovlivňující agresivitu.



Obr. 7. Hysterezní křivka.

po které se došlo k tomuto bodu v rovině parametrů, nám může dovolit rozhodnout, který stav nastane. Jinak to lze říci tak, že pro určení stavu systému je důležitá jeho historie, a to je opět jev typický pro společenské vědy.

Připomeňme zde Zeemanův model ekonomického růstu [8]. Stavovou proměnnou je míra růstu ekonomiky, řídicími parametry jsou míra devalvace a deflační, resp. reflační politika vlády. Model ukazuje, že podobná hospodářská politika může vést k drasticky odlišným mírám růstu. Tak devalvace po období deflace nemůže mít za následek růst, zatímco devalvace stejného rozsahu po období inflace spojená s patřičnou deflační politikou vede k prudkému růstu. Poloha řídicích parametrů je v obou případech stejná, chování systému však zcela odlišné.

Posledním kvalitativním rysem cusp - plochy, kterého si povšimneme, je bimodalita ve stavech (horní a dolní list). Vyplyváá konec konců z toho, že generická funkce

$$\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx$$

má v obecném tvaru dva lokální extrémy, oddělené opačným lokálním extrémem.

Thomova věta ukazuje, že pět kvalitativních znaků – náhlé skoky, nejednoznačnost, divergence, hystereze a bimodalita – vzájemně souvisí, a vyskytne-li se jeden z nich, můžeme očekávat výskyt ostatních. Přítomnost těchto znaků naznačuje, že jev může být modelován katastrofou cusp.

Seďm elementárních katastrof

Hlavním Thomovým výsledkem je klasifikace katastrof pro systémy s nejvýše čtyřmi řídicími parametry (MATHER tento výsledek zobecnil pro pět parametrů). Thom ukázal, že tyto katastrofy se mohou odehrávat pouze konečně mnoha kvalitativně odlišnými způsoby a našel pro tyto způsoby vytvářející funkce, příslušné plochy, bifurkace atd., zkrátka popsal je geometricky. V popisu jsou zahrnuty vždy kromě stabilních také labilní rovnovážné stavy.

Nechť k, n jsou přirozená čísla, $f: E_k \times E_n \rightarrow E_1$, E_k je prostor řídicích parametrů, E_n prostor stavových veličin, funkce f je tzv. vytvářející funkce (jak jsme viděli, může mít např. význam potenciálu, distribuce pravděpodobnosti, nákladové funkce). Definujeme nejprve \bar{S}_f jako množinu těch bodů prostoru E_{k+n} , kde $\partial f / \partial x_i = 0$, $i = 1, \dots, n$ (x_i jsou stavové proměnné). Je-li f generická funkce, je \bar{S}_f hladkou podvarietou dimenze k v E_{k+n} , tj. v každém jejím bodě existuje jediná tečná rovina dimenze k .

Katastrofickou množinou se nazývá množina singularit projekce $\bar{S}_f \rightarrow E_k$, tj. množina bodů podvariety \bar{S}_f v nichž je tečná rovina vertikální. Projekce katastrofické množiny do E_k se nazývá bifurkační množina.

Thom dále zavedl pojem generické funkce definované na otevřené množině $U \subset E_{k+n}$ a ukázal, že podprostor těchto funkcí v prostoru všech hladkých funkcí na U je průnikem spočetně mnoha otevřených hustých podmnožin vzhledem k jisté přirozené topologii. Vyslovil názor, že „téměř všechny“ přírodní a společenské děje lze proto popsat generickými funkcemi. Tento názor má ovšem charakter spíše filozofický a jeho oprávněnost může prověřit jedině praxe.

Thom (a Mather) ukázali, že pro systémy s $k \leq 5$ řídicími parametry určené generickými funkcemi existuje pouze konečný počet typologicky odlišných elementárních katastrof.

Thom dále ukázal, že počet elementárních katastrof závisí jen na k a je nezávislý na n . Pro $k > 5$ je počet katastrof již nekonečný. Tyto případy budou zřejmě předmětem intenzivního výzkumu.

Pro $k \leq 5$ závisí počet elementárních katastrof na k následujícím způsobem.

k	1	2	3	4	5
počet elem. katastrof	1	2	3	7	11

Pro aplikace je obzvlášť důležitý případ $k = 4$, protože to umožňuje interpretovat řídicí prostor jako fyzikální prostoročas. Sedm katastrof pro $k = 4$ bylo zvlášť pojmenováno. Thom našel kanonická vyjádření těchto katastrof pomocí jednoduchých vytvořujících funkcí (tab. I).

I ve vyšších dimenzích $k > 2$ nastává již dříve pozorovaný jev: katastrofy nižšího řádu vystupují jako složka katastrof vyššího řádu. Např. pro $k = 3$ se objevuje nová katastrofa (swallowtail – vlaštovčí ocas), a spolu s katastrofami fold a cusp tvoří tři elementární katastrofy pro tři řídicí parametry.

Uvedme nyní Thomův seznam katastrof spolu s vytvořujícími funkcemi.

Tabulka I. Thomův seznam elementárních katastrof

Název katastrofy	k	Vytvořující funkce
fold	1	$x^3/3 - ax$
cusp	2	$x^4/4 - ax - bx^2/2$
swallowtail	3	$x^5/5 - ax - bx^2/2 - cx^3/3$
butterfly	4	$x^6/6 - ax - bx^2/2 - cx^3/3 - dx^4/4$
hyperbolic umbilic	3	$x^3 + y^3 + ax + by + cxy$
elliptic umbilic	3	$x^3 - xy^2 + ax + by + c(x^2 + y^2)$
parabolic umbilic	4	$x^2y + y^4 + ax + by + cx^2 + dy^2$

Abychom dostali hladké podvariety \bar{S}_f pro vytvořující funkce z Thomovy tabulky, stačí položit parciální derivace f podle x (resp. podle y) rovny 0. Počínaje od $k + n = 4$ nemůžeme sestavit názorné modely ploch \bar{S}_f , protože jde o plochy ve více než trojrozměrném prostoru. Nicméně lze ještě znázornit bifurkační množiny, které jsou nižší dimenze (např. u swallowtail je bifurkační množinou plocha v E_3). Tam, kde jsou i bifurkace plochy ve více než třírozměrném prostoru, lze volit některé řídicí parametry

a studovat řezy. Např. u butterfly zvolme konkrétně řídicí parametry c , d a promítneme \bar{S}_f do roviny (a, b) . Zde ovšem nedostaneme jedinou bifurkaci jako u katastrofy cusp, ale celou třídu, podle volby hodnot c , d . Atlas takových průřezů nakreslili na počítači POSTON s WOODCOCKEM [7].

Katastrofa butterfly

Výše jsme ukázali, že bimodální systémy lze modelovat pomocí cusp katastrofy. Čím je bimodalita pro cusp, tím je trimodalita pro butterfly. Vytvořující funkce (viz tabulku I) má 3 vrcholy (maxima, resp. minima) oddělené dvěma opačnými extrémy (viz obr. 10); krajní vrcholy představují protikladné stavy, ve kterých systém polarizuje; prostřední vrchol představuje kompromis mezi nimi.

Popišme stručně kanonický model katastrofy butterfly. Varieta \bar{S} je v pětirozměrném prostoru popsána rovnicí

$$x^5 = a + bx + cx^2 + dx^3.$$

V dalším budeme za graf katastrofy považovat pouze podvarietu S variety \bar{S} , danou podmínkou nezápornosti parciální derivace podle x , tj.

$$5x^4 \geq b + 2cx + 3dx^2.$$

(Jde o podobnou restrikcí, jako když jsme u cusp katastrofy vynechali prostřední list).

Řídicí parametry butterfly katastrofy jsou čtyři: a – normal factor, b – splitting factor, c – bias factor, d – butterfly factor. Na obr. 8 jsou pro pevně zvolená c , d některé řezy bifurkační množiny v rovině (a, b) , které nám pomohou při popisu bifurkační množiny.

Pro $d < 0$ dostáváme už známý cusp, přičemž bias factor c jej vychyluje v kladném nebo záporném směru osy a (viz horní řádek obr. 8). Odtud také jméno, bias = vychýlit.

Je-li $d > 0$, objevuje se třetí, kompromisní vrchol vytvořující funkce. Sledujme obr. 8 dole uprostřed (čísla označují počet vrcholů vytvořující funkce v příslušných oblastech). Původně jeden cusp se rozštěpil ve tři. Cusp v počátku tvoří jakési V a v něm je ještě jedno, vnitřní V se špicí nad počátkem. Uvnitř tohoto vnitřního V má odpovídající funkce jen jeden extrém představující kompromis. Tento extrém existuje také všude uvnitř vnějšího V. Ve čtyřúhelníku mezi vrcholy obou V existují všechny 3 extrémy a v cuspech mimo počátek vždy extrém kompromisu a jeden odpovídající krajnímu stavu systému.

Zmiňme se ještě o vlivu parametru c . Stavová veličina x roste zároveň s c ; přesněji, máme-li dva grafy S_1 , S_2 , kde b , d jsou u obou identické, $c_1 < c_2$, pak ke každému $(a, x_1) \in S_1$ existuje $(a, x_2) \in S_2$ takové, že $x_1 < x_2$ (případně $x_1 = x_2 = 0$). To lze dokázat z definice podvariety S , kterou jsme definovali podmínkou nezápornosti parciální derivace podle x .

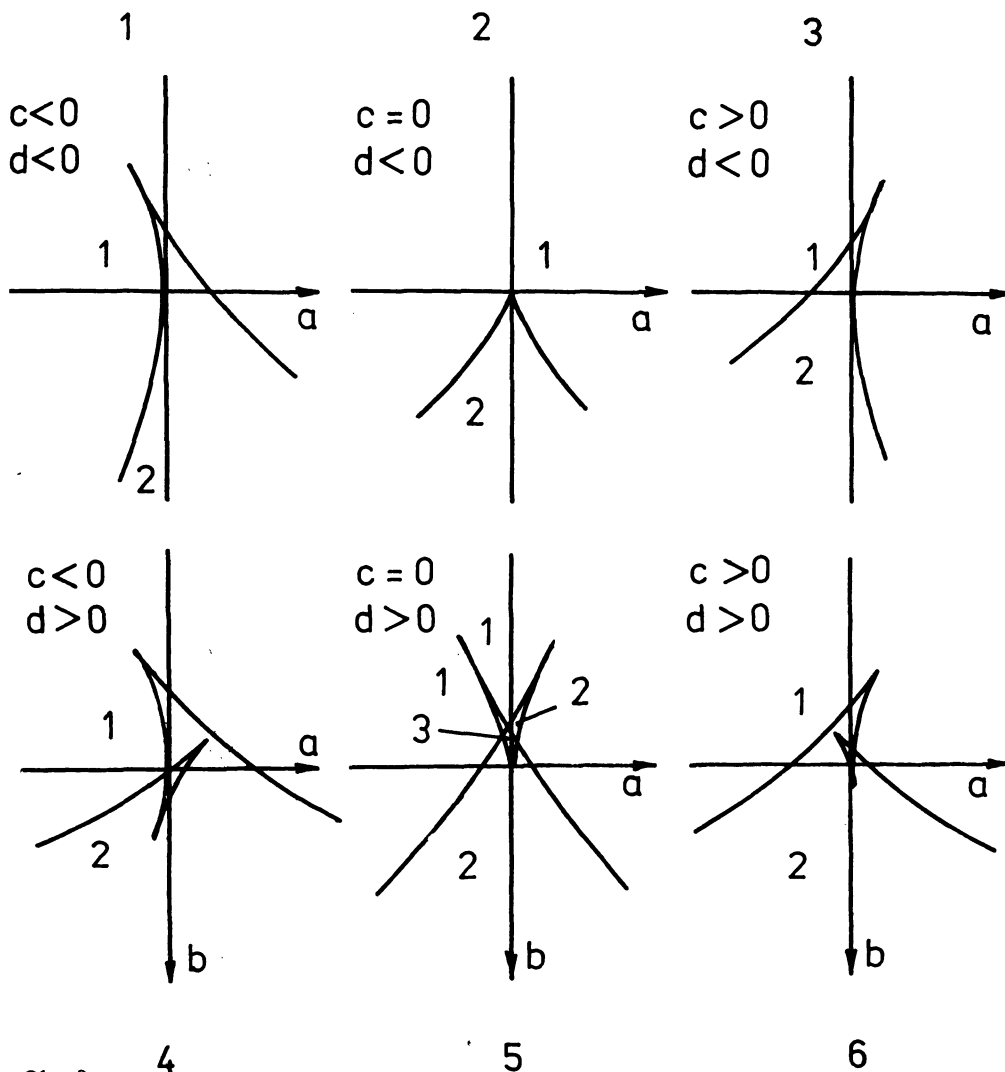
Tato vlastnost bias faktoru c je důležitá pro výběr faktoru c při aplikacích. Probereme nyní Zeemanův příklad nazvaný „Válka“.

Nechť stavová veličina x reprezentuje spojitou škálu možné politiky vlády (předpokládáme, že takovou škálu lze sestavit) od rozhodné vojenské akce přes smířlivost až ke kapitulaci. Jako vytvořující funkci vezmeme funkci $P(x)$, danou počtem lidí ve státě, kteří podporují politiku x . Po znormování můžeme P chápat jako pravděpodobnostní rozdělení veřejného mínění.

Začneme s případem, kdy je veřejnost rozštěpena na „holubice“ a „jestřáby“, tj. P má dvě maxima. Pro tento případ můžeme jev modelovat cusp katastrofou.

Jako faktory ovlivňující úroveň akcí byly vybrány pocit ohrožení a válečné náklady, počítané relativně k národnímu důchodu.

Za základ modelu byly vzaty tyto čtyři hypotézy:



Obr. 8.

skutečným zastavením akcí. Vidíme, že toto opoždění je tím větší, čím vyšší je úroveň válečných nákladů, tj. b působí na situaci konzervativně, ač to vypadá v tomto případě paradoxně. Pocit, že by vynaložené oběti byly zmarněny, brání ukončení války.

Jestliže se válka protahuje a dochází k dlouhodobé konfrontaci umírněných a radikálů, přičemž žádná ze stran nemá rozhodující vliv, objevuje se potřeba kompromisu, tj. funkce $P(x)$ se 3 vrcholy. V tom případě je přirozené (v důsledku Thomovy klasifikační věty), pokusit se o popis za pomoci butterfly katastrofy.

Zeeman v tomto případě vybral k již uvedeným faktorům a , b další dva – bias factor c nezranitelnost země a jako butterfly factor d čas. Přitom výše popsany model je zvláštním případem nového modelu pro c blízko 0 a $d < 0$, tj. pro zemi s průměrnou nezranitelností a na počátku války.

Nezranitelnost byla vybrána za bias factor, protože zřejmě zvyšuje agresivitu (a to je právě účinek faktoru c u katastrofy butterfly). Např. průmyslová země je i při velkém a a poměrně velkém bohatství zdrojů zdržována od válečných akcí zranitelností svých velkoměst. Takovou zábranu nemá zemědělská země s řídkým osídlením.

Čas působí jako butterfly factor, čím déle trvá situace nerozhodné války (a , b , c vesměs blízko nuly), tím více se prosazuje potřeba kompromisního řešení. V bifurkační množině se objevuje oblast kompromisu (obrázek 8 dole uprostřed). Ve funkci P se postupně zvedá prostřední vrchol (obr. 10) a tomu odpovídá zvětšování vnitřního V (obr. 8) v bifurkační množině. Při tomto vývoji nakonec dojde ke katastrofickému skoku, ve funkci $P(x)$ zbude jediné maximum; válečné akce jsou zastaveny a dospívá se k vyjednávání o podmínky míru.

V předchozích úvahách jsme předpokládali, že „silové“ pole je gradientní. Thomova teorie postavená na tomto předpokladu se nazývá teorie elementárních katastrof. Požadavek gradientnosti snižuje zásadní význam Thomova přístupu, neboť pole tohoto typu mají při popisu reality zcela výsadní postavení.

Jaké budou výsledky teorie katastrof postavené na obecném pojmu pole, to je otázka budoucích výzkumů. Situace je zde podstatně složitější než u gradientních systémů. Už u jednoparametrických systémů vzniká nekonečně mnoho typů bifurkací.*)

3. Význam a perspektivy teorie katastrof

V předchozích kapitolách jsme se stručně seznámili s Thomovou teorií katastrof. Doufáme, že již tento první kontakt s novým přístupem čtenáři umožní, aby si uvědomil její zásadní význam. Matematická metoda vycházející z teorie katastrof má velmi zvláštní charakter. Kvantitativní predikce jevu je v ní spíše vedlejším produktem. Teorii katastrof je třeba považovat spíše za jazyk, za metodu, která umožňuje klasifikovat a systematizovat empirické veličiny.

Thomův geometrický přístup nabízí vysvětlení jevů, činí je srozumitelnějšími. Objevují se dokonce úvahy, které předvídají vytvoření mnohorozměrného vědeckého jazyka

*) Tento problém je objasněn pro některé speciální případy jednoparametrických a částečně dvouparametrických negradientních systémů v [16].

na bázi teorie katastrof, se syntaktickými možnostmi komplexnějšími, než má obvyklý jazyk; značná část uvažování by se v něm mohla formalizovat. Tuto úvahu lze domyslet dále; Thom dokonce naznačuje možnost vzniku nové matematiky, kde by matematické kroky byly popsány spojitou cestou, v níž by jednotlivé etapy uvažování odpovídaly pouze kvalitativním variacím katastrof v mnohorozměrném prostoru [12].

Ale zůstaňme u úvah, které nepřekračují rámec reality nejbližších let. Geometrický přístup se zřejmě stane velmi účinným vědeckým nástrojem. Geometrický model má totiž proti běžnému matematickému modelu mnoho odlišností.

Vyjmenujeme některé, aby se ukázala jeho použitelnost již v dnešní výzkumné praxi:

Geometrický model má mnohem větší vypovídací schopnost než běžné modely se stejným množstvím parametrů. Můžeme totiž vytvářet libovolné řezy plochou S v závislosti na zvolené trajektorii systému. Výsledkem bude velké množství závislostí, které lze vyhodnocovat klasickými postupy.

V těchto modelech je stav systému podmíněn nejenom hodnotami proměnných, ale také historií jejich vývoje. Je to případ sice naprosto běžný ve skutečném světě, o to však vzácnější v matematických popisech reality.

Geometrický model je názorný. Fakt, že abstraktní problém mění v obrazec s možností jeho nejrůznějších projekcí, je pro lidskou představivost zdrojem nových podnětů a možností. Tím je také postaven do zcela jiného světla důležitý problém dnešní aplikované matematiky, problém dorozumění matematika a vědce jiného oboru.

Nelze se také nezmínit o dalším závažném aspektu Thomova přístupu – o jeho bezprostředně dialektickém základu. Nespojité jevy, při kterých systém přechází náhle z jednoho relativně stabilního stavu do druhého, tedy při kterých postupné kvantitativní změny vyúsťují v náhlou změnu kvality systému, jsou základem veškerého vývoje jak v přírodě, tak ve společnosti.

V Thomových katastrofách je každá změna kvalitativní úrovně zkoumané soustavy bezprostředně důsledkem působení protikladných sil. Plocha \bar{S} je názornou demonstrací této skutečnosti. Lze přímo vidět, jak interakce těchto sil způsobuje přerůstání kvantitativních změn v náhlou změnu kvality.

Vědce zabývající se teorií katastrof poněkud zneklidňuje fakt zcela neobvyklé univerzálnosti nového přístupu. Někteří z nich se dokonce přiklání k názoru, že teorie katastrof přináší sice významný, ale čistě fenomenologický aparát. My se domníváme, že tomu tak není; že univerzálnost Thomovy metody plyne z její imanentní dialektičnosti, která jí umožňuje proniknutí k jádru zkoumaných problémů. A zde je asi třeba perspektivně vidět její hlavní přínos pro další rozvoj vědy.

Literatura*)

- [1] THOM, R.; *Stabilité structurelle et morphogénèse*, W. A. Benjamin, Inc., Reading Massachusetts 1972.
- [2] ZEEMAN E. C., *Catastrophe theory*, Scientific American 1976.
- [3] VLČEK I., ZIELENIČEK J., *Teorie singularit a kvalitativní analýza*, VUŠTE, Praha 1976.

*) Obsáhlejší seznam literatury je uveden v [3].

- [4] ISNARD C. A., ZEEMAN E. C., *Some models from catastrophe theory in the social sciences*, in: Use of models in the Social Sciences, Tavistock, London 1975.
- [5] ZEEMAN E. C., *On the unstable behaviour of stock exchanges*, J. Math. Economics 1, (1974).
- [6] ZEEMAN E. C., *Differential equations for heartbeat and nerve impulse*, Dynamical systems (Proc. Sympos. Univ. of Bahia, Salvador 1971), Academic Press, New York 1973.
- [7] WOODCOCK A. E. R. - POSTON T., *A geometrical study of the elementary catastrophes*, Lecture Notes in Mathematics 373, Springer 1974.
- [8] ZEEMAN E. C., *Applications of catastrophe theory*, Tokyo International Conference on Manifolds, Tokyo Univ. Press 1973.
- [9] ZEEMAN E. C., *A catastrophe machine*, in: Towards a Theoretical Biology IV, Edinburgh University Press.
- [10] ZEEMAN E. C., *A model for anorexia neurosa using the butterfly catastrophes*, Symp. on Singularities, Corgèse 1975.
- [11] WASSERMAN G., *Stability of unfoldings*, Lecture Notes in Mathematics 393, Springer 1974.
- [12] THOM R., *Catastrophe theory: its present state and future perspectives* in: Dynamical Systems — Warwick 1974, Lecture Notes in Mathematics 468, Springer 1975.
- [13] THOM R., *Topological models in biology*, Topology 8, 1969.
- [14] BRUNOVSKÝ, P., *Topologická klasifikácia diferenciálnych rovníc a štruktúrna stabilita*, PMFA 18 (1973).
- [15] SUSSMAN, H. J., ZAHLER, R. S., *Catastrophe Theory as Applied to the Social and Biological Sciences: A critique*; dosud nepublikováno.
- [16] ARNOLD, V. I., *Lekcii o bifurkaciiach i versal'nykh semejstvach*, Uspechi mat. nauk. 27 (1972).

Nemůžeme si myslit, že dosáhnout v matematice něčeho nového je obtížnější než v jiných vědách. Praxe ukazuje spíše opak: je pravidlem, že nadaní matematici začínají samostatné vědecké bádání velmi brzy.

Základem většiny matematických objevů je nějaká prostá myšlenka: názorná geometrická konstrukce, nová jednoduchá nerovnost apod. Je pouze třeba vhodně této prosté myšlenky použít k řešení úlohy, která se na první pohled zdá neřešitelná.

A. N. KOLMOGOROV

Bohatá historická zkušenost ukazuje, že se matematika vždy rozvíjela jako jediný celek při současném pokroku všech jejích směrů. Tato zkušenost jasně ukazuje na nutnost současného rozvoje všech hlavních směrů moderní matematiky. Jen při takovém všestranném rozvoji dokáže matematika vyhovět nejrůznějším potřebám přírodovědy a techniky.

I. M. VINOGRADOV,
N. I. MUSCHELIŠVILI