Ronald J. Stern

Instantony a topologie čtyřrozměrných variet

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 30 (1985), No. 2, 82--92

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138452

Instantony a topologie čtyřrozměrných variet

Ronald J. Stern, Salt Lake City, USA

Geometrická topologie se zabývá studiem metrických prostorů, které jsou lokálně homeomorfní s eukleidovským prostorem R^n, tj. zkoumá topologické (krátce TOP) variety libovolné dimenze n. Tradičním cílem je najít invarienty, *obvykle* algebraické, které dovolují klasifikovat všechny variety dané dimenze. Zde rozlišujeme otázku existence – najít varietu s danými invarienty, a otázku jednoznačnosti – určit kolik variet dimenze n má předepsané invarianty. Jak se rychle ukáže (a skutečně ukázalo), TOP variety jsou příliš beztvaré na to, aby se rovnou mohlo začít s jejich studiem, a proto se přidává další struktura, která je slučitelná s danou topologií a umožňuje rozšířit prostředky zkoumání, jež máme k dispozici. Předpokládá se, že čím bohatší je struktura, kterou na varietu klademe, tím méně objektů jsme nuceni studovat.

Jako první příklad uvažujme, že M je eukleidovský prostor R^n (nebo otevřená množina takového prostoru). Na M můžeme studovat spojité funkce, ale máme zde i mnohem bohatší prostředky, které nám umožňují studovat *hladké* funkce. Aby se dal rozšířit pojem hladkosti na obecnější variety, je třeba specifikovat množinu navzájem „hladce navazujících" souřadnicových map. *Diferencovatelný atlas* na metrickém prostoru M je pokrytí prostoru M otevřenými množinami $\{U_\alpha\}$ (které se nazývají *souřadnicové mapy*) a homeomorfismy $\Phi_\alpha\colon U_\alpha \to R^n$ (do této chvíle nejde o nic jiného než o definici TOP variety), a to takovými, že *přechodové funkce* $\Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1}\colon \Phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \Phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ jsou hladké [tj. třídy C^∞, pozn. překlad.]. Poznamenejme, že jak definiční obory, tak obory hodnot přechodových funkcí jsou otevřené množiny v R^n, takže hladkost má smysl. Nyní se obyčejný diferenciální počet v R^n dá prostřednictvím přechodových funkcí po kousích přenést na varietu M, což umožňuje budovat diferenciální počet na celé této varietě. Například funkce $f\colon M \to R$ je hladká, právě když [obyčejná funkce n proměnných] $f \circ \Phi_\beta^{-1}\colon \Phi_\alpha(U_\alpha) \to R$ je hladká pro každé U_α.

V této definici diferencovatelnosti je zřejmě hodně libovůle; řekneme proto, že dva atlasy $\{U_\alpha, \Phi_\alpha\}$ a $\{V_\beta, \Psi_\beta\}$ jsou ekvivalentní, jestliže jejich sjednocení je zase atlas na M, tj. když $U_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$, pak $\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}$ je hladké. Hladká (krátce DIFF) struktura na M se definuje jako třída ekvivalence diferencovatelných atlasů na M.

Poincaré uvedl ve známost jiný typ struktury na varietě, pro kterou hořejší přechodové funkce $\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}$ se nepředpokládají hladké, ale zachovávají přirozenou kombinatorickou struturu prostoru R^n (úsečky se zobrazují opět jako úsečky nebo jako lomené čáry). Maximální atlas této vlastnosti na M se nazývá po částech lineární (krátce PL) struktura na M; řekneme také, že na M máme kombinatorickou triangulaci. PL-varieta je vždy PL-homeomorfní simpliciálnímu komplexu, který je tzv. kombinatorickou varietou (dimenze n), tj. pro každý vrchol komplexu je hranice příslušné hvězdy PL-homeo-

R. J. Stern: *Instantons and the Topology of 4-Manifolds*. The Mathematical Intelligencer, Vol. 5, No. 3, 1983, pp. 39–44.

morfní s $(n - 1)$-rozměrnou sférou S^{n-1} s její standardní triangulací. Tyto různé definice variety byly zavedeny ke konci devatenáctého století kvůli lepšímu porozumění řešením diferenciálních rovnic. Bylo ironií, že oblast geometrické topologie se vyvinula zcela ignorujíc tyto své kořeny, a jak za chvíli ukážeme, některé z nejnaléhavějších otázek dneška o varietách nalézají své odpovědi za pomoci moderní analýzy a geometrie.

Pro topology se stalo základním problémem určit, kdy daná TOP varieta připouští PL strukturu, a pokud ji připouští, zda na ní existuje také slučitelná DIFF struktura. Ve 30. letech podal Whitehead [24] překvapivě jemné důkazy triangulovatelnosti DIFF variet (takže fakticky platí DIFF $\subset$ PL). V polovině padesátých let bylo známo, že každá TOP varieta dimenze nanejvýš 3 připouští *jedinou* DIFF strukturu [10, 15, 18]*). Zdálo se nemyslitelným, že by se na dané TOP varietě (nebo PL varietě) daly vybudovat dva kvalitativně různé diferenciální počty, to jest, že by M připouštělo více než jednu DIFF strukturu. V r. 1956 Milnor ukázal, že na sféře S^7 existuje 28 různých DIFF struktur. Jako příklady byly použity některé „dobře známé" fibrované prostory s bází S^4 a s fibry homeomorfními a S^3 [12]. Potom byly objeveny další sféry, které připouštějí exotické DIFF struktury. Pozdější práce mnoha významných matematiků (např. Thom, Kervaire, Milnor, Munkres, Hirsch, Mazur, Poenaru, Lashof, Rothenberg, Haefliger, Smale, Novikov, Browder, Wall, Sullivan, Kirby a Siebenmann) v období od r. 1956 do r. 1970 měly za cíl roztřídit věci v dimenzi 5 a vyšších dimenzích — byl to zlatý věk topologie variet. Nakonec se ukázalo, že překážky (obstrukce) pro existenci PL struktury nebo DIFF struktury na TOP varietě dimenze $\geqq 5$ se dají zformulovat jako problém „liftingu" (redukce strukturní grupy tečného fibrovaného prostoru) a že tedy jde o diskrétní problém.

V roce 1968 Kirby a Siebenmann [11] zjistili, že na TOP varietě M dimenze alespoň 5 máme jedinou obstrukci pro existenci PL struktury; je to jistý prvek $k(M)$ grupy kohomologií $H^4(M, Z_2)$. Jestliže $k(M) = 0$, pak na M existuje PL struktura; v opačném případě žádná neexistuje. Dále, jestliže na M existuje aspoň jedna PL struktura, pak na ní existuje přesně tolik různých PL struktur, kolik prvků má grupa kohomologií $H^3(M; Z_2)$. Již předtím, když bylo poprve zjištěno, že problémy existence struktur by měly být problémy liftingu, bylo objeveno (bez jakýchkoliv omezení na dimenzi), že existují další diskrétní obstrukce pro přechod od PL struktury k DIFF struktuře; tyto obstrukce souvisejí s homotopickými grupami na sférách [9]. Speciálně každá PL varieta dimenze $n \leqq 7$ připouští DIFF strukturu (slučitelnou s příslušnou PL strukturou) a pro $n \leqq 6$ je tato struktura jediná až na difeomorfismus! Jak jsme mohli očekávat (nebo doufat), naše obyčejné eukleidovské prostory R^n, $n \neq 4$ jsou skutečně obyčejné v tom smyslu, že připouštějí jedinou DIFF nebo PL strukturu.

Bylo překvapující, že žádná z technik, které byly vypracovány v uvedených desetiletích, se nedala použít na dimenze, ve kterých žijeme a pracujeme, tj. na dimenze 3 a 4. V dimenzi 3 dosáhl působivého pokroku v posledních šesti letech Thurston, ale mnohem více zbývá ještě udělat. V dimenzi 4 došlo ke stejně dramatickému pokroku v posledních dvou letech. Snad nejvíce překvapující skutečností, která vyšla najevo, je to, že na rozdíl

*) Zde je třeba podotknout, že za stejné považujeme také každé dvě diferencovatelné struktury na varietě M, které přejdou jedna v druhou při některém homeomorfismu variety M na sebe.

(Pozn. překl.)

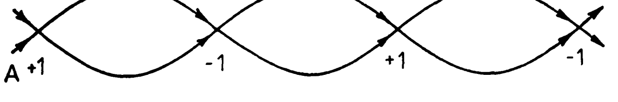
od jiných eukleidovských prostorů, prostor R^4 není tak docela obyčejný: na R^4 existuje exotická DIFF struktura. Existence tohoto exotického R^4, kteý se označuje jako $\mathscr{R}^4$, byla dokázána užitím kombinace topologie (práce M. Freedmana [7]), geometrie a analýzy (práce S. Donaldsona [4]). Tento prostor $\mathscr{R}^4$ je skutečně bizarní tím, že v něm existuje kompaktní množina K, která se nevejde do vnitřku žádné hladce vložené třírozměrné sféry. Protože však $\mathscr{R}^4$ je homeomorfní s R^4, existují zajisté topologicky vložené třírozměrné sféry, které K obsáhnou. To znamená, že horizont prostoru $\mathscr{R}^4$ je extrémně zubatý. (Když se někdy ráno dívám do zrcadla, dospívám k přesvědčení, že žiji v $\mathscr{R}^4$.)

V současné době není známo, kolik existuje takových exotických prostorů R^4, ačkoliv byly nalezeny už tři [8]. Vzhledem k povaze konstrukce topologové spekulují, že existuje nespočetně mnoho různých DIFF struktur na R^4 – vskutku půvabná možnost. Klasifikace DIFF struktur, která je ve vyšších dimenzích diskrétním problémem, by mohla zabloudit do říše geometrie – do celého prostoru modulů DIFF struktur na čtyřrozměrných varietách. Ať už tomu tak je nebo ne, Donaldsonova práce ukázala nemožnost charakterizace DIFF struktur pomocí charakteristických tříd; nejde tedy o diskrétní problém. Přechody k limitám by mohly mít v dimenzi 4 tolik významů! Byly by to dosti tajemné toulky. Proč vlastně existuje takový „$\mathscr{R}^4$"?

Průseková forma

Na začátku tohoto článku jsme řekli, že cílem geometrické topologie je najít algebraické invarianty, které klasifikují (přinejmenším částečně) všechny variety dané dimenze. Z historického hlediska je jedním z nejdůležitějších invariantů *průseková forma*.

Nejlépe snad bude začít s dvojrozměrnými varietami, kde průseková forma a průseková čísla jsou lépe známy. Jednorozměrné třídy homologií na hladké orientované ploše S se dají reprezentovat hladkými orientovanými křivkami. Předpokládejme, že třídy $\alpha, \beta \in H_1(S; \mathbf{Z})$ jsou reprezentovány křivkami A a B. Malou perturbací těchto křivek lze dosáhnout toho, že se protínají transverzálně v izolovaných bodech. To znamená, že v každém průsečíku tvoří tečný vektor ke křivce A spolu s tečným vektorem ke křivce B (v tomto pořadí!) bázi tečného prostoru plochy S. Tomuto průsečíku přiřadíme číslo $+1$, jestliže vzniklá báze je kladně orientovaná vzhledem k S; jinak mu přiřadíme číslo -1. (Orientované) průsekové číslo $A \cdot B$ je definováno jako algebraický součet čísel ± 1 přiřazených všem průsečíkům. Průseková forma je pak dána jako bilineární forma na grupě $H_1(S; \mathbf{Z})$ definovaná vztahem $I_S(\alpha, \beta) = A \cdot B$. Je snadno vidět, že forma I_S je antisymetrická ($I_S(\alpha, \beta) = -I_S(\beta, \alpha)$) a unimodulární. Skutečně, každá taková forma nabývá vzhledem k některé bázi maticového tvaru $\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$.



Obr. 1. Průsekové číslo rovné nule.

Průseková čísla a průseková forma pro hladkou čtyřrozměrnou varietu M jsou definovány podobně. Tentokrát se předpokládá, že *dvojrozměrné* třídy homologií $\alpha, \beta \in H_2(M; \mathbf{Z})$ jsou reprezentovány hladkými orientovanými plochami A a B a že se tyto plochy protínají transverzálně v izolovaných bodech. Opět přiřadíme číslo $+1$ průsečíku, v němž kladná báze tečného prostoru plochy A spolu s kladnou bází tečného prostoru plochy B dává kladnou bázi orientované variety M; jinak průsečíku přiřadíme číslo -1. Průsekové číslo $A \cdot B$ je algebraický součet čísel přiřazených všem průsečíkům a průseková forma je bilineární forma $I_M(\alpha, \beta) = A \cdot B$ definovaná na grupě $H_2(M; \mathbf{Z})$. Tentokrát je ovšem daná bilineární forma symetrická $(I_M(\alpha, \beta) = I_M(\beta, \alpha))$. Je však stále unimodulární – matice formy vzhledem k libovolné bázi má determinant ± 1.

Pro hladké variety existuje jiný způsob, jak definovat průsekovou formu. S pomocí Poincarého duality můžeme definovat naši bilineární formu na grupě kohomologií místo na grupě homologií. Jestliže speciálně použijeme De Rhamovy kohomologie $H^*_{DR}(M)$, potom třídy $\alpha, \beta \in H^2_{DR}(M)$ se dají reprezentovat vnějšími diferenciálními formami a, b druhého stupně na M. Položíme pak jednoduše

$$I_M(\alpha, \beta) = \int_M a \wedge b\,.$$

Jestliže je průseková forma definována na třídách kohomologií, můžeme rozšířit její definici na všechny čtyřrozměrné variety, ať již jsou hladké nebo ne. Jestliže jsou dány $\alpha, \beta \in H^2(M; \mathbf{Z})$ a jestliže $[M] \in H_4(M; \mathbf{Z})$ je fundamentální třída variety M určená její orientací, pak $I_M(\alpha, \beta) = (\alpha \cap \beta)(M)$, kde „$\cup$“ označuje „cup product“ na třídách kohomologií.

Uveďme několik příkladů.

1. Čtyřrozměrná sféra S^4. Protože $H_2(S^4; \mathbf{Z}) = 0$, průseková forma je triviální: $I^4_S = \emptyset$.

2. Komplexní projektivní rovina CP^2. Zde je $H_2(CP^2; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$, a tedy matice průsekové formy I_{CP^2} je (1).

3. Součin dvou sfér $S^2 \times S^2$. V tomto případě $H_2(S^2 \times S^2; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ a generátory grupy se dají reprezentovat vloženými plochami tvaru $A = S^2 \times (\text{bod})$ a $B = (\text{bod}) \times S^2$. Protože A a B se protínají v jediném bodě a průseková čísla $A \cdot A$, $B \cdot B$ jsou zřejmě nuly (malou perturbací lze každou plochu dostat zcela mimo její původní polohu), matice formy $I_{S^2 \times S^2}$ je $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Kummerova plocha

$$K = \{[Z_0, Z_1, Z_2, Z_3] \in CP^3 \mid (Z_0)^4 + (Z_1)^4 + (Z_2)^4 + (Z_3)^4 = 0\}\,.$$

V tomto případě jsou věci složitější. Hodnost grupy $H_2(K; \mathbf{Z})$ je rovna 22 a dá se ukázat, že matice formy I_K má (vzhledem k některé bázi) tvar $E_8 \oplus E_8 \oplus 3 \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, kde

$$E_8 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(Zde E_8 je Cartanova matice výjimečné Lieovy algebry e_8.)

Průseková forma je skutečně základním invariantem pro kompaktní čtyřrozměrné variety. V roce 1958 Milnor [13] ukázal, že homotopický typ kompaktní, jednoduše souvislé čtyřrozměrné variety je jednoznačně určen třídou izomorfismu její průsekové formy.

Klasifikace (až na izomorfismus) celočíselných unimodulárních symetrických bilineárních forem začíná třemi věcmi: hodností (což je dimenze prostoru, na němž je forma definována), signaturou (počet kladných vlastních hodnot minus počet záporných vlastních hodnot, kde vlastní hodnoty jsou ovšem obecně čísla reálná, nikoliv celá) a typem (forma se nazývá sudá, jestliže všechny diagonální elementy v její matici jsou sudá čísla; v opačném případě se forma nazývá lichá). Konečně se forma nazývá pozitivně (negativně) definitní, jestliže všechny její vlastní hodnoty jsou kladné (záporné); jinak je indefinitní.

Pro indefinitní formy tvoří hodnost, signatura a typ úplný systém invariantů [14]. Klasifikace definitních forem je ovšem mnohem obtížnější. Existuje pouze jedno netriviální omezení, kterému jsou podřízeny definitní formy: jejich signatury musí být dělitelné osmi. Fakticky je známo, že forma s maticí E_8 (viz výše) je jedinou pozitivně definitní sudou formou hodnosti 8; dále existují dvě sudé pozitivně definitní formy hodnosti 16 (jejich matice jsou $E_8 \oplus E_8$ a E_{16}); dále máme 24 takových forem s hodností 24 a mnoho tisíc pro hodnost 40.

Máme-li již tuto komplikovanou situaci, je přirozené se ptát, které z našich forem mohou skutečně vystupovat jako průsekové formy čtyřrozměrných variet. Existuje například varieta, jejíž průseková forma má matici E_8 nebo dokonce $E_8 \oplus E_8$? Kummerova plocha se přibližuje odpovědi na druhou otázku, ale do předloňska skutečnou odpověď nikdo neznal.

Topologické čtyřrozměrné variety

Historie nás naučila, že nejdříve začneme obvykle chápat DIFF a PL variety a teprve potom je možno přejít k jemnějším otázkám o TOP varietách. (Připomeňme, že DIFF = = PL v dimenzích ≤ 6). Představte si ten šok, když v létě roku 1981 Michael Friedman oznámil, že kompaktní jednoduše souvislá (tj. taková, na které spojitý obraz kružnice lze vždy doplnit do spojitého obrazu kruhu) TOP varieta dimenze 4 je úplně a věrně popsána dvěma elementárními informacemi:

První z těchto informací je průseková forma variety M, o které jsme právě pojednali.

Druhou informací potřebnou pro Friedmanovu klasifikaci je Kirbyho-Siebemannova obstrukce $\alpha(M) \in \mathbf{Z}_2$. Ta je úplně popsána tvrzením, že $\alpha(M) = 0$, když a jen když varieta $M \times S^1$ připouští diferencovatelnou strukturu.

Freedmanova věta. *Kompaktní jednoduše souvislé čtyřrozměrné TOP variety jsou ve vzájemné jednoznačné korespondenci s dvojicemi $\langle I, \alpha \rangle$, kde I je celočíselná unimodulární symetrická bilineární forma, $\alpha \in \mathbf{Z}_2$, a pokud I je sudá, pak $\sigma(I)/8 \equiv \alpha$* (mod 2). [Zde σ označuje signaturu, pozn. překl.]

Obzvláště platí (existenční část věty): Pro každou celočíselnou unimodulární symetrickou bilineární formu I existuje TOP varieta M_I dimenze 4, která realizuje I jako průsekovou formu. Dále (jednoznačnost): Jestliže je I sudá forma, potom je M_I jednoznačně určena formou I až na homeomorfismus. Pokud je I lichá forma, pak existují přesně dvě nehomeomorfní variety M_I, které realizují I jako průsekovou formu. Jedna z nich má tu vlastnost, že varieta $M \times S^1$ připouští DIFF strukturu a druhá ji nemá. Tak například existují dvě variety realizující formu s jednoprvkovou maticí (1). Jsou to: komplexní projektivní rovina CP^2 a ještě další varieta Ch, která je homotopicky ekvivalentní s CP^2, avšak nepřipouští žádnou diferencovatelnou strukturu.

Jak krásně jednoduché, ale jak pronikavé! Tvrzení o jednoznačnosti pro dvojici $\langle \emptyset, 0 \rangle$ je čtyřrozměrná topologická Poincarého hypotéza, říká, že čtyřrozměrná varieta mající homotopický typ sféry S^4 je homeomorfní s S^4. Současně vychází existence jediné čtyřrozměrné TOP variety s průsekovou formou popsanou maticí E_8 – což je varieta, kterou topologové dlouho hledali.

(Freedmanova původní věta závisela ještě na jedné hypotéze, že totiž M s vyňatým bodem vždy připouští DIFF strukturu. Ale F. Quinn [17] v létě 1982 ukázal, že každá nekompaktní čtyřrozměrná TOP varieta připouští DIFF strukturu, a navíc mnoho dalších důležitých faktů, jako je např. čtyřrozměrná prstencová hypotéza.)

V důkazu Freedmanovy věty se prolínají dvě historicky nezávislé topologické školy – škola chirurgie variet a škola prostorových rozkladů. Důkaz využívá nejúčinnějších technik a nejsilnějších výsledků obou škol.

Diferencovatelné čtyřrozměrné variety

Potom, co byly tak dokonale pochopeny kompaktní jednoduše souvislé TOP 4-variety, udiví, jak málo bylo stále ještě známo o DIFF 4-varietách bezprostředně po důkazu Freedmanovy věty. Neobjevily se žádné nové DIFF 4-variety (ačkoliv zde bylo několik nových kandidátů) a žádného ze starých kandidátů se nepodařilo vyloučit. Prvním náznakem toho, že DIFF 4-variety jsou v něčem zvláštní, byl Rochlinův výsledek z roku 1952 [20].

Rochlinova věta. *Jesliže jednoduše souvislá DIFF 4-varieta má sudou průsekovou formu, potom signatura $\sigma(I)$ je dělitelná 16.*

Připomeňme, že algebraické omezení pro takovou formu záleží v tom, že $\sigma(I)$ má být dělitelné 8, takže topologie DIFF variety klade další omezení na možné průsekové formy. Nyní Freedmanova věta zaručuje existenci kompaktní jednoduše souvislé TOP 4-variety s formou $I_M = E_8$, přičemž víme, že E_8 je sudá forma a $\sigma(E_8) = 8$, takže M nepřipouští žádnou DIFF strukturu!

Až do nedávné doby byly Rochlinova věta a s ní spojené invarianty signatury jedinými nástroji, které jsme měli k dispozici při studiu DIFF 4-variet. (Je udivující, že jsme se s tak málem dostali tak daleko!). Po otřesu způsobeném Freedmanovou prací se začaly koncem roku 1981 šířit pověsti, že matematičtí fyzikové dokázali vypátrat novou obstrukci pro existenci diferencovatelné struktury na čtyřrozměrné varietě. Potom v létě 1982, na první pravidelné letní vědecké konferenci pořádané Americkou matematickou společností v New Hampshire (akci, která byla plánována dávno před Freedmanovou prací), specialisté v topologii 4-variet prožili další otřes, když narazili na zapomenuté kořeny svého oboru – byla nám naordinována silná dávka geometrie a analýzy, abychom mohli pochopit pozoruhodnou větu Simona Donaldsona [4], graduovaného studenta z Oxfordu.

Donaldsonova věta. *Nechť M je kompaktní jednoduše souvislá DIFF 4-varieta s pozitivně definitní průsekovou formou I. Potom je I ekvivalentní nad okruhem celých čísel se standardní diagonální formou* $\operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1)$.

Speciálně je známo, že matice $E_8 \oplus E_8$ se nedá diagonalizovat nad okruhem celých čísel, takže Freedmanova TOP 4-varieta $M_{E_8 \oplus E_8}$ nepřipouští diferencovatelnou strukturu – skutečnost, která nemůže být rozpoznána pomocí charakteristických tříd.

Důkaz Donaldsonovy věty je těsnou kombinací topologie, diferenciální geometrie a analýzy – ta poslední je nediskrétní složkou, kterou topologové postrádali (viz přílohu „Riemannovy 4-variety").

Existence exotického $\mathscr{R}^4$ se nyní dokáže nepřímo. Freedman našel topologickou konstrukci variety $M_{E_8 \oplus E_8}$ z Kummerovy plochy K. Odborníci si povšimli, že jestliže R^4 má jedinou diferencovatelnou strukturu, může být tato konstruce provedena diferencovatelně, takže jako výsledek dá diferencovatelnou varietu. Protože Donaldson ukázal, že taková varieta nemůže existovat, R^4 *nemá* jedinou diferencovatelnou strukturu.

Studium TOP a DIFF 4-variet je stále aktuální. Zůstává zde problém charakterizace TOP 4-variet, které nejsou jednoduše souvislé. (Freedman učinil v poslední době jistý pokrok.) Celá oblast DIFF 4-variet je široce otevřena – doufám, že dostatečně široce na to, aby mohla do sebe pojmout nové postupy dodané analýzou a geometrií. Stále jsme ještě nevyřešili hladkou variantu čtyřrozměrné Poincarého hypotézy (připouští sféra S^4 exotické DIFF struktury?). Jaká je rozumná charakterizace jednoduše souvislých DIFF 4-variet? Možná, že existují jen takové, které už známe, totiž (až na orientaci) „souvislé součty" S^4, CP^2 a algebraických ploch. Pro začátek si můžeme položit tento problém: dá se realizovat průseková forma s maticí $E_8 \oplus E_8 \oplus 2 \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pomocí některé DIFF 4-variety?

Naznačili jsme zde pouze příchuť posledních událostí v topologii čtyřrozměrných variet. Pro další, hlubší a úplnější informaci o Freedmanově větě vám mohu doporučit sérii článků [3, 21, 7, 22]. Jako teoretické podklady důležité pro Donaldsonovu větu doporučuji sérii [19, 16, 2, 5, 6].

Závěrečné motto:

There's something that I have to prove. ... I don't know what it is ... or to whom I have to prove it. ... I only know it is. ... It keeps me busy day and night ... reaching for the sky. ... Working, straining, cursing out ... seldom asking why. ... It drives me like a raging storm ... to whatever end ... hoping that with conquest ... I will comprehend.
— *Vas*

Dodatky

V původní verzi článku jsou uvedeny tři dodatky, které uvádějí více technických podrobností k důkazovým metodám. Jejich doslovný překlad by jednak narážel na terminologické potíže, jednak by od čtenáře vyžadoval řadu speciálních znalostí. Proto se (se souhlasem autora) omezujeme na redakčně upravené zkratky těchto poznámek.

1. Riemannovy 4-variety — důkaz Donaldsonovy věty

Čtenář se patrně na tomto místě již podiví, proč se v názvu článku vůbec objevilo slovo „instanton". Celá věc souvisí právě s důkazem Donaldsonovy věty, kde se využívá metod současné teoretické fyziky.

Nejen topologové, ale také diferenciální geometři si byli již dlouho vědomi toho, že čtyřrozměrný prostor má některé pozoruhodné vlastnosti, které je odlišují od prostorů jiných dimenzí. Základním faktem je, že grupa přímých rotací $SO(n)$ prostoru R^n je pro $n \neq 4$ jednoduchou Lieovou grupou, zatímco grupa $SO(4)$ je lokálně izomorfní s direktním součinem $SO(3) \times SO(3)$ (přesněji platí, že Spin $(4) = SU(2) \times SU(2)$). Lieovu algebru $so(4)$ grupy $SO(4)$ lze ztotožnit s vektorovým prostorem $\Lambda^2(R^4)$ vnějších 2-forem na R^4 (chápaném jako vektorový prostor se skalárním součinem). Rozkladu Lieovy algebry $so(4) = so(3) \oplus so(3)$ pak odpovídá rozklad prostoru vnějších 2-forem ve tvaru $\Lambda^2(R^4) = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$, který má invariantní smysl. Na základě toho můžeme rozložit fibrovaný prostor $\Lambda^2(T^*M)$ všech vnějších (algebraických) 2-forem na čtyřrozměrné Riemannově varietě M jako Whitneyovu sumu $\Lambda^2(T^*M) = \Lambda^2_+(M) + \Lambda^2_-(M)$.

Dále se uvažuje hlavní fibrovaný prostor ξ nad M se strukturální grupou $SU(2)$ a na něm lineární konexe ∇. Křivost R^∇ konexe ∇ je vnější diferenciální 2-forma s hodnotami v jistém vektorovém fibrovaném prostoru asociovaném s ξ a na základě hořejšího rozkladu se dá jednoznačně rozložit ve tvaru $R^\nabla = R^\nabla_+ + R^\nabla_-$. Jestliže složka R^∇_- (resp. R^∇_+) se identicky anuluje, potom se ∇ nazývá *samoduální* (resp. *antisamoduální*) konexe. Každá samoduální konexe v ξ je řešením tzv. samoduálních Yangových-Millsových (YM) rovnic (které jsou složitější verzí Maxwellových rovnic.) Těmto řešením se někdy říká *instantony*.

Problém úplného popisu všech instantonů byl v [1] úspěšně řešen ve speciálním případě, kdy základní varietou je sféra S^4 a hlavní fibrovaný prostor ξ s grupou $SU(2)$ má vhodné topologické vlastnosti (první Pontrjaginova třída $p_1(\xi) = 4$). Zde se ukázalo, že „prostor modulů" všech řešení YM rovnic je ve skutečnosti pětirozměrná otevřená koule.

Jak je tomu u obecnějších variet? Nechť M je čtyřrozměrná jednoduše souvislá a kompaktní Riemannova varieta a ξ hlavní fibrovaný prostor nad M se strukturální grupou $SU(2)$ a takový, že $p_1(\xi) = 4$. Takovou situaci lze zkonstruovat pro každou (jednoduše souvislou a kompaktní) čtyřrozměrnou DIFF varietu – a to je právě výchozí bod Donaldsonova důkazu. C. H. Taubes [23] ukázal, že pokud má M pozitivně definitní průsekovou formu, existuje pro ξ alespoň jedno ireducibilní řešení YM rovnic, tj. samoduální konexe ∇, pro kterou se strukturální grupa $SU(2)$ nedá redukovat na podgrupu $SO(2)$. Užitím Atiyahovy-Singerovy věty o indexu eliptického operátoru a teorie deformací pro samoduální formy se dojde k závěru, že prostor modulů řešení YM rovnic je opět v *podstatě* pětirozměrná varieta, ale s určitou množinou singulárních bodů. Některé z těchto singularit jsou z povahy věci neodstranitelné a odpovídají reducibilním řešením YM rovnic. Poté, co se odstraní „nadbytečné" singularity (např. vhodnou perturbací výchozí metriky), se současně použije na varietu M konstrukce jistých kobordismů a na její průsekovou formu I_M Grammův-Schmidtův ortogonalizační proces. Tím se ukáže, že forma I_M je ekvivalentní průsekové formě disjunktního sjednocení konečně mnoha kopií projektivní roviny CP^2 a že se dá tedy uvést na diagonální tvar. To je (velmi stručný a zjednodušený) popis především analytické části Donaldsonovy důkazu. Zcela jsme vynechali bližší objasnění některých důmyslných topologických konstrukcí.

2. Komentář k Freedmanovu důkazu

V obvyklé „chirurgii variet" se často používají konstrukce následujícího typu na DIFF varietách: představme si DIFF varietu s komplikovanými grupami homologií (např. vícerozměrnou analogii sféry s mnoha „držadly"). Úkolem je „odříznout" z této variety určitý počet držadel a vzniklé otvory „zalepit" tak, aby vznikla nová DIFF varieta s předepsanými jednoduššími grupami homologií. Problém je, že v obecném případě jsou sama držadla komplikovanými DIFF varietami, pro něž je třeba nalézt nějaké názornější modely a odtud určit jejich homologické vlastnosti; stejně tak je třeba vyšetřit diferenciálně-topologické vlastnosti okrajů vzniklých otvorů apod.

Freedmanův obecnější postup lze ilustrovat na konstrukci (principiálně nehladké) TOP variety s průsekovou formou typu $E_8 \oplus E_8$, vyjdeme-li z hladké Kummerovy plochy K, jejíž průseková forma má matici $E_8 \oplus E_8 \oplus 3 \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. V roce 1973 A. Casson ukázal, jak lze každou ze tří podgrup druhé homologické grupy plochy K odpovídající některé z matic $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ reprezentovat pomocí tzv. vložených (pružných a zauzlených) „Cassonových držadel". Cassonova držadla jsou složité objekty, zejména pokud jde o jejich DIFF strukturu. Freedmanova metoda záleží v tom, že se vyšetří pouze TOP vlastnosti držadel a pak se provádí „zobecněná chirurgie" na TOP varietách: držadla se odříznou, otvory se zalepí a vznikne žádaná nová varieta. Celý problém je ovšem spočítat, co se při těchto operacích skutečně děje. Zde je nutno pracovat s obecnějšími topologickými prostory, než jsou TOP variety; důležitou roli zde hraje tzv. Whiteheadovo kontinuum. Využívají se také nejdůležitější výsledky z teorie rozkladů prostorů, které v průběhu několika desetiletí vypracovala „konkurenční" topologická škola.

3. Konstrukce prostoru $\mathscr{R}^4$

Jak bylo řečeno výše, $M_{E_8 \oplus E_8}$ existuje pouze jako TOP varieta, nikoliv jako DIFF varieta (Donaldson). Aby se tato varieta obdržela operováním Kummerovy plochy K, bylo třeba nejprve odříznout tři Cassonova držadla (což jsou DIFF variety). Freedmanovými metodami se dá ukázat, že každé Cassonovo držadlo je homeomorfní s prostorem typu $S^2 \times S^2 - B^4$ (kde B^4 je uzavřená čtyřrozměrná koule). Kdyby všechna držadla byla dokonce difeomorfní s $S^2 \times S^2 - B^4$, obdržela by se varieta $M_{E_8 \oplus E_8}$ pomocí obvyklé DIFF chirurgie, tj. byla by hladká, což není možné. Proto alespoň jedno z Cassonových držadel CH_i nemá tuto vlastnost. Toto držadlo se však dá topologicky vložit do standardního součinu $S^2 \times S^2$ a zkoumá se nyní doplňková množina X_i. Tato množina nemusí být ovšem homeomorfní s koulí B^4, ale podle jedné věty od R. D. Edwardse má tvar speciálního průniku („nested intersection") takových (topologických) koulí v $S^2 \times S^2$. Vnitřek jedné z těchto koulí opatřený DIFF strukturou indukovanou z $S^2 \times S^2$ je hledaný exotický prostor $\mathscr{R}^4$.

Poznamenejme ještě, že exotický $\mathscr{R}^4$ nelze hladce vložit do standardní sféry S^4 a dokonce ani do žádné DIFF 4-variety s pozitivně definitní průsekovou formou.

Literatura

[1] M. Atiyah, N. Hitchin and I. Singer (1978): *Selfduality in four dimensional Riemannian geometry.* Proc. R. Soc. London Ser. A. *362*, 425—461.

[2] J. P. Bourgignon, H. B. Lawson, Jr. (1982): *Yang-Mills theory: Its physical origins and differential geometric aspects.* In *Seminar on Differential Geometry,* S. T. Yau, ed., Annals of Mathematics Studies 102. Princeton University Press, Princeton, N. J., pp. 395—422.

[3] A. Casson (1980): *Three lectures on new infinite constructions in 4-dimensional manifolds.* Notes prepared by L. Guillov, Prepublications Orsay 81T06.

[4] S. K. Donaldson: *An application of gauge theory to the topology of 4-manifolds.* J. Diff. Geom. *18*, 279—315.

[5] T. Eguchi, P. Gilkey and A. Hanson (1980): *Gravitation, gauge theories and differential geometry.* Phys. Rep. *66*, 213—393.

[6] D. Freed, M. Freedman and K. K. Uhlenbeck (1982): *Gauge theories and 4-manifolds.* MSRI Berkeley Preprint.

[7] M. Friedman (1983): *The topology of four dimensional manifolds.* J. Diff. Geom. *17*, 357—454.

[8] R. Gompf: *Three exotic $\mathscr{R}^4$'s and other anomalies.* J. Diff. Geom. *18*, 317—328.

[9] M. Hirsch and B. Mazur (1974): *Smoothing of Piecewise Linear Manifolds.* Annals of Mathematics Studies *80.* Princeton University Press, Princeton, N.J.

[10] B. Kerékjártó (1923): *Vorlesungen über Topologie,* Vol. I, *Flachen Topologie.* Springer, New York.

[11] R. Kirby and L. Siebenmann (1977): *Foundational Essays on Topological Manifolds, Smoothing, and Triangulations.* Annals of Mathematics Studies *88.* Princeton University Press, Princeton, N.J.

[12] J. Milnor (1956): *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere.* Ann. Math. *64*, 399—405.

[13] J. Milnor (1958): *On simply connected 4-manifolds.* Symposium International Topologia Algebraica, Mexico, pp. 122—128.

[14] J. Milnor and D. Husemoller (1973): *Symmetric Bilinear Forms*. Springer-Verlag, New York
[15] E. Moise (1952): *Affine structures on 3-manifolds*. Ann. Math. *56*, 96—114.
[16] T. Parker (1982): *Gauge theories on four dimensional Riemannian manifolds*. Commun. Math. Phys. *85*, 1—40.
[17] F. Quinn (1982): Ends III. J. Diff. Geom. *17*, 503—521.
[18] T. Rado (1925): *Über den Begriff der Riemannschen Fläche*. Acta Litt. Sci. Univ. Szegd. *2*, 101—121.
[19] J. H. Rawnsley (1981): *Differential Geometry of Instantons*. Communications of Dublin Institute for Advanced Studies, Series A (Theoretical Physics), No. 25.
[20] V. A. Rochlin (1974): *New results in the theory of 4-dimensional manifolds* (Russian). Dokl. Akad Nauk. SSSR, *84*, 221—224.
[21] L. Siebenmann (1978—1979): *Amorces de la chirurgie en dimension quatre: Un $S^3 \times \mathbf{R}$ exotique (d'après A. Casson and M. Freedman)*. Sem. Bourbaki, No. 536.
[22] L. Siebenmann (1981—1982): *La conjecture de Poincaré topologique en dimension 4 (d'après M Freedman)*. Sem. Bourbaki, No. 588.
[23] C. H. Taubes (1982): *Self-dual Yang-Mills connections on non-self-dual 4-manifolds*. J. Diff. Geom. *17*, 139—170.
[24] J. H. C. Whitehead (1940): *On C^1 complexes*. Ann. Math. *41*, 809—832.
(Department of Mathematics, University of Utah, Salt Lake City, Utah 84112)

Přeložil a Dodatky zpracoval Oldřich Kowalski.

Užití fuzzy množin v rozhodování za neurčitosti

František Šik, Brno

1. Úvod

Autoři článku [2] M. Černý, J. Nekola a V. Novák obšírně vysvětlili, co to je teorie fuzzy množin, vyložili, jak bohatě se tato teorie rozvětvila, které oblasti matematiky jsou již metodami fuzzy množin propracovávány a jaké jsou perspektivy dalšího vývoje. Čtenář, který zná tento článek, je jistě už na straně fuzzy teorie — aspoň jednou nohou. Aby byl oběma, potřebuje konkrétní aplikace. Cílem tohoto článku je přinést ukázku aplikace. K pochopení je nutná tak malá dávka teorie fuzzy množin, že se dá vyložit a také bude vyložena v několika odstavcích.

V úvodu bývají často anticipovány myšlenky, které by měly být rozvedeny předtím. Je to snad proto, aby navodily věci příznivou atmosféru. Věřím, že ta bude vyvolána citací několika řádků z knihy D. Duboise a H. Prada [3]. „Tato teorie je atraktivní, protože je založena na velmi intuitivní, i když poněkud subtilní myšlence, schopné vytvářet mnoho rozumně a přitažlivě působících závěrů, které umožňují nový pohled na staré, často diskutované otázky. Názory na důležitost teorie fuzzy množin se ještě