Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Ja. S. Dubnov

Trigonometrie ve školním kursu geometrie

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 4 (1959), No. 6, 664--673

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138381

Citovaná literatura:

[1] J. Janko, *Základy statistické indukce*, SÚS, Praha 1937.
[2] J. Janko, *Jak vytváří statistika obrazy světa a života I* (1924), *II* (1944), „Cesta k vědění" sv. 22, 26, JČMF, Praha.
[3] F. Fabian, *První pracovní konference čs. matematických statistiků*, Časopis pro pěstování matematiky, 1, sv. 80, ČSAV Praha.
[4] Kolektiv výzkumného ústavu těžkého strojírenství — Výzkum teoretický, *Směrnice pro statistickou kontrolu jakosti a regulaci výrobních pochodů*, SNTL Praha 1953.
[5] *Transactions of the First Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes, held at Liblice near Prague from November 28 to 30, 1956*, ČSAV Prague, 1957.
[6] J. Janko, *Statistické tabulky*, ČSAV Praha, 1958.
[7] V. Myslivec, *Statistické metody zemědělského a lesnického výzkumnictví*, ČSAZV Praha 1957.

TRIGONOMETRIE VE ŠKOLNÍM KURSU GEOMETRIE*)

JA. S. DUBNOV (Moskva)

Matematika v sovětské škole se skládá ze čtyř částí: aritmetiky, algebry, geometrie a trigonometrie. V standardních učebnicích jsou tyto čtyři části zpracovány na sobě značně nezávisle, a drží-li se učitel přesně těchto učebnic, vzniká často u žáků dojem, že uvedené čtyři části spolu téměř vůbec nesouvisí. V 9. třídě sovětské školy se probírají goniometrické funkce ostrých úhlů v rámci geometrie a vlastní trigonometrie jako celek je zařazena do 10. třídy. Autor článku podává návrh, jak čelit zbytečné roztříštěnosti vyučování. Je zajímavé porovnat autorovy návrhy s tím, jak se s touto otázkou vyrovnali autoři našich učebnic z r. 1954, které byly zpracovány na základě osnov, jež jsou do značné míry odrazem osnov sovětských.

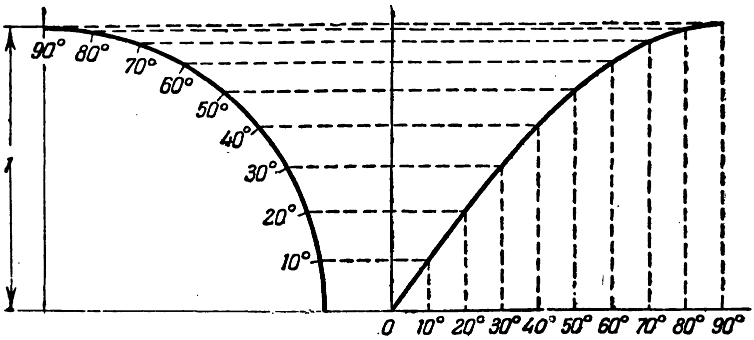
Doc. Dr. Karel Hruša

Mnozí učitelé středních škol projevují nespokojenost se zařazením kapitoly o goniometrických funkcích ostrého úhlu do učiva osmé třídy. Namítají, že 1. tato kapitola tvoří nesourodou část učiva, narušující styl výkladu geometrie (na čas se ztrácejí věty, poučky ap.); 2. poznatky žáků z trigonometrie visí proti ostatním částem geometrie „ve vzduchu" (nemají použití v učivu osmé třídy) a proto je žáci snadno zapomenou; 3. v nejlepším případě si zapamatují definice goniometrických funkcí pomocí poměrů stran v pravoúhlém trojúhelníku, a to potom spíše ztěžuje osvojování obecnějších definic v deváté třídě (je potom nutné „přeučování"); 4. úryvek trigonometrie v učivu osmé třídy je projevem snah o soustředění látky a většina našich pedagogů se k tomu staví záporně.

Když se těmto kritikům ukáže vhodnost této kapitoly, skýtající možnosti pro polytechnisaci výuky (vyměřování v terénu, používání tabulek, konstrukce grafů a jejich srovnávání s tabulkami, práce síly ve fysice), odvětí, že nikdo nevylučuje tuto tematiku a že jde jen o to ji odložit o rok a zahrnout v jeden „systematický" kurs trigonometrie.

*) Я. С. Дубнов, *Тригонометрия в школьном курсе геометрии*, Matěmatičeskoje prosveščenije, 1957, č. 1.
Článek je rozšířená přednáška, kterou měl autor dne 19. 1. 1956 ve školské sekci Moskevské matematické společnosti (*Moskovskoje matěmatičeskoje obščestvo*).

Dosavadní osnovu podrobím i já kritice, nikoli však z hlediska výše uvedených čtyř bodů. K těmto bodům bych chtěl poznamenat: 1. Nad zásahem do euklidovského stylu výkladu geometrie lze se jen sotva znepokojovat. Naopak je žádoucí upustit od tohoto způsobu výkladu, aby se tak odstranily rozdíly mezi výklady geometrie a ostatních matematických disciplin. V současné době je už jen málo lidí, kteří tvrdí, že geometrie zaujímá zvláštní místo uvnitř matematiky. 2. Konstatování, že pro poznatky z goniometrie není v učivu osmé třídy použití, je správné. Avšak z toho nutno vyvodit jiné důsledky: nikoli škrtnout tuto partii, ale dát jí více místa — zcela organicky ji začlenit do geometrie. Jak se to dá udělat výhodně jak pro geometrii tak pro goniometrii, bude ukázáno níže. 3. Je pravda i to, že omezení se na funkce ostrého úhlu způsobuje jisté potíže při pozdějším rozšíření definic těchto



Obr. 1.

funkcí. Ale to dává právě podnět k tomu, aby se již v osmé třídě definovaly funkce i pro tupý úhel. V dalším bude ukázáno, jak to lze udělat opět s výhodou pro geometrii. 4. Nemohu souhlasit s odsouzením snah po soustředění látky, které je v řadě případů pedagogicky opodstatněné, jindy však oprávněné jen současným vyučováním (rozšíření číselných oborů, zobecnění pojmu mocniny aj.).

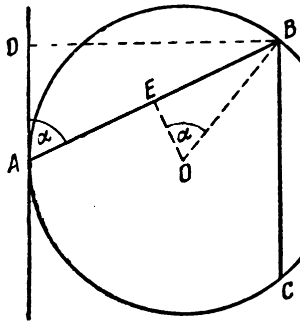
Další výklad se rozpadá na dvě části: prvá obsahuje návrhy proveditelné v rámci platných osnov; budou užitečné pro učitele, kteří se rozhodnou nepracovat podle běžné šablony. Zde a všude jinde jsem se vyhnul podrobnému „metodickému rozpracování“, abych tím učitele neomezoval. Druhá část obsahuje návrh na změnu osnovy, přesněji, návrh na přeskupení učiva uvnitř osnovy geometrie a trigonometrie pro osmou a devátou třídu. Změny nikde nevedou k zvětšení objemu učiva, naopak umožňují zjednodušit, racionalisovat i podstatně zkrátit osnovu matematiky (a to v tom poměru, do jaké míry radikálně bude přijata závěrečná část této statě).

1. Funkce ostrého úhlu. V osmé třídě lze bezprostředně za kapitolou o podobnosti trojúhelníků (mnohoúhelníků) zavést funkce sin α, cos α, tg α ($0 < \alpha < 90°$) pomocí poměrů délek stran pravoúhlého trojúhelníka.

Přitom definici osvětlujeme 1. úlohami na grafické stanovení hodnot zavedených funkcí (v hrubém přiblížení) pro úhly dané graficky nebo ve stupních (s výhodou zde používáme milimetrového papíru); 2. úlohami na sestrojení ostrého úhlu, je-li známa funkční hodnota některé funkce; při tom ukážeme, v jakých mezích lze tyto hodnoty pro různé funkce volit.

Potom přistoupíme k práci s tabulkami zavedených tří funkcí a probereme vzorce tg $\alpha = \sin \alpha : \cos \alpha$, $\sin (90° - \alpha) = \cos \alpha$, $\cos (90° - \alpha) = \sin \alpha$, které prověřujeme pro několik hodnot α na funkčních hodnotách vyhledaných v tabulkách. Pomocí tabulek sestrojíme grafy uvedených tří funkcí na intervalu $\langle 0°, 90 \rangle°$, nanášejíce na první souřadnicovou osu délky úměrné velikostem úhlů, např. přímo velikosti úhlů ve stupních, a na druhou souřadnicovou osu hodnoty funkcí ve vhodném měřítku.[1]) Je rovněž vhodné ukázat žákům konstrukci grafu bez použití tabulek pomocí trojúhelníka, kružítka a úhloměru tak, jak je to pro funkci $\sin \alpha$ ukázáno na obr. 1. Předpokládáme, že by se potom pomocí tabulek řešila řada úloh, v nichž na základě daných úhlů a délek se mají stanovit neznámé úhly a délky, a to zatím pro pravoúhlé, popř. rovnoramenné trojúhelníky a pro kosočtverce. Máme-li časové možnosti, vyřešíme několik praktických úloh „z terénu" na základě odhadnutých nebo skutečně změřených veličin.

Zde zpravidla končí první, příliš krátký výklad trigonometrie, ke které se zase dostáváme až teprve v deváté třídě. Takový stav věcí je ale neuspokojivý. Ve všech následujících kapitolách geometrie osmé třídy lze totiž s výhodou použít goniometrie ostrého úhlu. Učiteli, který by takto postupoval, nemůže nikdo namítat, že rozšiřuje osnovu; nebude totiž probírat nic, co by přesahovalo tuto osnovu, ani nepřekročí stanovený čas. Nyní ukážeme: a) řešení úloh, které jsou tradičně chápány jako čistě geometrické; b) výklad geometrických faktů předepsaných osnovou prostředky trigonometrie.



Obr. 2.

a) Začnu s příkladem ze sbírky geometrických úloh N. Rybkina[2]).

Poloměr kružnice je 8 dm; sečna $AB = 12$ dm. Bodem A je vedena tečna a z bodu B sečna BC rovnoběžně s uvedenou tečnou. Stanovte vzdálenost mezi tečnou a sečnou BC.

Předkládám řešení (s rozborem; obr. 2): hledanou vzdáleností bude délka BD části kolmice spuštěné z bodu D na tečnu AD. V trojúhelníku ABD však známe přeponu AB a proto nám pro výpočet délky BD stačí (a je nutné) stanovit $\sin \alpha$ ($\alpha = \sphericalangle BAD$). Je ihned vidět, že $\alpha = \sphericalangle AOE = \sphericalangle BOE$, kde E je střed sečny AB. $\sin \alpha$ vypočteme např. z trojúhelníka BOE, v němž známe $OA = 8$, $BE = 6$. Tedy $\sin \alpha = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ a odtud $BD = AB \sin \alpha = 12 . \frac{3}{4} = 9$ (dm). Jak vidíme je řešení velmi jednoduché.

Zde bychom byli vystačili i s podobností trojúhelníků (ABD a OBE); to jde i v řadě jiných příkladů, které lze řešit goniometrickými funkcemi bez použití tabulek. Avšak není jeden poměr (goniometrická funkce) jednodušší než rovnost dvou poměrů (úměra)?[3]) Jestliže jsme již goniometrické funkce probrali, proč bychom je neměli použít v každém vhodném případě?

[1]) Pokud by někteří učitelé považovali za správné používat jen takových grafů, kde bylo na obou souřadnicových osách zvoleno totéž měřítko (a nikoli např. na jedné ose velikost úhlu ve stupních a na druhé délka úsečka), budiž jim připomenuto, že tím by došlo k nepříjemné diskrepanci s fysikou, kde téměř vždy jsou argument a funkční hodnota různými veličinami.

[2]) Н. Рыбкин (ч. I., § 11, № 45, изд. 6, 1937).

[3]) Analogická je situace v aritmetice, např. při řešení příkladu: 7 sešitů stojí 91 hal.; kolik stojí 5 sešitů? První způsob: 91 : 7 = 13 (hal); 13 × 5 = 65 hal. Druhý způsob: 7 : 91 = 5 : x, atd.

b) Při důkazech různých pouček je mnoho možností výhodného použití goniometrických funkcí. Ukážeme to na odvození vztahů mezi základními prvky pravoúhlého trojúhelníka.

Podívejme se na známý obrázek (obr. 3); úhel při vrcholu C je pravý, ostatní označení je zřejmé k obrázku. Výška h rozděluje trojúhelník ABC na dva trojúhelníky I a II. Úhel α se objevuje v každém z uvažovaných tří trojúhelníků. Hodnotu goniometrických funkcí tohoto úhlu můžeme vyjádřit trojím způsobem pomocí prvků na obrázku vyznačených (a to tak, aby přitom bylo použito všech stran každého trojúhelníka); přehledně je to zachyceno v následující tabulce:

Funkce	Trojúhelník		
	ABC	I	II
$\sin\alpha$	$\frac{a}{c}$	$\frac{h}{b}$	$\frac{a'}{a}$
$\cos\alpha$	$\frac{b}{c}$	$\frac{b'}{b}$	$\frac{h}{a}$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\frac{a}{b}$	$\frac{h}{b'}$	$\frac{a'}{h}$

Porovnáním výrazů pro jednotlivé funkční hodnoty dostaneme vztahy mezi a, b, c, a', b', h ve tvaru devíti úměr, z nichž jen některé jsou zajímavé. Jde zejména o tyto úměry:

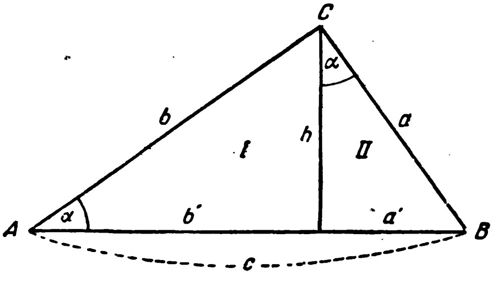
$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{a}\,, \quad \frac{b}{c} = \frac{b'}{b}\,, \quad \frac{h}{b'} = \frac{a'}{h}\,,$$

z nichž plynou vztahy

$$a^2 = ca'\,,\ b^2 = cb'\,,\ h^2 = a'b'\,, \tag{1}$$

které tvoří obsah známých Eukleidových vět. Ještě jedna úměra, vzniknuvší porovnáním prvých dvou výrazů pro $\sin\alpha$, stojí za povšimnutí:

$$\frac{a}{c} = \frac{h}{b} \quad \text{čili} \quad ab = ch$$



Obr. 3.

(„součin odvěsen se rovná součinu přepony a jí příslušné výšky“). Tento vztah, kterého se často používá při řešení různých úloh, se zpravidla odkládá až do kapitoly o obsahu nebo se o něm vůbec nezmiňujeme.

Jak vidíme, goniometrické funkce umožňují, že nemusíme uvažovat příslušné podobné trojúhelníky. Úvahy se mně zdají lépe uspořádané a neopírají se o žádné dříve probrané věty. Kromě toho je žádoucí, aby slovní formulace výsledku následovala až po odvození vztahu, nikoli před tím (tu bude také nutno odmítnout euklidovskou tradici).

Z prvních dvou rovnic (1) dostaneme obvyklým způsobem Pythagorovu větu: $a^2 + b^2 = c^2$, a vrátíme-li se opět k trigonometrii:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1\,, \quad \text{čili} \quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\,.$$

Poslední vztah umožňuje vypočítat jednu z funkcí sinus, cosinus pomocí druhé a použijeme-li ještě rovnice $\operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha : \cos\alpha$, můžeme stanovit kteroukoli z funkcí sinus, cosinus, tangens, jakmile známe jednu z nich. S žáky potom probíráme úlohy jako např.: v tabulkách pro všechny tři funkce necháme zakrýt proužkem papíru jeden sloupec, načež necháme v určeném řádku stanovit zakryté číslo (poněkud složitější úlohu dostaneme, necháme-li zakrýt dva sloupce). Vypočtená čísla potom porovnáme s příslušnou hodnotou v tabulce, přihlížejíce ovšem k přibližnému charakteru tabelovaných hodnot.

Nyní již není těžké si sestrojit a postupně zapamatovat tabulku hodnot (přesných i přibližných) funkcí sinus, cosinus, tangens úhlů 30°, 45°, 60° a používat jich při řešení úloh všude tam, kde se tyto úhly vyskytují.

Bezprostředně můžeme této tabulky použít v kapitole o mnohoúhelnících. Označíme-li R poloměr kružnice a a_n resp. b_n stranu pravidelného n-úhelníka této kružnici vepsaného resp. opsaného, snadno odvodíme, že

$$a_n = 2R\sin\frac{180°}{n}\,, \quad b_n = 2R\operatorname{tg}\frac{180°}{n}\,. \tag{2}$$

Pomocí těchto vzorců a uvedené tabulky snadno vypočítáme a_3, b_3, a_4, b_4, a_6, b_6 (některé z těchto výsledků dostaneme snadněji geometrickou úvahou; to je nutno provést).

Jako cvičení je užitečné vypočítat b_n pomocí a_n a R; k tomu stačí vyloučit $180°/n$ z (2), např. tak, že z první rovnice (2) najdeme

$$\cos\frac{180°}{n} = \sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4R^2}}\,, \tag{3}$$

a odtud a z druhé rovnice (2)

$$b_n = \frac{2R\sin\dfrac{180°}{n}}{\sqrt{1 - \dfrac{a_n^2}{4R^2}}} = \frac{a_n}{\sqrt{1 - \dfrac{a_n^2}{4R^2}}}\,.$$

Těchže vzorců (2) lze použít, jestliže např. chceme vypočítat obvod pravidelných vepsaných a opsaných 180-úhelníků. Vychází $360R\sin 1°$ a $360R\operatorname{tg} 1°$; $\sin 1°$ a $\operatorname{tg} 1°$ najdeme v tabulkách, je však třeba počítat se zvětšením chyby tabulek při násobení 360.

Máme tak v celé planimetrii mnoho důvodů vrátit se k práci s goniometrickými funkcemi ostrého úhlu; vidíme znovu jejich užitečnost při výuce geometrii.

2. Funkce tupého úhlu. Vyšetřování závislostí mezi prvky obecného trojúhelníka zůstává nicméně neúplným, pokud nejsou zavedeny goniometrické funkce tupého úhlu; vždyť některý z úhlů v trojúhelníku může být tupý. Umělé omezení na funkce ostrého úhlu si vynucuje dvojí formulaci takových vět, jako je věta kosinová (výpočet čtverce strany trojúhelníka z délky ostatních dvou stran a úhlu jimi sevřeného)[4]). Dále nastíněný plán výkladu funkcí tupého úhlu, který lze zahrnout do kursu geometrie, přesahuje rámec programu 8. třídy, nepřesahuje však rámec programu matematiky jako celku.

Reálnost vzájemného přeřazení některých otázek geometrie a trigonometrie nemůže být sporná, neboť program vyšších tříd se nijak nerozšiřuje (naopak ukazuje se možným některé věci vyjmout) a zrušení „nepropustných přehrad“ (F. Klein) mezi dvěma příbuznými obory může jen usnadnit výklad, ušetřit čas a síly žáků.

Formálně přechod od ostrého úhlu k tupému není obtížný: stačí definovat sinus tupého úhlu jako sinus vedlejšího úhlu a kosinus tupého úhlu jako kosinus příslušného vedlejšího úhlu s opačným znaménkem. Tedy podle definice je

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha\,, \quad \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha\,, \text{ pro } 0 < \alpha < 90°; \tag{4}$$

na tomto místě (zjeména v souvislosti se slovní formulací: „siny vedlejších úhlů jsou si rovny, kosiny ... se liší pouze znaménkem ") lze objasnit, že vztahy (4) platí i pro $90° < \alpha < 180°$. Ukáže se nyní, že je přirozené (zejména v souvislosti s konstrukcí grafů pro funkce s rozšířením definičním oborem) položit

$$\sin 0° = \sin 180° = 0\,, \quad \sin 90° = 1\,, \quad \cos 90° = 0$$
$$\cos 0° = 1\,, \quad \cos 180° = -1\,,$$

a tím jsme definovali $\sin\alpha$ a $\cos\alpha$ pro všechna α v intervalu $0° \leqq \alpha \leqq 180°$. Funkci $\operatorname{tg}\alpha$ lze v témže intervalu definovat poměrem $\sin\alpha : \cos\alpha$ pro $\alpha \neq 90°$.

Obtížnějším pedagogickým úkolem je přesvědčit žáky o účelnosti těchto definic (není to ovšem obtížnější než např. při zobecňování mocniny na případ mocnitele, který není přirozené číslo). Stačí vyslovit pro goniometrické funkce takovou zobecňující definici, která by zahrnovala všechny dosud užívané definice. Nejjednodušší cestou je zde zřejmě použití souřadnicové soustavy, se kterou se žáci již dobře seznámili: umístíme úhel v souřadnicové rovině tak, aby jeho vrchol ležel v počátku, jedno z jeho ramen splynulo s kladným směrem osy x a druhé rameno leželo v I. nebo II. kvadrantu. Vyneseme-li na toto rameno úsečku jednotkové délky od vrcholu O ($OM = 1$), můžeme definovat sinus a kosinus úhlu α jako ordinátu resp. abscissu bodu M. Snadno ukážeme, že tato definice zahrnuje všechny předcházející. (Přitom likvidujeme též ten nedostatek, o kterém jsme se zmínili na začátku článku: definice pomocí souřadnic je vhodná po malých vysvětleních při jakýchkoli úhlech, takže po zobecnění pojmu úhlu není třeba měnit již vžité představy). Vzhledem k platnosti vztahů (4) není třeba nových tabulek pro funkce tupého úhlu.

Nyní můžeme vyložit úplnou soustavu závislostí mezi prvky trojúhelníka, jejíž základem může být (mimo vztah $A + B + C = 180°$) buď věta sinová nebo věta kosinová. První z nich se dokazuje jedním z obecně známých způsobů: na základě vztahu $a : 2R = \sin A$ nebo zavedením výšky (dva případy). Kosinová věta znovu s použitím výšky (dva případy), nebo (poněkud zdlouhavěji, ale poučněji) na základě předem dokázaného vztahu (dva pří-

[4]) Ve své „metodice“ (vyd. r. 1949) navrhuje V. M. Bradis i vzorec pro obsah trojúhelníka psát dvojím způsobem: $S = 0{,}5ab \sin C$ pro $C < 90°$ a $S = 0{,}5ab \sin(180° - C)$ pro $90° < C < 180°$, „jelikož žáci 8. třídy ještě nevědí, že $\sin(180° - C) = \sin C$". Při této příležitosti bych chtěl zdůraznit, že souhlasím s názorem. V. M. Bradise o možnosti širšího používání trigonometrie k řešení geometrických úloh v rámci nynějšího programu (str. 392—393 cit. práce), domnívám se však že se nelze omezit jen na to.

pady) $a = b \cos C + c \cos B$. Uvážíme-li ještě dva analogické vztahy $b = a \cos C + c \cos A$, $c = a \cos B + b \cos A$, dostáváme soustavu tří rovnic, které jsou lineární nehomogenní vzhledem k neznámým $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ a lineární homogenní vzhledem k a, b, c. Považujeme-li kosiny za neznámé a řešíme-li soustavu, dostaneme vztah

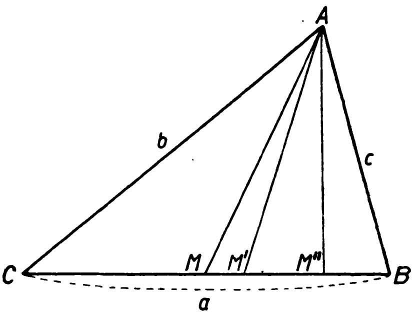
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \tag{5}$$

a ještě dva analogické, které společně se vztahem (5) tvoří větu kosinovou (která se častěji zapisuje ve tvaru $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$). Považujeme-li A, B, C za dané a a, b, c za hledané, pak pro homogenní soustavu je třeba nejprve řešit otázku existence nenulového řešení: příslušná podmínky je tvaru

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + \\ + 2 \cos A \cos B \cos C - 1 = 0 \tag{6}$$

a je pro $0 < A + B < 180°$ ekvivalentní podmínce $A + B + C = 180°$. Je-li podmínka (6) splněna, pak pomocí úhlů lze jednoznačně určit poměry stran, což opět je geometricky zřejmé:

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C^{5}) .$$



Obr. 4.

Pomocí sinové a kosinové věty je možné probrat všechny „základní" případy řešení trojúhelníka a používat při tom jen tabulek hodnot sinu a kosinu, případně tabulek druhých mocnin a druhých odmocnin. Sinová věta stačí k řešení trojúhelníka na základně dané strany a dvou úhlů a na základě dvou daných stran a úhlu proti jedné z nich (obvykle v této souvislosti upozorníme žáky na dvojznačnost vyjádření úhlu v intervalu (0°, 180°) hodnotou jeho sinu). Pomocí kosinové věty je možné řešit trojúhelník, jsou-li dány: 1) dvě strany a úhel jimi sevřený; 2) tři strany (viz (5)).

Ukážeme ještě možnost stanovit těmito prostředky těžnice, osy úhlů a výšky, jestliže jsou dány tři strany trojúhelníka.

1) Nechť je (obr. 4) $AM = m_a$ hledaná těžnice. Podle vzorce (5) najdeme $\cos C$ a dosadíme do rovnice odvozené z trojúhelníka ACM

$$m_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 - 2 \, . \frac{a}{2} b \cos C = \dots .$$

Uveďme, že vzorce pro délku těžnice zpravidla odvozujeme tak, že trojúhelník doplníme na rovnoběník a použijeme věty o součtu čtverců úhlopříček tato věta se nyní stává zbytečnou.[6])

2) Zachovejme označení obr. 4; nechť $AM' = \beta_a$ je hledaná osa úhlu. V trojúhelníku ACM' snadno určíme $CM' = ab/(b + c)$ a úhel C podle vztahu (5) a dále

[5]) Zařazení druhé varianty kosinové věty se nenavrhuje do povinné látky.

[6]) Myslí se tím věta, že v rovnoběžníku o stranách a, b a úhlopříčkách u_1, u_2 platí $2(a^2 + b^2) = u_1^2 + u_2^2$. Tato věta se v sovětských učebnicích planimetrie dokazuje. *Pozn. překl.*

$$\beta_a^2 = b^2 + \frac{a^2b^2}{(b+c)^2} - 2ab\,\frac{b}{b+c}\,\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \ldots = bc\left[1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right].$$

3) Zachováme označení obr. 4; nechť $AM'' = h_a$ je hledaná výška. Z trojúhelníka ACM'' dostáváme $h_a = b \sin C$, přičemž $\cos C$ je definován vztahem (5); platí tedy

$$\sin C = \sqrt{1 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab^2}\right)^2}$$

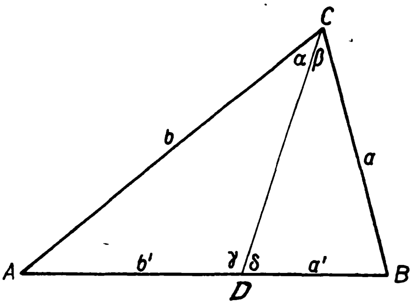
atd. (dále jen algebraické úpravy obvyklé při odvozování Heronova vzorce).

Uveďme ještě několik příkladů. Kosinová věta umožňuje stanovit velikost R výslednice dvou sil, jestliže známe velikosti těchto sil a úhel α mezi jejich směry:

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha$$

(zde upozorníme na znaménko + posledního členu na pravé straně). Chceme-li ještě najít úhly, které svírá výslednice se směry sil o velikostech F_1 a F_2, stačí užít sinové věty.

Snadno (a bez pomocných konstrukcí) lze dokázat větu o ose vnitřního úhlu v trojúhelníku. Nechť (obr. 5) CD je osa úhlu, tj. $\alpha = \beta$, ostatní označení je patrné z obrázku. Z trojúhelníků ACD a BCD plyne



Obr. 5.

$$b : b' = \sin \gamma : \sin \alpha\,; \quad a : a' = \sin \delta : \sin \beta\,.$$

Avšak $\sin \gamma = \sin \delta$; $\sin \alpha = \sin \beta$ a tedy $a : a' = b : b'$, $a' : b' = a : b$. Nevelkým pozměněním tohoto dávno známého důkazu dostáváme větu o ose vnějšího úhlu.

Vrátíme-li se k pravidelným n-úhelníkům, můžeme využít nejen středových úhlů (které jsou ostré pro $n > 4$), ale i vnitřních (které jsou pro $n > 4$ tupé). Vepíšeme-li do kružnice rovnoramenný trojúhelník o základně a_n a ramenu a_{2n}, s úhlem při hlavním vrcholu $180° - 180°/n$ a s úhlem při základně $90°/n$, najdeme

$$a_{2n} = a_n : 2 \cos \frac{90°}{n}\,, \tag{7}$$

Ze vztahu (7) snadno stanovíme a_8, a_{12} a dále hodnoty $\cos 22{,}5°$, $\cos 15°$. Odtud a ze vztahu (7) najdeme a_{16}, a_{24} atd.

V teorii obsahu rovinných útvarů je třeba si důkladně osvojit vztah $S = \frac{1}{2}ab \sin C$ pro obsah trojúhelníka, který je právě tak důležitý, jako vztah $S = \frac{1}{2}ah$ (z něhož lze předchozí vzorec odvodit). Užitečný je také vzorec pro obsah rovnoběžníka z délky dvou jeho sousedních stran a úhlu mezi nimi, vzorec pro obsah čtyřúhelníka z délky jeho úhlopříček a jimi sevřeného úhlu.

Ponechávám stranou použití trigonometrie ve stereometrii, neboť úloha trigonometrie v této souvislosti je již dávno uznávána. Žel v teoretickém výkladu je jako dříve trigonometrie obcházena; obvykle se např. neprobírá důležitá věta o obsahu průmětu rovinného útvaru do jiné roviny (nenašel jsem formulaci této věty ani v universitních učebnicích geometrie od S. A. Bogomolova a D. I. Perepelkina; jinak je tomu v knize J. Hadamarda, *Elementární geometrie*, část II, 2. vyd., Moskva 1951, str. 381).

Jde tedy o zahrnutí celé trigonometrie trojúhelníka (kromě řešení trojúhelníků pomocí tabulek logaritmů goniometrických funkcí) do kursu geometrie. Je na místě uvést zde několik historických a bibliografických poznámek. Před půl stoletím jeden z nejvýznamnějších francouzských matematiků, E. Borel, zahrnul do své učebnice elementární geometrie[7]) goniometrické funkce ostrého i tupého úhlu, kosinovou větu, některá užití v planimetrii (pravidelné mnohoúhelníky, obsah trojúhelníka) a ve stereometrii (obsah průmětu). Tato učebnice, třebaže nebyla příliš rozšířena na francouzských školách, byla přeložena do několika jazyků a měla značný vliv na výuku. Tehdy ve Francii známý vědec a pedagog, C. Bourlet, mohl s odkazem na oficiální učební plán z r. 1909 zahrnout do učebnice geometrie[8]) goniometrické funkce ostrého a tupého úhlu, sinovou a kosinovou větu. Z ruských autorů můžeme jmenovat A. Gorsta, který ve své zajímavé, třebaže nikoli bezvadné učebnici[9]) zavádí goniometrické funkce pro úhly od 0° do 360° a kosinovou větu. Všichni jmenovaní autoři však se nezabývali aplikacemi v geometrii ani v takovém rozsahu, jako v tomto článku.

Ve smyslu názvu článku není zde místo pro podrobný rozbor změn v celém programu školního kursu matematiky, kdyby byly uskutečněny změny, které byly výše uvedeny. Abychom však alespoň naznačili obecné perspektivy, uveďme je jen v prvním přiblížení a bez podrobného zdůvodňování.

Z trigonometrie trojúhelníka zůstalo nezahrnuto do programu geometrie řešení trojúhelníků pomocí tabulek logaritmů goniometrických funkcí spolu s technikou těchto výpočtů a speciálními vztahy, které jsou „vhodné pro logaritmování“. Tuto pracnou kapitolu, která téměř nemá výukovou cenu (a v době strojové matematiky ani praktickou cenu), lze snadno obětovat.

Zůstává geometrie, přesněji: pojem úhlu v orientované rovině, oblouková míra; goniometrické funkce číselného argumentu, jejich periodicita (grafy); vztahy mezi funkcemi, součtové věty, vzorce pro goniometrické funkce dvojnásobných a polovičních úhlů; ekvivalentní úpravy goniometrických výrazů; arkus; goniometrické rovnice. Je však známo, že celá goniometrie může být vyložena ryze analyticky (nekonečné řady nebo diferenciální rovnice nebo funkcionální rovnice). V této souvislosti je tato partie bližší kapitole, která se ve škole nazývá algebra, třebaže zahrnuje i některé otázky úvodu do analysy, např. studium transcendentních funkcí — exponenciální a logaritmické. Goniometrické funkce, jejichž znalost je nezbytná pro jejich význam v mnoha oblastech matematiky a fysiky, patří také k transcendentním funkcím. Bylo by tedy možné ve výkladu zahrnout goniometrické funkce, stejně jako funkce exponenciální, do tzv. „algebry“ (jejich hluboká souvislost se stává zřejmou v oblasti komplexních čísel[10]). V žádném případě nelze to zahrnout do geometrie: na omyly, vyplývající z iluse o organické souvislosti goniometrických funkcí s euklidovskou geometrií, zejména z existence podobných útvarů (které neexistují ani v Lobačevského ani ve sférické geometrii) bylo již nejednou poukázáno[11]).

[7]) Э. Борель, *Элементарная математика I, Геометрия,* překlad z němčiny. Zpracoval П. Штеккел, Oděsa „Matezis“ 1912.

[8]) Carlo Bourlet, *Éléments de géométrie*, 2. vyd., Paříž 1910.

[9]) А. М. Горст, *Элементарная геометрия,* SPB-Kijev, „Sotrudnik“, 1911.

[10]) Je to jeden z přesvědčujících důvodů pro zachování kapitoly o komplexních číslech — možnost odvození součtových vět a vzorců pro goniometrické funkce násobných argumentů pomocí násobení a umocňování komplexních čísel v goniometrickém tvaru.

[11]) Viz např. Н. М. Бескин, *Методика геометрии,* M-L 1947, str. 219—220.

V každém případě to, co stojí za to, aby bylo zahrnuto do výuky ve všeobecně vzdělávací škole z tradičního obsahu trigonometrie (v souvislosti s výše uvedenými otázkami goniometrie uveďme, že arkus se již ztrácí z naší výuky a následovat budou pravděpodobně goniometrické rovnice), nevyžaduje existenci zvláštního oboru a může být snadno a s prospěchem (pro geometrii nesporně) zahrnuto do dvou existujících oborů.

Navrhujeme tedy vedle redukce nynější osnovy rozdělit trigonometrii mezi geometrii a algebru: do geometrie zahrnout funkce úhlů v intervalu $(0, 2\pi)$ a do algebry funkce číselného argumentu v intervalu $(-\infty; +\infty)$.

Přeložili Jiří Fábera a Jiří Gregor

NICOLAS BOURBAKI[1])

Prof. Karel Rychlík

Jeho jméno je řecké, jeho národnost francouzská. Je jeden z nejvlivnějších matematiků 20. století. Mnoho historek se vypráví o něm a jejich počet roste den ode dne. Skoro každý matematik zná některé. Jeho práce jsou čteny a často citovány na celém světě. Jsou v Rio de Janeiro mladí, jejichž matematické školení bylo výsledkem jeho díla, v Berkeley a Göttingen jsou známí matematici, kteří podléhají jeho podmaňujícímu vlivu. Má vášnivé stoupence i neoblomné odpůrce v každém shromáždění matematiků, ale je podivuhodné, že — neexistuje.

Tento Francouz s řeckým jménem, který neexistuje, je Nicolas Bourbaki. Ve skutečnosti je Nicolas Bourbaki „kolektivní pseudonym", užívaný sdružením matematiků, na které by bylo možno velmi dobře užít francouzského výrazu *société anonyme*. Skupina píše rozsáhlé dílo o matematice, vycházející od základních velmi obecných principů a směřující patrně k aplikacím co nejvíce specialisovaným. Práce byla započata v r. 1939 a vyšlo již na 20 svazků (okolo 3000 str.) tohoto monumentálního díla.

Důvod, proč autoři si zvolili jméno Bourbaki, je zahalen tajemstvím. Je oprávněna domněnka, že tuto volbu inspiroval generál Charles Denis Bourbaki (nar. r. 1816, zemřel r. 1897). Ví se o něm, že r. 1868 ve věku 46 let byla mu nabídnuta řecká koruna, nabídka, kterou on však odmítl. Jakési proslulosti však získal ve válce prusko-francouzské jako vrchní velitel východní francouzské armády. Ve válce té mu osud nebyl příznivý; v r. 1871, když ustoupil z Francie na švýcarské území se ztenčenými zbytky vojska, byl internován a tehdy se pokusil o sebevraždu. Ta se však nezdařila a pak, podle jeho pomníku v Nancy, žil tam až do věku 81 let. To však těžko může tvořit souvislost mezi ním a matematiky, kteří užívají jeho jména, leda snad, že mnozí z nich v různých obdobích studovali na universitě v Nancy.

Jedna z příhod, v nichž se vyskytuje ono jméno, se udála asi před 25—30 lety. Posluchači prvního roku na *École normale supérieure* v Paříži, kde nabyla vzdělání většina význačnějších francouzských matematiků, byli zváni každoročně k účasti na přednášce vznešeného návštěvníka jménem Nicolas Bourbaki, kterým ve skutečnosti byl jeden z jejich kolegů maskovaný patriarchálním vousem. Jeho povídání bylo prvním pokusem v řečnění o matematice.

---

[1]) Volné zpracování článku Pavla R. Halmose, který vyšel v *Scientific American*, 119, seš. 5 (květen 1957). Byl mi přístupný v portugalském překladu, uveřejněném v *Anuário da Sociedade Paranaense de Matemática*, 4, 1957, str. 18—28.