Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Břetislav Novák

Vědecká práce posluchačů na katedře matematické analýzy a jejích aplikací MFF UK

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 23 (1978), No. 1, 27--31

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138354

[32] P. PUDLÁK, J. TŮMA: *Every finite lattice may be embedded in a finite partition lattice.* Vyjde v Algebra Univ.
[33] F. P. RAMSEY: *On a problem of formal logic.* Proc. London Math. Soc. *30* (1930), 264—286.
[34] V. RÖDL: *Dimense grafu a zobecnění Ramseyovy věty.* Diplomová práce MFF KU (1973).
[35] J. VOLDŘICH: *Gradual partition of a graph into complete graphs.* Vyjde v Čas. pro pěst. mat.
[36] R. J. WILSON: *Introduction to graph theory.* Oliver Boyd, Edinburg (1972), ruský překlad (1977).

Vědecká práce posluchačů na katedře matematické analýzy a jejích aplikací MFF UK.

Břetislav Novák a kol., Praha

Projekt československé vzdělávací soustavy ukládá vysokým školám soustavně vyhledávat nadané studenty, umožňovat jim studium podle individuálních nebo skupinových studijních plánů a zapojovat je do řešení výzkumných úkolů. Cílem tohoto článku je ukázat některé metody práce katedry matematické analýzy a jejích aplikací MFF UK v tomto směru a shrnout vybrané výsledky z posledních pěti let. Výročí dvaceti pěti let vzniku matematicko-fyzikální fakulty, které si letos připomínáme, je současně i stejným výročím studia na zaměření matematická analýza, která spolu s matematickou statistikou tvoří (neuspořádanou) dvojici nejstarších matematických zaměření na fakultě. Pro úplnost jen dodejme, že katedra matematické analýzy je jen o několik let mladší.

Článek úzce navazuje na příspěvky [3] a [10], publikované v tomto časopisu. Nebudeme se tedy zabývat otázkami způsobu výuky matematické analýzy v prvním dvouletí; myšlenky vyjádřené v [10] zůstávají v platnosti i v současné reformě studia matematiky, jak bude patrné i z článku, který redakce připravuje. Stejně tak nebudeme podrobněji rozebírat metodu práce výběrových seminářů a kroužků v rámci studentské vědecké a odborné činnosti; odkazujeme čtenáře na článek [3] a omezíme se na konkrétní výsledky.

Dobrou tradicí, která se na katedře matematické analýzy a jejích aplikací plně osvědčila, je studium vybraných posluchačů podle individuálních studijních plánů. I když zaměření matematická analýza studují v drtivé většině studenti, kteří mají vynikající studijní výsledky, lze mezi nimi skoro každoročně nalézt alespoň jednoho, který na sebe třeba již v prvém dvouletí upozorní výrazným nadáním a schopností k samostatné tvůrčí vědecké práci. Je nutno dodat, že jsou to vesměs studenti a studentky s širokými zájmy třeba ve sportu, hudbě i umění a aktivně činní ve fakultní svazácké organisaci.

Při vstupu studentů na zaměření ve třetím ročníku vzniká tedy pro katedru problém, pro které studenty sestavit individuální studijní plán a ovšem také jak ho zaměřit. Je to otázka velmi složitá. Její řešení závisí na „zabarvení" schopností studenta a také na tom, v jakém směru z hlediska dlouhodobého přehledu absolventů a perspektiv rozvoje matematiky u nás je potřeba mladé pracovníky orientovat. V neposlední řadě je určující i kapacita a zaměření pracovníků katedry; v tomto směru katedra využívá tradiční dobré spolupráce s pracovníky MÚ ČSAV v Praze. Není třeba dodávat, že všechny individuální plány jsou obvykle spjaty s některým z pěti dílčích úkolů státního plánu, řešených na katedře.

EVA POKORNÁ (nyní ČERMÁKOVÁ) měla studijní plán zaměřen na teorii potenciálu s důrazem na studium abstraktní teorie harmonických funkcí. Tato problematika, vycházející zejména z prací francouzského matematika M. BRELOTA, má u nás zázemí v silné škole teorie potenciálu, vedené J. KRÁLEM z MÚ ČSAV. Ve své první práci [12] se zabývala charakterizací harmonických funkcí na otevřené konvexní množině, které jsou restrikcí potenciálu náboje rozloženého na její hranici. Dosavadní výsledky předpokládaly „velmi hladkou" hranici; výsledek E. Pokorné byl prvním krokem ve směru zeslabení tohoto předpokladu; pro konvexní množinu je tento výsledek definitivní. Práce získala první místo ve fakultním, celostátním i mezinárodním kole SVOČ a byla oceněna cenou ČSAV.

Další její práce (která získala první místo ve fakultním a celostátním kole SVOČ v r. 1976) se týká Dirichletovy úlohy. Připomeňme dvě klasické metody jejího řešení pro Laplaceovu rovnici: Perronovu, která využívá superharmonických majorant a Wienerovu, která využívá „aproximace" dané oblasti zevnitř množinami, pro něž Dirichletovu úlohu umíme řešit. Do abstraktní axiomatické teorie harmonických funkcí (zahrnující např. i řešení diferenciálních rovnic parabolického typu) lze přenést Perronovu metodu. Přímé užití Wienerovy metody není obecně možné. Ve své práci [13] ukazuje E. Pokorná nutné a postačující podmínky pro to, aby bylo možno mezi kompakty a libovolné oblasti vkládat jisté „rozumné" množiny a tím ukázala, za jakých podmínek lze použít klasický Wienerův postup.

Zajímavou problematikou se zabýval během svého individuálně zaměřeného studia i P. DRÁBEK. Obecně šlo o velmi jemné metody funkcionální analýzy (viz [1]) a jejich aplikace na řešení jistých okrajových úloh (viz [2]). Uvažujme Dirichletovu úlohu

$$-\left(|u'(x)|^{p-2}\,u'(x)\right)' + \varphi(u(x)) = f(x)\,, \quad x \in (0, \pi)$$

$$u(0) = u(\pi) = 0\,,$$

kde parametr p a spojitá funkce φ jsou dány. Předpokládáme-li existenci vlastních limit

$$\lim_{\zeta \to +\infty} \frac{\varphi(\xi)}{|\xi|^{p-2}\,\xi} = \mu^+\,, \quad \lim_{\zeta \to -\infty} \frac{\varphi(\xi)}{|\xi|^{p-2}\,\xi} = \mu^-\,,$$

podařilo se P. Drábkovi téměř úplně charakterizovat dvojice (μ^+, μ^-), pro něž tato úloha má řešení pro libovolnou spojitou pravou stranu. Tato práce získala v loňském roce 1. cenu ve fakultním i celostátním kole SVOČ.

Z tohoto směru vědecké práce posluchačů matematické analýzy uveďme ještě ve stručnosti vietnamského studenta TRAN DIEN HIENA (viz [4]) a dále M. KRBCE ([9]),

J. Rákosníka [14] a M. Konečného [7]. Všechny tyto práce byly nebo jsou podkladem pro rigorosní práce a většina z nich se umístila na předních místech v SVOČ.

Následující dva příklady vycházejí z problematiky, která je rozvíjena v seminářích Z. Frolíka z MÚ ČSAV. Borelovské množiny v eukleidovském (a obecněji Banachově) prostoru lze obdržet z uzavřených množin pomocí spočetných sjednocení a průniku ve známém smyslu. Vzniká přirozená otázka, zdali každou konvexní Borelovskou množinu dostaneme z konvexních uzavřených množin pomocí spočetného průniku a spočetného monotonního sjednocení. Problém, vzniklý kolem r. 1960, byl kladně vyřešen postupně pro dvoudimenzionální, třídimenzionální a konečně dimenzionální prostory. Řešení problému pro nekonečně dimenzionální prostory vedlo P. Holického [5] k rozpracování mnohem obecnější teorie – deskriptivní teorie konvexních množin, tj. zavedení konvexity do obvyklé definice analytických množin, a k dokázání řady oddělovacích vět, z nichž již snadno vyplývá záporné řešení problému. Celá tato problematika má souvislost s teorií míry a ukazuje se i její důležitost v dalších směrech (Choquetova integrální reprezentace).

S teorií míry je spjata i práce M. Zahradníka. Při budování integrálu v nekonečně dimenzionálních Banachových prostorech je nutné se omezit na tzv. uniformní míry. Jednou z nejzávažnějších otázek při budování celé teorie byla otázka existence tzv. l_1-rozkladů jedničky. M. Zahradník [15] ukázal originální a nečekanou metodou, svědčící o velké matematické erudici, tento definitivní výsledek:

Buď X nekonečně dimenzionální Banachův prostor. Potom ke každému jeho uniformnímu pokrytí existuje příslušný l_p rozklad jedničky ($1 \leqq p < \infty$), právě když $p > 1$.

Netřeba dodávat, že jak práce P. Holického, tak i práce M. Zahradníka se umístily na předních místech ve fakultním i celostátním kole SVOČ, práce M. Zahradníka i v mezinárodním, a obě byly uznány jako rigorosní práce. Zajímavých výsledků dosahují z matematické analýzy studenti nižších ročníků. Zmiňme se o dvou výsledcích z posledního období:

Ročníková práce J. Měsky (která získala 2. cenu fakultní a 4. cenu celostátní soutěže SVOČ v r. 1977) vznikla při řešení tohoto problému (byl uveřejněn v časopise *American Math. Monthly* v r. 1975): Uvažujme funkce, které jsou definovány v celém intervalu $(-\infty, \infty)$, mají derivace všech řádů a vně intervalu $\langle 0, 1\rangle$ jsou rovny nule. Otázka nyní zní: Lze každou takovou funkci vyjádřit rozdílem nezáporných funkcí stejného typu? J. Měskovi se podařilo tuto úlohu vyřešit velmi elementárním, ale důmyslným postupem; jeho řešení a další výsledky, kterých v tomto směru dosáhl, budou publikovány.

Je známo, že každá spojitá funkce, která nemá v žádném bodě derivaci, je příkladem funkce, která není monotónní na žádném intervalu. Z konce minulého století pocházejí – značně komplikované – konstrukce funkcí s touto poslední vlastností, avšak navíc mající všude derivaci. Od té doby konstrukce takových funkcí, říkejme jim köpckeovské, zajímaly mnoho vynikajících matematiků. Jejich nevýhodou však je, že jsou buď příliš složité, anebo využívají hlubokých vět matematické analýzy. Trojice posluchačů II. ročníku, Jan Malý, Emil Borák a Jan Blažek, podává ve své práci zcela elementární konstrukce köpckeovských funkcí. Navíc ukazují elementární i moderní topologické metody, kterými je možno z funkcí poměrně jednoduchých dospět k funkcím köpckeovského typu.

Práce katedry s posluchači není sevřena jen do rámce přednášek, seminářů, individuálních studijních plánů a kroužků SVOČ. Učitelé katedry se snaží upoutat a rozvinout zájem posluchačů i pomocí různých úloh a problémů (třeba na nástěnkách). Nechtějí napodobovat slavný polský vzor (viz [11]), ale i pro sebe založili sešit *Problémy*, kde ceny za řešení jsou voleny velmi netradičně (v tom nás vzor Skotské knihy upoutal). *Problémy* existují od r. 1971. V červnu 1977 obsahovaly na sedmdesát problémů, z nichž řešena je asi třetina. Problémy zadávají a řeší i posluchači a pracovníci jiných kateder a pracovišť, i zahraniční návštěvníci fakulty. Uveďme pro zajímavost dva problémy řešené a závěrem — pro čtenáře — jeden neřešený.

Problém č. 13 (autor dr. L. Zajíček, řešeno P. Holickým, odměna 1,5 litru piva): Je možno učesat vlasy na hlavě tak, aby na ní ležely a žádné dva se nekřížily? Řešení je záporné. (Matematicky: Buď P množina všech trojic $[x, y, z]$, pro něž $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z > 0$. Pro každé $\xi \in P$ buď φ_ξ spojité zobrazení intervalu $\langle 0, 1\rangle$ do P. Potom existují $\xi_1, \xi_2 \in P$, $t_1, t_2 \in (0, 1)$ tak, že $\varphi_{\xi_1}(t_1) = \varphi_{\xi_2}(t_2)$.)
Je zajímavé, že problém má kladné řešení (tj. vlasy lze „učesat“) nevyrůstají-li „vlasy“ z celé „hlavy“ — viz k tomu [6], [8].

Problém č. 20 (autoři dr. L. Zajíček, dr. D. Preiss, řešitel J. Frýda, odměna 3 + 1 pivo). Je možno každý obdélník vyjádřit jako sjednocení konečně mnoha nepřekrývajících se čtverců? (Odpověď je dána větou: Obdélník je možno vyjádřit jako sjednocení konečně mnoha nepřekrývajících se čtverců, právě když poměr délek jeho stran je racionální číslo.)

Problém č. 18 (autor L. Zajíček, odměna od r. 1974 několikrát zvýšena). Existují tři spojité funkce f_1, f_2, f_3 na intervalu $\langle 0, 1\rangle$, jejichž grafy se neprotínají a uzavřená množina $F \subset \langle 0, 1\rangle$ kladné míry tak, že pro každou volbu bodů $x_1, x_2, x_3 \in F$, $x_1 < x_2 < x_3$ neleží body $[x_i, f_i(x_i)]$, $i = 1, 2, 3$ na přímce?

Tento článek je kolektivním dílem pracovníků katedry nejen po stránce slovní, ale i obsahové. Mezi jeho spoluautory patří vlastně nejen všichni vedoucí uvedených prací, ale i všichni jmenovaní posluchači.

Literatura

[1] P. Drábek: *Continuity of Německij's operator in Hölder spaces.* Comment. Math. Univ. Carolinae *16*, 1975, 37—57.

[2] P. Drábek: *Nelineární okrajové úlohy.* Diplomová práce. MFF UK 1977 (připravuje se do tisku).

[3] S. Fučík, J. Milota, B. Novák: *O práci s nadanými posluchači na katedře matematické analýzy MFF UK.* Pokroky mat., fyz., astr. *XVI* (1971), 181—186.

[4] S. Fučík, T. D. Hien: *Note to nonlinear spectral theory: Application to boundary value problems for ordinary integrodifferential equations.* Comment. Math. Univ. Carolinae 14, 1973, 583—608.

[5] P. Holický: *The convex generation of convex Borel sets in locally convex spaces.* Mathematika *21* (1974), 207—215.

[6] D. Humke: *Baire Category and disjoint restilinear accomibility.* Proc. Lond. Math. Soc. (v tisku).

[7] M. Konečný: *Remarks on periodic solvability of nonlinear ordinary differential equations.* Comment. Math. Univ. Carol. *18*, 1977, 547—562.

[8] J. Král: *O jedné matematické úloze o vlasech.* Čas. pro pěst. mat. *101* (1976), 305—307.

[9] M. KRBEC: *On L^p-estimates for solutions of elliptic boundary value problems.* Comment. Math. Univ. Carol. *17*, 1976, 363—375.

[10] J. LUKEŠ: *Výuka matematické analýzy na matematicko-fyzikální fakultě UK.* Pokroky mat. fyz. astr. *XVII* (1972), 33—36.

[11] E. MARCZEWSKI: *Poznámky o vědeckém středisku.* Čas. pro pěst. mat. *78* (1953), 31—45.

[12] E. POKORNÁ: *Harmonic functions on convex sets and single loyer potentials.* Čas. pro pěst. mat. *102* (1977), 30—60.

[13] E. POKORNÁ: *Insertion of regular sets in potential theory.* (Přijato do Čas. pro pěst. mat.)

[14] J. RÁKOSNÍK: *Řešení některých nelineárních diferenciálních rovnic* (Diplomová práce, MFF UK, 1975).

[15] M. ZAHRADNÍK: *l_1-continuous partitions of unity on normed spaces.* Czech. Math. Journal *26* (101), 1976, 319—329.

Příspěvek katedry astronomie a astrofyziky MFF UK k otázce vývoje hvězd

Vladimír Vanýsek, Praha

Jedním z cílů soudobé astrofyziky je hledání odpovědi na otázku, jak vznikají a zanikají jednotlivé hvězdy a hvězdné systémy. Není to otázka podružná a nezajímavá. Vždyť existence života na Zemi je nerozlučně spojena s osudem hvězdy nám nejbližší — Sluncem. Avšak vývoj jednotlivých hvězd je příliš pomalý, a i když astrofyzikální výzkum se datuje od poloviny minulého století, u běžných hvězd (jakou je i Slunce) známe prakticky jen okamžitý stav.

Proto lze zákonitosti, kterými se řídí život hvězd, odhalit studiem fyzikálních vlastností velkého počtu různě starých skupin hvězd — hvězdných populací. V naší Galaxii rozeznáváme dvě základní hvězdné populace. Stará populace, označovaná jako populace II, obsahuje staré hvězdy a hvězdné systémy, např. kulové hvězdokupy, vzniklé již v prvopočátcích Galaxie. Stáří některých objektů se odhaduje na více než 10^{10} let. Naproti tomu populace I, obsahuje vesměs poměrně mladé hvězdy a mezihvězdnou hmotu. Nejmladší pozorované hvězdy populace I nejsou starší 10^5 let.

Dnes je již poměrně dobře popsán a teoreticky zdůvodněn vývoj hvězd na hlavní posloupnosti Hertzsprungova-Russelova diagramu, tj. poměrně dlouhé „klidné“ období života hvězdy, která je v hydrostatické rovnováze a v jejímž nitru vzniká energie pozvolným spalováním vodíku na hélium. Astrofyzikové uspokojivě vysvětlují i nestabilní etapy ve vývoji starších hvězd, kdy po vyčerpání vodíku ve hvězdném nitru se mění jejich zářivost i rozměr. Jsou dokonce již ustálené představy o tom, jak hvězdy končí, tj. kdy a za jakých okolností se hvězda mění v bílého trpaslíka nebo se hroutí v neutronovou hvězdu nebo dokonce (pozorováním však zatím neprokázanou) černou díru.