Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jaroslav Nešetřil

Kombinatorické konstrukce, jejich složitost a praktický význam

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 23 (1978), No. 1, 16--27

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138350

Kombinatorické konstrukce, jejich složitost a praktický význam

Jaroslav Nešetřil, Praha

0. Cílem tohoto příspěvku je seznámit čtenáře s tou oblastí soudobé kombinatoriky, která se zabývá konstrukcemi (a efektivností těchto konstrukcí) dávajícími odpověď na otázky kombinatorického charakteru.

Článek není určen výhradně specialistům v oboru a je zaměřen převážně na oblast výzkumu, který se provádí na MFF UK v poslední době (hlavně v rámci kombinatorického semináře) a který je součástí řešení dílčího úkolu státního plánu a fakultního výzkumného úkolu.

Pojednání vzniklo na základě přednášek na algebraickém semináři a semináři matematických metod v psychologii na MFF UK.

Děkuji kolegům M. Chytilovi, L. Kučerovi a P. Pudlákovi za připomínky k předběžné verzi tohoto článku. Rovněž děkuji recenzentovi za návrhy, které zlepšily srozumitelnost této studie.

1. Klasické vymezení pojmu kombinatorika je dáno touto větou: kombinatorika je věda o rozmístění, výběru, pořadí a počtu podmnožin nějaké množiny. Někdy se také (ještě nepřesněji) říká, že kombinatorika zkoumá ty matematické otázky, které lze elementárně formulovat. Tyto charakteristiky je však třeba chápat ne ve smyslu definice, ale jako snahu o vystižení pocitu, který je matematikům společný. Každý matematik má vlastní představu o tom, co znamená „kombinatorická otázka" a mnoho základních pouček zná nebo implicitně používá (nebo si je snadno sám dokáže).

Výše uvedená vymezení pojmu kombinatorika jsou natolik široká, aby mohla zahrnout nejrozmanitější objekty a vlastnosti. Možno však říci, že základními kombinatorickými pojmy jsou pojmy grafu a společnosti (jiné užívané názvy: síť, hypergraf, množinový systém, design):

Graf G je dvojice (V, E), kde V je (zpravidla konečná) množina (tzv. množina vrcholů) a E je množina některých dvoubodových podmnožin množiny V (tzv. množina hran).

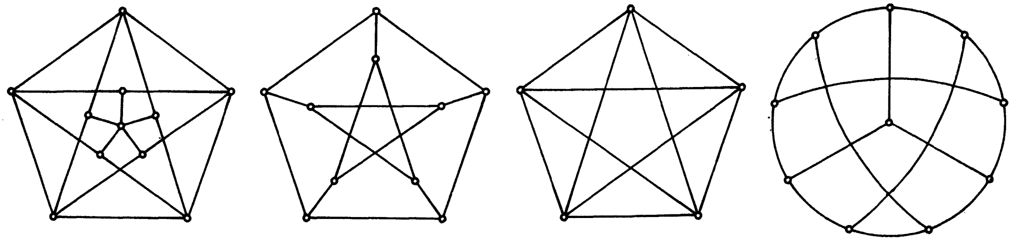
Společnost S je dvojice $(V, \mathscr{M})$, kde V je (zpravidla konečná) množina a $\mathscr{M}$ je množina některých podmnožin množiny V.

Uvedené definice grafu a společnosti nejsou ani nejobecnější možné, ani jediné v kombinatorice studované (viz [20] pro obecnou definici grafu), ale mají roli univerzálních struktur: ostatní druhy objektů lze zpravidla (v té či oné formě) za grafy a společnosti považovat. Na obr. 1 jsou uvedeny některé příklady grafů (vrcholy jsou znázorněny malými kroužky, hrany jsou znázorněny spojnicemi mezi příslušnými vrcholy).

Výhodou grafů je, že jsou názorné a jednoduché a přesto je jimi možno popsat mnoho situací, které se vyskytují v praxi. To jsou dva základní aspekty důležitosti grafů v aplikacích, což nabylo na významu právě s rozvojem diskrétní matematiky a výpočetní techniky.

Kombinatorika a zejména teorie grafů se v současné době rychle rozvíjejí. Existuje například 9 specializovaných časopisů (*Diskretnyj analiz*; *Discrete mathematics*; *Annals of discrete mathematics*; *Networks*; *Ars Combinatoria*; *Journal of Combinatorics, Information and System Science; Journal of Combinatorial Theory A*; *B*; *Journal of Graph Theory*). V poslední době bylo také vyřešeno mnoho význačných problémů, mezi nimi jeden z nejslavnějších matematických problémů vůbec, problém čtyř barev (viz [1]).

Brožura [6], vydaná MFF, poskytuje přehled o československých matematicích pracujících v tomto oboru.



Obr. 1 1a) 1b) 1c) 1d)

2. Základním problémem teorie grafů je otázka, zda existuje graf určitých vlastností. Ponecháme zde stranou otázku, kolik takových grafů existuje, což je základní otázka teorie enumerace, viz např. [11].

Cílem tohoto článku je uvést a na jednoduchých příkladech ilustrovat různé možné přístupy k řešení této základní otázky.

Schéma článku je možno vystihnout touto osnovou, která odpovídá členění do jednotlivých odstavců:

0. Úvod
1. Základní pojmy
2. Obsah
3. Nekonstruktivní metody
4. Konstruktivní metody
5. Jeden příklad
6. Efektivní řešení
7. Dobrá charakteristika
8. Klasifikace složitosti problémů
9. Závěr

Budeme tedy postupovat směrem ke „snadnějšímu" a „efektivnějšímu" zpracování úloh.

3. Začněme s tímto konkrétním problémem (který uvedeme v populární formě): Představte si, že na večírku neexistuje k osob, které se navzájem znají nebo navzájem neznají. Jaký je maximální počet osob, které se mohou takového večírku zúčastnit?

V řeči teorie grafů tato úloha zní: jaký maximální počet vrcholů může mít graf $G = (V, E)$, který neobsahuje úplný graf K_k s k vrcholy (graf K_5 je znázorněn na obrázku 1c) a jehož doplněk $-G = (V, \{e \subseteq v;\ |e| = 2\} \setminus E)$ rovněž neobsahuje úplný graf s k vrcholy. Označme $r(k)$ příslušný maximální počet vrcholů. (Ramseyova věta [33] tvrdí, že pro každé $k \geqslant 1$ číslo $r(k)$ skutečně existuje. Tento netriviální fakt, představující strukturální zesílení Dirichletova principu, je jedním z nejaplikovanějších kombinatorických výsledků vůbec. Právě teorii svázané s touto větou a jejím aplikacím byla v posledních letech věnována na MFF (a FJFI ČVUT) značná pozornost, viz např. [23], [24]. Popisovat tento výzkum není účelem tohoto článku.)

Pro dané n lze v konečném počtu kroků rozhodnout, zda existuje graf požadovaných vlastností s n vrcholy (tj. zda $r(k) \geqslant n$): všech grafů na dané n-bodové množině je $2^{\binom{n}{2}}$ a všech „neizomorfních" grafů s n vrcholy je pro velká n řádově $2^{\binom{n}{2}}/n!$. Metoda probrání všech možností je však úspěšná jen pro malé hodnoty $n - k$ (např. je snadné dokázat, že $r(1) = 0$, $r(2) = 1$, $r(3) = 5$, méně snadné, že $r(4) = 17$. Jiné hodnoty $r(k)$ již přesně známy nejsou.) K rozhodnutí, zdali $r(k) \geqslant n$ pro větší hodnoty $n - k$, je třeba použít buď speciálních konstrukcí, nebo jiných „nekonstruktivních" metod.

Zatímco v jiných oblastech matematiky je používání nekonstruktivních metod běžné (např. již užití axiómu výběru), je poněkud překvapující, že podobné metody existují rovněž v konečné kombinatorice.*)

Jedna z nejznámějších nekonstruktivních metod je metoda, která se nazývá pravděpodobnostní (nebo prostě nekonstruktivní) a která byla vyvinuta hlavně v pracích P. Erdöse a A. Rényiho. Této metodě je věnována kniha [8].

Typickou ukázkou použití zmíněné metody je důkaz nerovnosti $r(k) \geqslant 2^{k/2}$ (z této nerovnosti pak mimo jiné plyne, že metoda probrání všech možností principiálně nevede k cíli). Tento důkaz je (ve své elementární formě) tak prostý, že jej můžeme pro ilustraci uvést celý.

Zvolme pevně n-bodovou množinu V. Počet všech grafů (V, E) je (jak jsme již uvedli) $2^{\binom{n}{2}}$. Odhadněme počet všech grafů s množinou vrcholů V, které obsahují nějaký úplný graf s k vrcholy. Nechť V' je pevně zvolená k-bodová podmnožina V. Potom počet všech grafů (V, E), jejichž zúžení na množinu V' je úplný graf (tj. pro něž $\{e \subseteq V';\ |e| = 2\} \subseteq E$) je zřejmě $2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$ (neboť $\binom{k}{2}$ hran na V' je již určeno). Protože V' lze zvolit $\binom{n}{k}$ způsoby, je počet grafů (V, E), které obsahují nějaký úplný graf s k vrcholy, menší nebo roven číslu $\binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$. Použitím elementárních úprav lze dokázat, že pro $n = 2^{k/2}$ je $\binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}} < \frac{1}{2} 2^{\binom{n}{2}}$. Zřejmě počet grafů $G = (V, E)$, jejichž doplněk $-G$ obsahuje úplný graf s k vrcholy, je pro $|V| = 2^{k/2}$ omezen shora stejným číslem $\frac{1}{2} 2^{\binom{n}{2}}$. Celkem dostáváme, že počet grafů $G = (V, E)$ s $n = 2^{k/2}$ vrcholy, pro něž G nebo $-G$ obsahuje úplný graf s k vrcholy, je menší než $2^{\binom{n}{2}}$. Musí tedy existovat příklad grafu

*) Zde ovšem nepoužíváme přívlastek „nekonstruktivní" ve smyslu běžném v matematické logice.

$G = (V, E)$ s $2^{k/2}$ vrcholy tak, že G ani $-G$ neobsahují úplný graf s k vrcholy. To dokazuje nerovnost $r(k) \geqslant 2^{k/2}$.

Tak elementární důkaz možná čtenáři příliš podstatu nekonstruktivní metody nepřiblížil. Připojme tedy několik poznámek:

i. Konstrukce grafů, které dokazují $r(k) \geqslant 2^{k/2}$, není známa. Pomocí speciálních a obtížných konstrukcí je možno pouze dokázat, že čísla $r(k)$ rostou rychleji než libovolný polynom (tj. že $k^c/r(k) = o(1)$ pro každé $c > 0$). To je nedávný a dosud nejlepší konstruktivní výsledek.

Má tedy uvedený důkaz výrazný znak metody: není známo, jak obdržet stejný výsledek jiným způsobem.

ii. Důkaz jsme uvedli také proto, že přes svou jednoduchost a stáří (pochází z roku 1947) poskytuje v podstatě dosud nejlepší výsledek. Velice jednoduchými prostředky lze tedy nekonstruktivním způsobem obdržet velmi silné výsledky.

iii. Výše uvedený důkaz tedy žádaný graf nekonstruuje, ale dokazuje pouze jeho existenci. Lze ho rovněž provést v jazyce teorie pravděpodobnosti, jestliže uvážíme náhodnou veličinu $\mathbf{G}_n$, jejímiž hodnotami jsou všechny grafy $(\{1, 2, \ldots, n\}, E)$ a která splňuje $p(\mathbf{G}_n = G) = 2^{-\binom{n}{2}}$ pro každý graf $G = (\{1, 2, \ldots, n\}, E)$. V důkaze jsme potom dokázali, že $p(\mathbf{G}_n$ obsahuje $K_k) < \frac{1}{2}$ (což bylo jádro důkazu). Pravděpodobnostní přeformulování výše uvedeného důkazu se může zdát zbytečností. Pro použití jazyka teorie pravděpodobnosti svědčí však alespoň dvě skutečnosti: Ve složitějších případech je pravděpodobnostní formulace přehlednější a názornější a je možno použít vět teorie pravděpodobnosti (i když v převážné většině vět máme co činit pouze s diskrétními pravděpodobnostními prostory). Na druhé straně v souvislosti s teorií pravděpodobnosti nekonstruktivní metoda získává širší platnost. Tak například ve výše uvedeném důkaze jsme ve skutečnosti dokázali, že $p(\mathbf{G}_n$ obsahuje $K_k) \leqslant \frac{1}{2}$ kdykoliv $n \leqslant 2^{k/2}$. To může být využito v praxi. Je-li třeba sestrojit graf s 256 vrcholy, který neobsahuje úplný graf s 16 vrcholy a jehož doplněk má touž vlastnost, potom z důkazu plyne, že převážná většina grafů s 256 vrcholy má tuto vlastnost. Propočtením výše uvedených odhadů dostáváme, že pravděpodobnost nalezení takového grafu je větší než

$$1 - \frac{\binom{256}{16}}{2^{\binom{16}{2}-1}} \doteq 1 - 1{,}4 \, . \, 10^{-8} \, .$$

Je možno se pokusit o náhodné generování žádaného grafu (přímá konstrukce takového grafu by byla obtížná).

Příklady použití pravděpodobnostních metod se neomezují na konstrukci „obtížných“ grafů (i když to je dosud použití nejčastější; je mu věnována téměř celá kniha [8], jiný příklad je uveden v [25]). Používá se rovněž pravděpodobnostní testování kombinatorických algoritmů ([16] obsahuje testování algoritmů pro určení barevnosti grafu) nebo pravděpodobnostní zkoumání obtížných problémů. [19] obsahuje důkaz, že tzv. Ulamova hypotéza – obtížný problém týkající se izomorfismu grafů – platí s pravděpodobností 1. Pravděpodobnostní metody byly využity i při testování postupů vedoucích k řešení problému 4 barev.

Metody inspirované teorií pravděpodobnosti nejsou jediným nekonstruktivním prostředkem, který se v kombinatorice používá. Příklady jiného typu představují algebraické metody (zvláště zkoumání vlastních čísel matic odpovídajících grafům) a teorie vytvořujících funkcí (formálních mocninných řad). I tyto metody poskytují výsledky, které nejsou (zatím) dosažitelné konstruktivně (viz např. [12], [18]).

4. Za řešení kombinatorické úlohy se však zpravidla pokládá konstruktivní řešení. (Jedním z důvodů pro tuto skutečnost je fakt, že nekonstruktivním řešením se vzdáváme jedné z nejvýznačnějších vlastností grafu – názornosti.) V některých případech nekonstruktivní řešení předběhlo konstruktivní o dlouhou dobu, v jiných případech konstrukce není známa dosud (tak jako v některých výše uvedených případech).

Mezi konstrukcemi, které dávají odpověď na kombinatorické otázky, jsou však veliké rozdíly z hlediska jejich „efektivnosti".

Při konstrukcích „obtížných" grafů a společností se často vyskytují astronomicky veliké hodnoty, neboť dílčí konstrukce se mnohokrát iterují a kombinují. Typickým, a navíc klasickým příkladem „obtížných" grafů jsou grafy, které neobsahují kružnice délek $3, \ldots, l$, $l \geqq 3$ a které mají barevnost $\geqq n$. (Pojem kružnice v grafu odpovídá názorné geometrické představě; barevnost grafu je minimální počet barev, které stačí k obarvení vrcholů grafu tak, že žádné dva vrcholy spojené hranou nejsou obarveny stejnou barvou, barevnost grafu G označíme $\chi(G)$.) Pro $l = 3$, $n = 4$ je příklad takového grafu uveden na obrázku 1a). O obtížnosti problému se každý přesvědčí, pokusí-li se najít graf s parametry $l = n = 4$ nebo $l = 8$, $n = 4$. [27] poskytuje nejsnazší konstruktivní důkaz existence těchto grafů.

Konstrukce tak někdy poskytují grafy s počtem vrcholů

$$\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^n}}}}}}_{50\text{krát}} \qquad (n \text{ parametr}).$$

Takové konstrukce se (kromě výše uvedeného příkladu vysoce barevných grafů bez krátkých kružnic) často vyskytují v otázkách Ramseyova typu (viz [23], [24]) nebo v nedávno dokázaném významném výsledku [32], dosaženém na semináři kombinatorické algebry P. GORALČÍKA („každý konečný svaz je podsvazem svazu ekvivalencí vhodné konečné množiny" – tento algebraický výsledek byl dokázán z velké části pomocí teorie grafů).

Konstrukce výše uvedeného typu mají čistě existenční charakter a svou povahou leží „někde mezi" konečnou a nekonečnou matematikou. Poněkud překvapivě někdy také nacházejí v nekonečné matematice uplatnění, viz [23].

Pro snadnější zvládnutí podobných konstrukcí byly vyvinuty různé kombinatorickokategoriální metody, které mohou mít zpětně širší význam. Tyto metody se zpravidla opírají o vhodnou reprezentaci grafů. Tak například chceme-li sestrojit graf, který neobsahuje trojúhelníky (tj. podgraf izomorfní K_3) a má barevnost větší nebo rovnu n, stačí uvážit graf G_N s množinou vrcholů $\{(i, j);\ 1 \leqq i < j \leqq N\}$ a množinou hran $\{\{(i,j),(j,k)\};\ i < j < k\}$. Pro dostatečně veliké číslo N (např. pro $N \geqq n!$ e, kde e je základ přirozených logaritmů) platí $\chi(G_N) > n$ a je snadné se přesvědčit, že graf G_N neobsahuje trojúhelníky. Uvedená konstrukce je speciálním příkladem konstrukce tzv. typových grafů (viz [26]). Jiným příkladem je použití součinů grafů (a odtud odvozené dimenze grafu, viz [17], [22]) a zkoumání lepení (amalgamace) grafů [27], [35]. Pomocí vhodných „elementárních" operací je možno také ze třídy všech grafů a relací (o které víme, že je velmi složitá) vydělit podtřídy, které jsou „zvládnutelnější", viz [26], [28], [30], [34].

5. Neefektivnost kombinatorických konstrukcí se však nemusí projevit v tak drastické formě. Může být mnohem skrytější.

Pro ilustraci tohoto a dalších odstavců uvažme jako příklad konkrétního problému problém určení nezávislosti $\alpha(G)$ daného grafu $G = (V, E)$: ptáme se po možnosti sestrojení množiny $A \subseteq V$, která neobsahuje žádnou hranu grafu G (tj. $\{a, b\} \notin E$ pro každé $a \in A$, $b \in A$) a která má velikost $\geqq k$. $\alpha(G)$ je maximální hodnota čísla k; použitím operace doplňku je možno nezávislost grafu G definovat jako maximální velikost úplného podgrafu v $-G$.

Nezávislost grafu (a obdobně definovaná nezávislost společnosti) je důležitý pojem. Na problém určení nezávislosti daného grafu nebo dané společnosti lze jednoduchým způsobem převést tak rozdílné úlohy jako jsou:

(i.) zjištění, zdali dva grafy jsou izomorfní (grafy na obr. 1b) a 1d) jsou izomorfní);

(ii.) určení maximálního počtu disjunktních množin (v daném souboru množin);

(iii.) nalezení minimální souvislé části (V, E') v daném souvislém grafu (V, E); tzv. problém minimální kostry daného grafu;

(iv.) konstrukci blokových schémat a konečných geometrií;

(v.) nalezení hamiltonovské kružnice v daném grafu (tj. nalezení kružnice, která prochází všemi vrcholy daného grafu; graf na obrázku 1b) tuto kružnici neobsahuje);

(vi.) pro danou společnost $(V, \mathscr{M})$ nalezení systému různých reprezentantů (tj. prosté funkce $f: \mathscr{M} \to V$ splňující $f(M) \in M$ pro každé $M \in \mathscr{M}$; tato úloha souvisí například s vytvořením optimálního rozvrhu práce).

(Tak například chceme-li nalézt minimální souvislou část (V, E') v daném souvislém grafu $G = (V, E)$, potom stačí uvážit společnost $(E, \mathscr{K})$, kde týmy společnosti tvoří právě množiny hran všech kružnic grafu G. Lze snadno nahlédnout, že každá maximální nezávislá množina $E' \subseteq E$ společnosti $(E, \mathscr{K})$ je minimální souvislá část grafu G. Ostatní převody nejsou o mnoho složitější. O těchto a dalších významech nezávislosti grafu a společnosti se čtenář dočte v [20].)

V různých podobách se tedy nutnost řešit úlohu nalezení maximální nezávislé množiny daného grafu (nebo úloha získání „dobrého" odhadu) vyskytuje velmi často.

Řešení problému však není nasnadě.

Uveďme tedy hlavní možné přístupy k řešení problému rozhodnutí, zda nezávislost daného grafu s n vrcholy je větší nebo rovna číslu k.

Násilný způsob řešení (prozkoumání všech k-bodových podmnožin množiny vrcholů daného grafu) vede k cíli jen pro „malé" grafy nebo pro „malá" k. Většina problémů tohoto typu je však zadána tak, že k je funkcí n $\left(\text{např. } k \sim \frac{n}{2}\right)$, a proto pro provedení tohoto postupu je třeba obecně počet kroků, který je exponenciální funkcí n.

Jako první přiblížení k praktické zvládnutelnosti problému zavedeme pojem efektivního algoritmu. Algoritmus pro řešení nějakého kombinatorického problému o grafech s n vrcholy nazveme *efektivní*, jestliže nutný počet kroků nepřesáhne hodnotu $P(n)$, kde P je nějaký polynom (nezávislý na volbě n). Zde by bylo nutno upřesnit pojem kroku, čtenář však vystačí s intuitivní představou.

V obdobném smyslu hovoříme o efektivním algoritmu pro kombinatorické úlohy obecně.

V následujících dvou odstavcích nastíníme problematiku efektivnosti algoritmů.

6. Hledání efektivního algoritmu pro určení maximální nezávislé množiny v daném grafu naráží na velké obtíže. Je třeba říci hned zpočátku, že v úplné obecnosti pro tuto úlohu žádný efektivní algoritmus dosud znám není, a z toho, co bude řečeno v dalším (odstavec 8), vyplyne, že pravděpodobně ani neexistuje.

Pro speciální třídy grafů a společností však efektivní algoritmus pro hledání maximální nezávislé množiny může existovat. Tak například jedna z nejdůležitějších vlastností stromů (tj. souvislých grafů bez kružnic) je skutečnost, že stromy lze efektivně identifikovat (tj. problém (i.) má v případě stromů efektivní algoritmus).

Jiný příklad je založen na tom, že pro každý graf lze efektivně zkonstruovat nezávislou množinu, která již není obsažena v žádné větší nezávislé množině (tj. nezávislou množinu, která je maximální vzhledem k inkluzi množin – ne nutně co do velikosti). Pro velkou třídu grafů a společností se pak nalezení maximální nezávislé množiny redukuje na konstrukci nezávislé množiny maximální vzhledem k inkluzi. Tak je tomu například ve výše uvedeném problému (iii.). (Tato skutečnost byla poprvé zjištěna českými matematiky již ve třicátých letech, viz [3], [13].) Společnosti, pro něž maximální nezávislé množiny splývají s nezávislými množinami maximálními vzhledem k inkluzi, byly algebraicky axiomatizovány a pro svou praktickou důležitost jsou zkoumány odděleně (tzv. *teorie matroidů*, viz např. [36]). Tato teorie úzce souvisí s *teorií toků v sítích*, což je jedna z nejdůležitějších částí teorie grafů jak z teoretického, tak z praktického hlediska (viz [10]). Tato teorie umožňuje řešit například problém (vi.).

Znalost těchto (dnes v podstatě již klasických) metod je důležitá v aplikacích dopravního a rozmisťovacího charakteru. Novější příklady takových aplikací jsou uvedeny např. v [4] a [21].

Skutečnost, že pro určitý problém existuje efektivní řešení, znamená podle naší úmluvy pouze, že existuje polynom (například n^{1000}), který omezuje počet kroků algoritmu aplikovaného na libovolný graf s n vrcholy. Tento fakt ještě tedy nezaručuje proveditelnost a praktický význam algortimu. Pro většinu kombinatorických problémů, pro které existuje efektivní algoritmus, se podařilo najít rovněž algoritmus, který pracuje uspokojivě rychle (odhady typu n^4 jsou již pro základní kombinatorické problémy výjimkou).

Poznamenejme nakonec, že v poslední době byla značná pozornost věnována hledání velice rychlých efektivních algoritmů pro základní číselné a kombinatorické operace a konstrukce. Tento výzkum má výrazně kombinatorickou povahu a čtenář se o něm dočte blíže v [0], [2] a [15].

7. Pro nalezení nezávislé množiny velikosti $\geqslant k$ v obecném grafu (a také pro řešení úloh (i.), (ii.) a (v.)) není efektivní algoritmus znám. V takovém případě se můžeme pokusit maximální nezávislou množinu „uhádnout". Při určité zkušenosti (a štěstí) je možno mnohdy navrhnout efektivní postup, který v konkrétních případech *zpravidla* nalezne nezávislou množinu velikosti $\geqslant k$, pokud ovšem nezávislá množina takové velikosti vůbec existuje. Takový heuristický algoritmus více méně systematicky probírá některé k-bodové podmnožiny a o každé z nich snadno rozhodne, zda je či není nezávislá. Je zřejmé, že vhodnost postupu závisí na konkrétních údajích úlohy, pro kterou se algoritmus navrhuje.

Zdůrazněme ovšem, že výše nastíněný postup pro nalezení nezávislé množiny velikosti $\geqslant k$ má naději, jestliže v daném grafu vůbec existuje nezávislá množina velikosti k. Je totiž velký rozdíl mezi důkazy těchto dvou tvrzení: a) $\alpha(G) \geqslant k$; b) $\alpha(G) < k$. Zatímco důkaz a) *může být* (při troše štěstí a intuice) jednoduchý tím, že prostě podáme popis nezávislé množiny velikosti k, případ b) znamená, že neexistuje k-bodová nezávislá množina. Není zřejmé, jak tuto skutečnost dokázat jinak než prověřením všech podmnožin velikosti k. Jinak: v případě, že neexistuje k-bodová nezávislá množina, potom heuristický postup neposkytuje vůbec žádnou informaci (kromě informace o délce beznadějného hledání neexistující množiny).

Východiskem z této situace je v mnohých případech tzv. *dobrá charakteristika* (což je typicky kombinatorický pojem) uvedený poprvé v práci [7]. Dobrá charakteristika nějakého problému, (například hledání maximální nezávislé množiny pro nějakou speciální třídu grafů) je taková jeho charakteristika, která zhruba řečeno zaručuje toto:

1. má-li problém pozitivní řešení, potom tuto skutečnost můžeme snadno uhodnout;
2. nemá-li problém pozitivní řešení, potom tuto skutečnost můžeme rovněž snadno uhodnout.

Typickým příkladem dobré charakteristiky je tvrzení, které pro každý graf G (z dané třídy, pro niž platí dobrá charakteristika) zaručuje ekvivalenci dvou skutečností:

1'. existence (speciálního) homomorfismu h_1 z daného grafu G;

2'. neexistence (speciálního) homomorfismu h_2 do daného grafu G.

1'. je možno snadno dokázat (nalezením příslušného homomorfismu h_1). Nemá-li 1'. kladné řešení, potom je možno snadno dokázat non 2'. (nalezením příslušného homomorfismu h_2). Ať již tedy homomorfismus h_1 existuje, či nikoliv, lze tuto skutečnost snadno uhodnout. Tak je tomu například v klasickém příkladu dobré charakteristiky, problému (vi.): společnost $(V, \mathscr{M})$ má systém různých reprezentantů, právě když neexistuje $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{M}$ tak, že $\left|\bigcup \mathscr{N}\right| < \left|\mathscr{N}\right|$.

Zřejmě má-li problém efektivní řešení, potom má i dobrou charakteristiku. Pro většinu problémů rovněž platí, že z jejich dobré charakteristiky plyne i jejich efektivní řešení. Tuto implikaci je však třeba dokazovat (mnohdy netriviálně) případ od případu (práce [31] je věnována teoretickému pozadí této otázky).

V kombinatorice je známo mnoho příkladů dobrých charakteristik, zpravidla ve formě min-max vět (tato problematika úzce souvisí s větou o dualitě lineárního programování). Tyto „charakterizační věty" (viz [20]) tvoří jádro aplikované kombinatoriky.

8. Formální upřesnění výše nastíněné klasifikace složitosti problémů (heuristické řešení, dobrá charakteristika, efektivní řešení) je nejlépe provést v jazyce teorie automatů: efektivnost (deterministického) algoritmu znamená, že algoritmus pracuje v polynomiálním čase (= je polynomiálně omezený) a náhodné hledání je vystiženo pojmem nedeterministického algoritmu. V daném případě lze však vyloženým pojmům porozumět bez formálních definic a historicky tak také ke vzniku některých těchto pojmů došlo.

S pomocí teorie automatů lze však dokázat větu, která vystihuje chování většiny běžných kombinatorických úloh vzhledem k efektivnosti. To souvisí s tzv. PNP problémem, který je jedním ze základních neřešených problémů jak teorie automatů, tak kombinatoriky (viz původní práce [5] a [14]; z hlediska teorie automatů jsou tyto otázky na MFF studovány v semináři M. Chytila).

Je možno ukázat, že většina základních (dosud efektivně neřešených) kombinatorických úloh je co do složitosti řešení navzájem ekvivalentní: pro libovolnou z těchto úloh existuje efektivní řešení, právě když existuje efektivní řešení pro všechny tyto úlohy. Seznam úloh, které patří do této skupiny navzájem ekvivalentních úloh je velmi rozsáhlý a velmi rozmanitý (okolo 50 základních úloh).

Pro informaci uveďme pouze tyto: rozhodnutí, zda barevnost daného grafu je menší nebo rovna k; rozhodnutí, zda nezávislost grafu je $\geqslant k$; rozhodnutí, zda existuje úplný podgraf velikosti $\geqslant k$; rozhodnutí, zda daný graf má hamiltonovskou kružnici; rozhodnutí, zda z daného systému množin lze vybrat rozklad nosné množiny; rozhodnutí, zda pro daná přirozená čísla $k_1, \ldots, k_n, k$ existují čísla $c_i \in \{0, 1\}$ tak, že $\sum c_i k_i = k$.

Tento seznam není zdaleka úplný a níže uvedeme ještě několik dalších úloh, které do něho rovněž patří (viz [21], [22], [29] jako příspěvky československých autorů do tohoto seznamu).

PNP problém (nebo jinak „P versus NP" problém) je otázka, zda nějaký problém z výše uvedeného seznamu navzájem ekvivalentních úloh je efektivně řešitelný. Lze ukázat (a zde budeme méně přesní, protože jsme potřebné pojmy z důvodů rozsahu tohoto článku nezavedli, viz např. [0], [14] pro podrobný výklad), že tato otázka je ekvivalentní otázce, zda každý NP problém, tj. problém, který lze řešit nedeterministicky polynomiálním algoritmem (tj. jehož kladné řešení lze „uhodnout"), je rovněž P problémem, tj. problémem, který je řešitelný polynomiálně omezeným deterministickým algoritmem. Právě v této formulaci spočívá důležitost PNP problému.

Protože však třída NP problémů je velmi rozsáhlá a zahrnuje prakticky všechny kombinatorické problémy, bylo by velmi překvapující, kdyby některý z výše uvedených problémů (které se nazývají NP-complete = nedeterministicky polynomiálně úplné) měl efektivní řešení.

Na druhé straně přechod od efektivně řešitelných problémů k problémům efektivně pravděpodobně neřešitelným (tj. NP-úplným) je velmi „náhlý". O tom svědčí tato tabulka:

efektivně řešitelné	NP-úplné
rozhodnutí, zda graf má barevnost $\leqslant 2$	rozhodnutí, zda graf má barevnost $\leqslant 3$
nalezení minimální souvislé části grafu G, která obsahuje všechny vrcholy G	nalezení minimální souvislé části grafu, která obsahuje danou množinu vrcholů G
nalezení maximálního počtu disjunktních hran (tj. dvojic) v daném grafu (V, E)	nalezení maximálního počtu disjunktních trojic v dané společnosti $(V, \mathscr{M})$, která se skládá pouze z trojic
nalezení cesty minimální délky mezi dvěma vrcholy grafu	nalezení cesty maximální délky mezi dvěma vrcholy grafu
výpočet determinantu	výpočet permanentu
řešení soustavy lineárních rovnic	řešení soustavy kvadratických rovnic

(Permanent je definován formálně stejným výrazem jako determinant, pouze jednotlivé členy rozvoje se uvažují s kladnými znaménky.)

Poznamenejme nakonec, že ne o všech kombinatorických problémech je známo, zda mají efektivní algoritmus či jsou NP-úplné. Příkladem takové úlohy je problém izomorfismu (i.). Na druhé straně existují kombinatorické problémy, pro které není známo, zda jsou to NP problémy. Příklad takových problémů je uveden v [9]: problém související s rozhodnutím, zda existuje vyhrávající strategie pro jistou třídu her na grafech.

9. Pokusili jsme se v tomto článku obsáhnout poměrně širokou oblast. Je pochopitelné, že u většiny otázek jsme zůstali pouze u základních informací. O uvedených otázkách se čtenář dočte blíže v uvedené literatuře, kde jsou však v poměrné úplnosti citovány pouze práce domácích autorů. Světová literatura je uvedena pouze v hlavních referencích (další odkazy čtenář najde v příslušných uvedených pracích).

Kniha [20] je v jistém smyslu rozpracováním koncepce tohoto článku.

Literatura

[0] A. V. Aho, J. E. Hopcroft, J. D. Ullman: *The design and analysis of computer algorithms* Addison-Wesley Publ. Co., Reading (1974).

[1] K. Appel, W. Haken: *Every planar map is four colourable.* Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976).

[2] A. Borodin, I. Munro: *The complexity of algebraic and numerical systems.* American Elsevier Publ. Co. (1975).

[3] O. Borůvka: *O jistém problému minimálním.* Práce mor. přírodověd. spol. v Brně, *III*, sv. 3 (1926), 37—58.

[4] O. BOTLÍK: *Optimální toky v sítich.* Ve sborníku: Numerické metody a teoria grafov, SVTS Košice (1976), 113—121.

[5] S. A. COOK: *The complexity of theorem-proving procedures.* Proc. cf the Third ACM Symposium on Theory of Computing (1971), 151—158.

[6] Československý kombinatorický bulletin 1977/78, MFF KU (1977).

[7] J. EDMONDS: *Paths, trees and flowers.* Canad. J. Math. *17* (1965), 127—136.

[8] P. ERDÖS, J. SPENCER: *Probabilistic methods in combinatorics.* Akademiai Kiadó a North Holland Publ. Co. (1974), ruský překlad (1976).

[9] S. EVEN, R. E. TARJAN: *A combinatorial problem which is complete in polynomial space,* J. of ACM, *23* (1976), 710—719.

[10] L. R. FORD JR., D. R. FULKERSON: *Flows in networks.* Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1962), ruský překlad (1966).

[11] F. HARARY, E. M. PALMER: *Graphical enumeration.* Academic Press, New York (1973), ruský překlad (1977).

[12] A. J. HOFFMAN, R. R. SINGLETON: *On Moore graphs with diameter 2 and 3.* IBM J. Res. Develop. *4* (1960), 497—504.

[13] V. JARNÍK: *O jistém problému minimálním.* Práce mor. přírodověd. spol. v Brně, *VI*, sv. 4 (1930), 57—63.

[14] R. M. KARP: *Reducibility among combinatorial problems.* Complexity of Computer Computations. (R. E. MILLER, J. W. THATCHER, eds.), Plenum Press, New York (1972), 85—104; viz také práci téhož autora *On the Computational Complexity of Combinatorial Problems,* Networks *5* (1975), 45—68.

[15] D. F. KNUTH: *The art of Computer Programming, Vol. 1: Fundamental algorithms.* Addison Wesley (1968), ruský překlad (1976).

[16] L. KUČERA: *Expected behaviour of graph colouring algorithms.* Lecture. Notes in Computer Science *56.* Springer Verlag, Berlin (1977).

[17] L. LOVÁSZ, J. NEŠETŘIL, A. PULTR: *On a product dimension of a graph.* Vyjde v J. Comb. Th. (B).

[18] V. MÜLLER: *The edge reconstruction hypothesis is true for graphs with more than n log n edges.* J. Comb. Th. (B), *22* (1977), 281—283.

[19] V. MÜLLER: *Probabilistic reconstruction of graphs.* Comment. Math. Univ. Carolinae, *17,* 4 (1976), 709—719.

[20] J. NEŠETŘIL: *Teorie grafů.* SNTL (1978).

[21] J. NEŠETŘIL: *Některé rozmisťovací problémy řešené pomocí teorie grafů.* Ve sborníku: Numerické me'ódy a teoria grafov, SVTS Kcšice (1976), 122—131.

[22] J. NEŠETŘIL, A. PULTR: *A Dushnik-Miller type dimension of graphs and its complexity.* Lecture. Notes in Computer Science *56.* Springer Verleg, Berlin (1977), 482—494.

[23] J. NEŠETŘIL, V. RÖDL: *A structural generalization of the Ramsey theorem.* Bull. Amer. Math. Soc. *83* (1977), 127—128.

[24] J. NEŠETŘIL, V. RÖDL: *Partition (Ramsey) theory — a survey.* Ve sborníku 4th Hungarian Comb. Coll. (1976), North Holland Publ. Co. (1977).

[25] J. NEŠETŘIL, V. RÖDL: *A probabilistic graph-theoretical method.* Proc. Amer. Math. Soc. (1978).

[26] J. NEŠETŘIL, V. RÖDL: *Type theory of partition problems of graphs.* Recent Advances in Graph Theory (M. FIEDLER, ed.), Academia, Praha (1975), 405—412.

[27] J. NEŠETŘIL, V. RÖDL: *A short proof of the existence of highly chromatic graphs without short cycles.* J. Comb. Th. (B) (1978).

[28] J. PELANT, V. RÖDL: *On generating of relations.* Comment. Math. Univ. Carolinae *14,* 1 (1973), 95—105.

[29] S. POLJAK: *A note on stable sets and colouring of graphs.* Comment. Math. Univ. Carol. *15* (1974), 307—309.

[30] S. POLJAK, D. TURZÍK: *On amalgamation of graphs and essential sets of generators.* Zadáno do J. of Graph Th.

[31] P. PUDLÁK: *Observační predikátový počet a teorie složitosti.* Diplomová práce MFF KU (1975).

[32] P. Pudlák, J. Tůma: *Every finite lattice may be embedded in a finite partition lattice.* Vyjde v Algebra Univ.
[33] F. P. Ramsey: *On a problem of formal logic.* Proc. London Math. Soc. *30* (1930), 264—286.
[34] V. Rödl: *Dimense grafu a zobecnění Ramseyovy věty.* Diplomová práce MFF KU (1973).
[35] J. Voldřich: *Gradual partition of a graph into complete graphs.* Vyjde v Čas. pro pěst. mat.
[36] R. J. Wilson: *Introduction to graph theory.* Oliver Boyd, Edinburg (1972), ruský překlad (1977).

Vědecká práce posluchačů na katedře matematické analýzy a jejích aplikací MFF UK.

Břetislav Novák a kol., Praha

Projekt československé vzdělávací soustavy ukládá vysokým školám soustavně vyhledávat nadané studenty, umožňovat jim studium podle individuálních nebo skupinových studijních plánů a zapojovat je do řešení výzkumných úkolů. Cílem tohoto článku je ukázat některé metody práce katedry matematické analýzy a jejích aplikací MFF UK v tomto směru a shrnout vybrané výsledky z posledních pěti let. Výročí dvaceti pěti let vzniku matematicko-fyzikální fakulty, které si letos připomínáme, je současně i stejným výročím studia na zaměření matematická analýza, která spolu s matematickou statistikou tvoří (neuspořádanou) dvojici nejstarších matematických zaměření na fakultě. Pro úplnost jen dodejme, že katedra matematické analýzy je jen o několik let mladší.

Článek úzce navazuje na příspěvky [3] a [10], publikované v tomto časopisu. Nebudeme se tedy zabývat otázkami způsobu výuky matematické analýzy v prvním dvouletí; myšlenky vyjádřené v [10] zůstávají v platnosti i v současné reformě studia matematiky, jak bude patrné i z článku, který redakce připravuje. Stejně tak nebudeme podrobněji rozebírat metodu práce výběrových seminářů a kroužků v rámci studentské vědecké a odborné činnosti; odkazujeme čtenáře na článek [3] a omezíme se na konkrétní výsledky.

Dobrou tradicí, která se na katedře matematické analýzy a jejích aplikací plně osvědčila, je studium vybraných posluchačů podle individuálních studijních plánů. I když zaměření matematická analýza studují v drtivé většině studenti, kteří mají vynikající studijní výsledky, lze mezi nimi skoro každoročně nalézt alespoň jednoho, který na sebe třeba již v prvém dvouletí upozorní výrazným nadáním a schopností k samostatné tvůrčí vědecké práci. Je nutno dodat, že jsou to vesměs studenti a studentky s širokými zájmy třeba ve sportu, hudbě i umění a aktivně činní ve fakultní svazácké organisaci.

Při vstupu studentů na zaměření ve třetím ročníku vzniká tedy pro katedru problém, pro které studenty sestavit individuální studijní plán a ovšem také jak ho zaměřit. Je to otázka velmi složitá. Její řešení závisí na „zabarvení“ schopností studenta a také