Rudolf Hajossy

Brownov pohyb ako zdroj poučenia pre spravodlivého skúšajúceho

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 20 (1975), No. 5, 269--274

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138272

diskuse

Brownov pohyb ako zdroj poučenia pre spravodlivého skúšajúceho

Rudolf Hajossy, Bratislava

Motto:

Examinations are formidable even to the best prepared, for the greatest fool may ask more than the wisest man can answer.

Charles Caleb Colton (?–1802)

Koľko otázok má položiť skúšajúci, aby sa pri hodnotení nepomýlil viacej ako o pol stupňa? Aké „šance" má poslucháč s chronickými neznalosťami, že úspešne absolvuje vysokoškolské štúdium? Dať, či nedať dekanskú výnimku? To sú otázky, na ktoré sa pokúsime nájsť odpoveď. Pri hľadaní konkrétnych odpovedí využijeme analógiu, ktorá platí medzi skúšaním a potácavým pohybom námorníka Browna (Brownovým pohybom).

Výpočtom dĺžky dráhy, ktorú absolvuje opitý námorník potom, ako ho vyhodili z krčmy, sa zaoberal FEYNMAN vo svojom známom kurze fyziky [1]. Spomínaný autor riešil tento spoločensky zaujímavý problém v celej jeho dvojrozmernej obecnosti. My sa v našich úvahách obmedzíme na špeciálny prípad drunken-sailor efektu – na jeho jednorozmernú variantu s krčmou situovanou v strede úzkej uličky. V takomto zjednodušenom prípade o vzdialenosti r_{n+1}, do ktorej sa námorník dostane po $n+1$ krokoch, rozhoduje dĺžka jeho kroku d a vzdialenosť r_n, v ktorej sa nachádzal po n krokoch. Zrejme platí vzťah:

$$r_{n+1} = r_n + d\,. \tag{1}$$

V prípade malého množstva krvi v alkohole sú výsledky chodeckých pokusov nevyspytateľné, preto je rozumnejšie zaujímať sa o strednú hodnotu absolvovanej vzdialenosti $\overline{r_{n+1}}$, pre ktorú, ako vyplýva zo vzťahu (1), platí nasledovný rekurentný vzorec:

$$\overline{r_{n+1}} = \overline{r_n + d} = \overline{r_n} + \bar{d}\,. \tag{2}$$

Za predpokladu, že počiatočná vzdialenosť r_0 od krčmy bola nulová ($r_0 = \overline{r_0} = 0$) a že v istom priblížení priemerná dĺžka kroku $\bar{d}$ nezávisela od strednej hodnoty prekonanej vzdialenosti $\overline{r_n}$, z rekurentného vzorca (2) vyplýva vzťah:

$$\overline{r_n} = n\bar{d}\,. \tag{3}$$

V prípade triezveho námorníka vzťah (3) poskytuje triviálny výsledok: $\overline{r_n} \sim n$, pretože všetky kroky takéhoto námorníka majú približně rovnakú dĺžku d_0. Priemerná dĺžka $\bar{d} = d_0$ zaručuje, že sa skúmaná osoba vzďaľuje od krčmy priamoúmerne s počtom urobených krokov n.

Pod vplyvom alkoholu však môže skúmaný objekt vykročiť s rovnakou pravdepodobnosťou ľubovoľným z obidvoch možných smerov, ktoré úzka ulička dovoľuje. V zjednodušenom prípade dĺžka kroku môže nadobúdať hodnoty d_0, alebo $-d_0$. V takomto prípade bude priemerná dĺžka $\bar{d}$, a ako vyplýva zo vzťahu (3), aj priemerná vzdialenosť $\overline{r_n}$, nulová. Nemožno však očakávať, že by počet krokov obidvoma smermi bol vždy presne rovnaký. Určite po „záverečnej" nebudú všetci milovníci ohnivej vody sústredení vo dverách spoločenskej miestnosti. Budú rozptýlení v okolí bodu $\overline{r_n} = 0$. Veľkosť príslušnej disperzie D_n môžeme určiť vtedy, ak sa budeme zaujímať iba o absolútnu hodnotu vzdialenosti

$|r_n|$, do ktorej sa klienti protialkoholickej poradne dostanú a nie o smer, ktorým sa chodecký výkon v rámci uličky uskutočnil. Nepríjemnostiam s absolútnymi hodnotami sa môžme vyhnúť tak, že budeme počítať priemernú hodnotu štvorca vzdialenosti r_n^2. Potom namiesto vzťahu (2) dostaneme analogický rekurentný vzorec:

$$(4) \qquad \overline{r_{n+1}^2} = \overline{(r_n + d)^2} = = \overline{r_n^2 + 2r_n d + d^2} = \overline{r_n^2} + \overline{d^2}\,.$$

Pri úpravách vzťahu (4) sme využili skutočnosť, že $\overline{r_n d} = \overline{r_n}\overline{d} = 0$. Táto skutočnosť odzrkadľuje fakt, že pri veľkom počte skúmaných osôb ku každej hodnote $r_n d > 0$ existuje hodnota $r_n d < 0$. Nakoľko $\overline{r_0^2} = r_0^2 = 0$ a $\overline{d^2} = [(+d_0)^2 + (-d_0)^2]/2 = d_0^2$, potom zo vzťahu (4) vyplýva, že

$$\overline{r_n^2} = n\overline{d^2} = nd_0^2\,,$$

resp.

$$(5) \qquad D_n = \sqrt{\overline{r_n^2}} = d_0\sqrt{n}\,.$$

Vzťah (5) predstavuje exaktný dôkaz mravného ponaučenia, že nadmerné osobné zásluhy pri ničení metly ľudstva sa nevyplácajú, pretože u osôb zvlášť zaslúžilých dochádza k znižovaniu pohybových schopností. Zatiaľ čo dĺžka dráhy prekonaná triezvym jedincom sa zväčšuje lineárne s počtom krokov [pozri vzťah (3)], dĺžka dráhy potácajúceho sa objektu narastá iba s odmocninou z n [pozri vzťah (5)]. Uvedené nevýhody $1-2$ gramov alkoholu na 1 kg živej váhy ([2]) sa prejavujú hlavne na dlhších tratiach.

Poznatky získané štúdiom potácavého pohybu námorníka Browna môže fyzikpedagóg priamo aplikovať na vlastnú prácu, konkrétne, na skúšanie a známkovanie. Stačí si uvedomiť, že vykonávanie hrdelného práva na študentoch skrýva v sebe náhodnosť typickú pre Brownov pohyb: zrejme počet bodov r_{n+1} získaných po $n+1$ odpovediach závisí od počtu bodov r_n, ktoré skúšaný získal za predchádzajúcich n odpovedí a od počtu bodov d, ktoré môže získať za jedinú odpoveď. Výsledok odpovede na otázku závisí od toho, či príslušná otázka je z oblasti, ktorú skúšaný ovláda, prípadne neovláda. Skúšaný, ktorý ovláda iba polovicu požadovanej látky, môže získať za odpoveď na jednu otázku práve tak $+d_0$, ako aj $-d_0$ bodov, Nedostatočne (iba z polovice) pripravený poslucháč teda priemerne získa za odpoveď na jednu otázku $\overline{d} = 0$ bodov. Vzťah (3) predpovedá, že takýto poslucháč získa pri odpovedi na n otázok priemerne $\overline{r_n} = 0$ bodov.

Obvykle však počet dobrých a zlých odpovedí nebýva presne rovnaký. U jednotlivých poslucháčov uvedených kvalít sa počet získaných bodov môže v priemere odchyľovať od $\overline{r_n} = 0$ až o hodnotu $+D_n$, prípadne $-D_n$ bodov. Disperziu D_n určuje vzťah (5). Počet bodov r_n u takýchto poslucháčov bude v najlepšom prípade narastať iba s odmocninou z n. U výborne pripravených skúšaných bude počet získaných bodov narastať priamoúmerne s počtom otázok n. Odchýlka medzi závislosťami od n a od $\sqrt{n}$ narastá s rastúcim n. Zrejme, ak chce mať skúšajúci väčšiu istotu pri rozlišovaní dobrej odpovede od nevyhovujúcej, musí pri skúške položiť čo najväčší počet otázok n. Automaticky sa vynára problém: „Koľko otázok má položiť spravodlivý skúšajúci, aby jeho hodnotenie dosahovalo presnosť 1/2 stupňa?" Konkrétna odpoveď na túto otázku samozrejme závisí od hodnotiaceho kľúča, podľa ktorého sa k bodom získaným za odpoveď priraďuje známka.

Pri našich odhadoch budeme používať nasledovné hodnotiace kritériá: Domnievame sa, že polovičné znalosti skúšanej látky treba označiť za nevyhovujúce. (Podniky zamestnávajúce poloodborníkov sú neefektívne. K normálnej činnosti potrebujú minimálne dvojnásobný počet zamestnancov.) Poslucháč s polovičnými znalosťami v priemere získa pri n-otázkovej skúške nula bodov. Pri dokonalom ovládaní skúšanej látky mohol získať až $+nd_0$ bodov. Ak ako vyhovujúci označíme interval $(0, +nd_0\rangle$ bodov, potom pri trojstupňovom hodnotení vyhovujúcich odpovedí bude potrebné tento interval rozdeliť na tri podintervaly o dĺžke rádove $nd_0/3$. Na pol stupňa teda pripadá interval o dĺžke $nd_0/6$ bodov.

Nakoľko poslucháč s polovičnými znalosťami môže získať až $+D_n = \sqrt{(n)}\, d_0$ bodov, skúšajúci, ktorý chce hodnotiť s presnosťou na $1/2$ stupňa musí voliť taký počet otázok, aby disperzia D_n nepokryla väčší interval ako $+nd_0/6$ bodov:

$$(6) \qquad D_n = \sqrt{(n)}\, d_0 \leqq nd_0/6\,.$$

Z podmienky (6) pre spravodlivú skúšku vyplýva, že presnosť hodnotenia na pol stupňa predpokladá zodpovedanie aspoň na 36 skúšobných otázok.

Obecne, disperzia $D_n = \sqrt{(n)}\, d_0$ pokrýva S stupňov:

$$(7) \qquad S = D_n/(nd_0/3) = 3/\sqrt{n}\,.$$

Pri trojotázkovej skúške sa teda dosahuje „presnosť" $S = 3/\sqrt{3} \approx 1{,}75$ stupňov. Pri takejto „presnosti" pomerne veľmi dobrý poslucháč nemusí skúšku urobiť, zatiaľ čo iba dobré znalosti sa môžu hodnotiť ako výborné.

Odhad minimálneho počtu otázok, z ktorých sa má skladať spravodlivá skúška, možno spresniť, ak si uvedomíme rozdiely medzi skúšaním a Brownovým pohybom: Pri brownovskom pohybe sú jednotlivé kroky navzájom úplne nezávislé. Tá istá kroková variácia sa môže vyskytovať aj viackrát. Dôsledná analógia s brownovským pohybom by teda vyžadovala, aby skúšajúci nevylučoval možnosť, že položí tú istú otázku tomu istému skúšanému v rámci tej istej skúšky aj viackrát. Zväčšovaním rozsahu skúšanej látky sa zväčšuje počet všetkých možných skúšobných otázok N. Pri súčasne nemeniacom sa počte položených otázok n sa potom zmenšuje možnosť výskytu nepriaznivej situácie – opakovania otázky, a tým sa aj zlepšuje analógia medzi skúšaním a Brownovým pohybom. S rastúcim rozsahom skúšanej látky sa teda vyššie uvedené odhady stávajú presnejšími.

Po matematickej stránke sa rozdiel medzi Brownovým pohybom a skúšaním prejavuje v tom, že pravdepodobnosť, s akou sa dosiahnu jednotlivé vzdialenosti r_n po n krokoch, popisuje binomické rozdelenie pravdepodobnosti, zatiaľ čo pravdepodobnosť, s akou skúšaný pri n-otázkovej skúške získa r_n bodov, popisuje hypergeometrické rozdelenie ([3]). Pre výpočet disperzie D takéhoto rozdelenia treba namiesto vzťahu (5) použiť vzťah ([4])

$$(8) \qquad D = \sqrt{\left[4Z(1-Z)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)n\right]}\, d_0\,,$$

v ktorom ako Z označujeme stupeň skutočných znalostí poslucháča. Veličina Z udáva, koľkú časť zo všetkých N možných skúšobných otázok by poslucháč dokázal správne zodpovedať. (Veličiny n, d_0 majú pôvodný zmysel.)

V prípade hypergeometrického rozdelenia presnosť na pol stupňa si vyžaduje splniť podmienku

$$S = D/(nd_0/3) = 1/2 \tag{9}$$

analogickú podmienkam (6), (7) pre binomické rozdelenie. V prípade 100otázkovej látky ($N = 100$) zo vzťahov (8), (9) vyplýva, že poslucháča s polovičnými znalosťami ($Z = 1/2$) môžme spoľahlive hodnotiť až na základe jeho odpovedí na $n = 27$ otázok. (Binomické rozdelenie vyžadovalo o 9 otázok viac.)

Zo vzťahov (8), (9) je ďalej zrejmé, že najväčšie požiadavky na počet otázok n sú v prípade poslucháča so stupňom znalostí $Z = 1/2$.

Uvedenú presnosť $S = 1/2$ treba chápať štatisticky. Aj v prípade veľkého počtu skúšobných otázok môže spravodlivý skúšajúci nesprávne hodnotiť odpovedajúcich. Ako vyplýva z Gaussovho-Laplaceovho integrálu ([5]) aj v prípade takého veľkého počtu otázok, že disperzia D pokrýva interval zodpovedajúci iba pol stupňu, sa skúšajúci dopustí chyby väčšej ako 1/2 stupňa u 1/3 hodnotených. (Nepresnosti väčšej ako jeden stupeň sa dopustí v 1/20 prípadov a chyby väčšej ako 1,5 stupňa v 1/400 prípadov.)

Presná znalosť tvaru rozdelenia pravdepodobnosti umožňuje prekročiť rámec analógie medzi skúšaním a brownovským pohybom.

Tak napríklad, pri známom rozdelení pravdepodobnosti a pri známom hodnotiacom kľúči možno určiť pravdepodobnosť $p_r(Z)$, s ktorou poslucháč so znalosťami Z úspešne absolvuje skúšku už v riadnom termíne. Zo známej hodnoty p_r možno vypočítať pravdepodobnosť p_1, že príslušnú skúšku urobí až na prvý opravný termín. Zrejme platí vzťah:

$$p_1 = (1 - p_r)\, p_r\,. \tag{10}$$

Analogické vzťahy dostaneme aj pre pravdepodobnosti p_2, p_d, p_v, že pri tých istých znalostiach Z skúšku absolvuje až na druhý opravný termín, dekanskú výnimku, prípadne bude vylúčený zo štúdia pre neprospech:

$$p_2 = (1 - p_r)^2\, p_r\,, \tag{11}$$

$$p_d = (1 - p_r)^3\, p_r\,, \tag{12}$$

$$p_v = (1 - p_r)^4\,. \tag{13}$$

Nakoľko normálne by viacej možností nemalo existovať, mal by platiť vzťah:

$$p_r + p_1 + p_2 + p_d + p_v = 1\,. \tag{14}$$

Pri nevhodnom hodnotiacom kľúči alebo pri malom počte skúšobných otázok, a teda malej presnosti pri hodnotení, poslucháč s polovičnými znalosťami príslušnú skúšku absolvuje v riadnom termíne s pravdepodobnosťou $p_r = 1/2$. Ďalšie pravdepodobnosti, ako vyplýva zo vzťahov (10) až (13), majú potom hodnotu $p_1 = 1/4$, $p_2 = 1/8$, $p_d = p_v = 1/16$.

Absolvovanie vysokoškolského štúdia predpokladá absolvovanie ~10 obtiažnych dielčich skúšok. Poslucháč s polovičnými znalosťami teda ukončí celé štúdium s pravdepodobnosťou

$$p_a \approx (1 - p_v)^{10} = [1 - (1/2)^4]^{10} \approx 0{,}51\,. \tag{15}$$

Znamená to, že z desiatich kváziodborníkov prakticky piati budú mať možnosť „šíriť slávu" príslušnej školy po okolí.

Pomocou vzťahov (10)–(14) možno tiež vypočítať, koľko rôznych opravných termínov bude poslucháč so znalosťami Z počas celého štúdia potrebovať. Z celkového počtu absolvovaných m skúšok na riadny termín pripadne P_r skúšok. Na prvý a druhý opravný termín a na dekanskú výnimku pripadne P_1, P_2, P_d skúšok.

Zrejme medzi počtom skúšok a príslušnými pravdepodobnosťami bude platiť priama úmernosť: $P_r = kp_r, \ldots, P_d = kp_d$. Nakoľko

$$(16) \quad m = P_r + P_1 + P_2 + P_d = = k(p_r + p_1 + p_2 + p_d),$$

potom zo vzťahov (14) a (16) pre konštantu úmernosti k dostaneme vzťah

$$(17) \qquad k = m/(1 - p_v).$$

Počet skúšok P_r, P_1, P_2, P_d absolvovaných v jednotlivých termínoch a tiež pravdepodobnosť absolvovania celého štúdia p_a ukazuje tabuľka. Hodnoty príslušných nimkami s veľkou pravdepodobnosťou nemá ani 1/3 požadovaných znalostí. Tabuľka je teda matematicky formulovaným doslovom k porekadlu o koňovi, ktorý napriek štyrom nohám má právo na potknutie: „Múdry kôň sa iba raz potkne na tom istom kameni."

Pri odhadoch veľkosti parametrov charakterizujúcich proces skúšania sme mlčky robili rôzne predpoklady: Predpokladali sme objektívneho skúšajúceho, nestrémovaného skúšaného, náhodnosť voľby otázky, iba dve možnosti hodnotenia odpovede na danú otázku; hodnotiace kritériá nie dosť explicitne rešpektovali spôsob mysle-

Stupeň znalostí skúšaného	Priemerný počet skúšok absolvovaných v jednotlivých skúšobných termínoch				Pravdepodobnosť absolvovania štúdia
	riadny	prvý opravný	druhý opravný	dekanská výnimka	
Z	P_r	P_1	P_2	P_d	p_a
1/2	5,33	2,66	1,34	0,67	0,51
2/3	7,41	1,94	0,51	0,14	0,95
1/3	3,72	2,77	2,04	1,47	0,03

veličín sme určili zo vzťahov (10) až (17) za predpokladu $m = 10$ skúšok a notoricky polovičných znalostí $Z = 1/2$ poslucháča. V tabuľke pre porovnanie uvádzame aj výsledky získané v prípade pomerne dobrých ($Z = 2/3$), ale tiež i veľmi slabých ($Z = 1/3$) znalostí. V posledných dvoch prípadoch sme pri výpočte predpokladali binomické rozdelenie a trojotázkovú skúšku ([6]).

Z tabuľky je zrejmé, že dekanská výnimka by mala byť naozaj iba výnimkou, pretože absolvent s dvoma takýmito vý- nia a aktívnosť vedomostí skúšaného V dôsledku uvedených predpokladov vyššie získané hodnoty treba považovať iba za rádové odhady, na ktoré by sa však nemalo zabúdať pri skúškach so značným dopadom na osud skúšaného (maturitných, prijímacích, ašpirantských, ... skúškach, dekanskej výnimke). Niektoré zjednodušenia predkladanej teórie spravodlivej skúšky sa dajú odstrániť zobecnením teórie, prípadne vhodnou voľbou skúšobných otázok.

Nekládli sme si za cieľ vytvoriť presné

návody na zorganizovanie spravodlivej skúšky. Mali sme iba snahu upozorniť ako niektoré aspekty skúšobného procesu vyzerajú vo svetle čísel. Chceli sme taktiež poukázať na obecnú platnosť metódy, ktorú vyvinul Einstein a Smoluchowski ([1], [8]) z príležitosti vyšetrovania Brownovho pohybu. Výsledky tejto metódy možno s úspechom využiť pri meraní Boltzmannovej konštanty, Avogadrovho čísla, pri výpočte veľkosti skrútenia kábla na telefónnom aparáte ([1]), pri výpočte počtu častíc so spinom orientovaným v smere vonkajšieho magnetického poľa ([9]). Našou snahou bolo ukázať na použiteľnosť metódy popisujúcej Brownov pohyb aj pri skúmaní niektorých pedagogických javov. Dôvodom, prečo sme na ilustráciu Brownovho pohybu volili práve pohyb, ku ktorému dochádza pri neopatrnej manipulácii s alkoholom, je v tom, že tento typ brownovského pohybu bol z historického hľadiska známy ako prvý. Základ k výskumom v tejto oblasti pohybov položili známe experimenty lodného konštruktéra Noeho s kolektívom ([7]). Nechceme si robiť plané nádeje, že by matematická formulácia nevýhod potácavého pohybu mohla dohnať fyzikálnu obec do stavu notorickej abstinencie. Chceli by sme však touto cestou vzdať hold univerzálnosti, ktorú fyzika získala vďaka používaniu matematiky pri popise prírodných javov.

Literatúra

[1] Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M.: *The Feynman Lectures on Physics I.* Reading, Massachusetts, 1966, 41—4, 6—2, 6—3.

[2] Vámoši M.: *Zisťovanie a posudzovanie opilosti.* SAV, Bratislava, 1955, 96—112. (Za upozornenie na túto prácu by sme sa chceli poďakovať MUDr. M. Bárdošovi.)

[3] Nejman J.: *Vvodnyj kurs teorii verojatnostej i matematičeskoj statistiky.* Nauka, Moskva, 1968, 220—300.

[4] Korn G., Korn T.: Spravočnik po matematike. Nauka, Moskva, 1973, 571—752.

[5] Skvajrs Dž.: *Praktičeskaja fizika.* Mir, Moskva, 1971, 30—32.

[6] Hajossy R.: *Systematické štúdium a objektívne hodnotenie ako ilúzie vo svetle čísel.* Záverečná práca z postgraduálneho kurzu vysokoškolskej pedagogiky, 1973.

[7] *Biblia,* 1 M. (Genesis) 9, 20—24.

[8] Einstein A.: *Investigations on the Theory of the Brownian Movement.* Dover Publications, Inc., 1956.

[9] Reif F.: *Statističeskaja fizika, Berklejevskij kurs fiziky V.* Nauka, Moskva, 1972, 73—92.