Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jitka Staňková

Početní pravítka

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 5 (1960), No. 6, 669--675

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138255

POČETNÍ PRAVÍTKA

JITKA STAŇKOVÁ, *FIS ČVUT*, Praha

Počítání na logaritmickém pravítku je běžně známo. Stupnice obvyklého logaritmického pravítka (např. LOGAREX 25 cm) mají zobrazovací rovnice[1])

$$\xi_1 = 25 \log x\,; \quad \xi_2 = \frac{25}{2} \log x\,; \quad \xi_3 = \frac{25}{3} \log x\,; \quad \xi_4 = 25\,x\,;$$

$$\xi_1' = 25 \log x\,; \quad \xi_2' = \frac{25}{2} \log x\,, \quad \xi_3' = 25 \log \frac{10}{x}\,, \quad \xi_4' =$$

$$= 25 \log 10 \sin x\,; \quad \xi_5' = 25 \log 10 \operatorname{tg} x\,; \quad \xi_6' = 25 \log 100 \sin x.$$

Nečárkované elementy jsou umístěny na pevné části pravítka, čárkované na šoupátku. Odůvodněme nyní např. pravidlo pro násobení dvou čísel na logaritmickém pravítku. Rovnici $a \,.\, b = c$ *logaritmujeme a násobíme 25. Pak můžeme psát*

$$25 \log b - 25 \log 1 = 25 \log c - 25 \log a$$

neboli

$$\xi'(b) - \xi'(1) = \xi(c) - \xi(a)\,.$$

Všechna pravidla výpočtů na logaritmickém pravítku lze lehce odvodit ze vztahů mezi souřadnicemi a naopak rozdíly souřadnic příslušných bodů při určitém nastavení pravítka určují vztah mezi kótami, tj. operaci s danými čísly. Tohoto poznatku, totiž že počítání na pravítku spočívá v sčítání a odčítání úseček na příslušných stupnicích, lze využít ke konstrukci speciálních početních pravítek, jak názorně ukazuje odstavec 1 a 2. V odstavci 3 a 4 je uvedena konstrukce složitějších početních pravítek a na příkladech jsou ukázány podrobné návrhy početních pravítek. K dalšímu výkladu se také užívá souvislosti, že početní pravítka lze chápat jako zvláštní případ nomogramů s průsvitkou.

Početní pravítka jsou založena na soustavě různých stupnic nebo jiných nomografických útvarů (binární pole, soustavy isoplét, průsečíkové nomogramy), které jsou umístěny jednak na pevné části pravítka, jednak na jeho posuvných částech. Slouží jako početní pomůcky k rychlému numerickému řešení různých početních vztahů. Podstata počítání na pravítku spočívá v principu sdružování nomografických elementů (stupnic) v pevné nebo proměnné poloze a pravidlo výpočtu lze vždy odvodit pomocí rozdílů souřadnic těch elementů, které pro příslušný výpočet používáme. Typickým příkladem pravítka je běžné logaritmické pravítko s obvyklou soustavou stupnic.

V praxi se však vyskytuje požadavek řešit vztahy komplikovanější, které se na logaritmickém pravítku řeší obtížně, vyžadují několikerá nastavení šoupátka, nebo řešit vůbec nejdou. V takových případech používáme speciální početní pravítka, jejichž konstrukce je dána těmito obecnými postupy:

1. Mějme rovnici tvaru

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k + \dots = f_n \tag{1}$$

kde f_k $(k = 1, \dots, n)$ je libovolná funkce k-té proměnné. Utvořme stupnice o zobrazovacích rovnicích $\xi = \alpha f_k$ $(k = 1, \dots, n)$. Počátky těchto stupnic nechť jsou $O_1, O_2, \dots, O_n$[2]) a body $M_1, M_2, \dots, M_n$ nechť jsou kótovány hodnotami řešícími vztah (1). Potom početní pravítko má n-2 šoupátek (nebo šoupátko s n-2 stupnicemi) a postup výpočtu je znázorněn

[1]) Zobrazovací rovnice stupnice funkce $f(x)$ je $\xi = \alpha f(x)$, kde ξ je souřadnice, α modulová míra, x kóta.

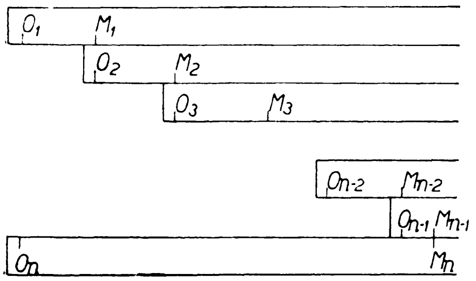
[2]) Kdyby daný rozsah některé stupnice byl značně vzdálen od počátku, upravíme rovnici (1) přičtením vhodných konstant tak, aby potřebné části stupnice ležely co nejblíže počátku a délka pravítka tím zůstala přiměřená.

schématem na obr. č. 1, neboť zřejmě vztah $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_k + \ldots = \xi_n$ splňuje rovnici (1).

2. Mějme rovnici tvaru

$$f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + \ldots + f_{2n-1} - f_{2n} = K\,, \tag{2}$$

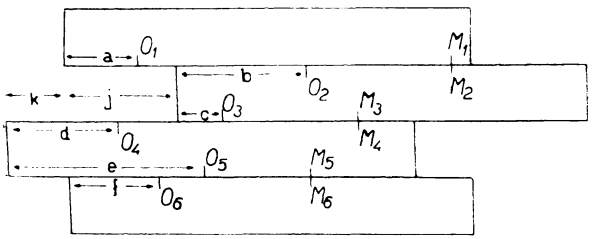
kde f_i $(i = 1, \ldots, 2n)$ je libovolná funkce i-té proměnné. Utvořme stupnici o zobrazovacích rovnicích $\xi_i = \alpha f_i$ $(i = 1, \ldots, 2n)$. Nechť počátky stupnic O_1, $O_2, \ldots, O_{2n}$ jsou voleny tak, aby v základní poloze $\overline{OO_1} = a$, $\overline{OO_2} = b, \ldots, \overline{OO_{2n}} = m$, kde $a - b + \ldots - m = \alpha K$. Nechť body $M_1, M_2, \ldots, M_{2n}$ jsou kotovány hodnotami řešícími vztah (2). Potom početní pravítko má $n - 1$ šoupátek a postup výpočtu je znázorněn (pro $n = 3$) schématem na obr. č. 2, neboť zřejmě (při $2n = 6$ a posunu prvního šoupátka o k délkových jednotek vpravo, druhého o j jednotek vlevo) je



Obr. 1.

$$\alpha f_1(M_1) - \alpha f_2(M_2) + \alpha f_3(M_3) - \alpha f_4(M_4) + \\ + \alpha f_5(M_5) - \alpha f_6(M_6) = a - (b + j) + \\ + (c + j) - (d - k) + (e - k) - f = \alpha K\,.$$

Případ, kdy počet proměnných je $2n - 1$ danou konstrukci podstatně nemění (na jednom šoupátku bude pouze jedna stupnice).



Obr. 2.

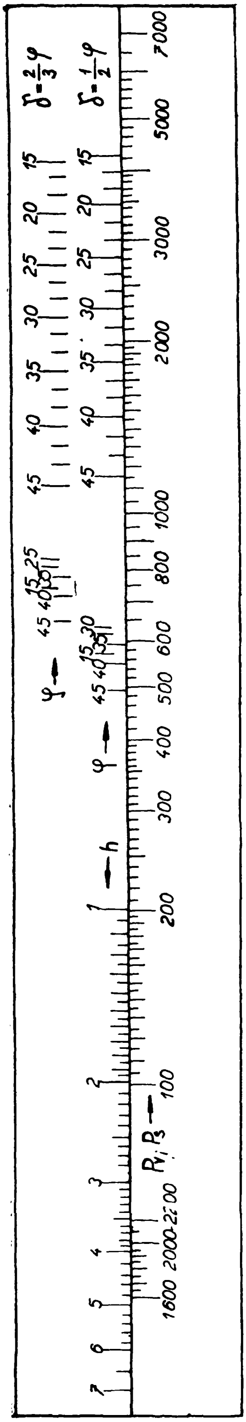
3. Při návrhu početních pravítek se často vyskytnou vztahy, které nelze vhodným způsobem převést na rovnici tvaru (1) nebo (2). V tomto případě používáme speciálních konstrukcí nejrozmanitějších druhů, spočívajících na zavádění nové pomocné proměnné, obdobně jako u sdružených průsečíkových nebo spojnicových nomogramů. Pravítko potom konstruujeme jako pravítko pro dva (nebo více) vztahy, které jsou vzájemně sdruženy pomocnou proměnnou. Příkladně rovnici

$$f_1(u) = \frac{f_2(v) \cdot f_3(w) \cdot f_4(s)}{f_5(t) + f_4(s)} \tag{3}$$

rozdělíme na dvě části, $A = f_5(t) + f_4(s)$, $f_1(u) = \dfrac{f_2(v) \cdot f_3(w) \cdot f_4(s)}{A}$, které jsou spolu na pravítku spojeny novou proměnnou A, pro první vztah je na pravítku stupnice o zobrazovací rovnice $\xi = \alpha A$, pro druhý vztah stupnice o zobrazovací rovnici $\xi = \alpha \log A$. Příslušnou hodnotu A (kótu) musíme při výpočtu vztahu (3) na pravítku nastavovat dvakrát.

Nebo danou rovnici upravíme a položíme $B = \dfrac{f_5(t)}{f_4(s)}$, $f_1(u) = \dfrac{f_2(v) \cdot f_3(w)}{B + 1}$. Oba vztahy jsou spojeny pomocí proměnné B a pravítko má opět dvě stupnice o zobrazovacích rovnicích $\zeta = \alpha \log B$ a $\xi = \alpha \log (B + 1)$.

Zdálo by se, že těmito třemi způsoby jsou vyčerpány obecné postupy při konstrukci početních pravítek. V praxi se však ukazuje, že v každém jednotlivém případě narazíme na řadu nesnází spočívajících jednak v hledání vhodných zobrazovacích rovnic stupnic a jejich umisťování na pravítko, jednak v požadavku, aby čtení na pravítku bylo co možná nejjednodušší a s nejmenším možným počtem posunů šoupátka. Pro tento problém nelze nalézt obecně platného pravidla a je třeba jej řešit případ od případu. Tak na příklad máme zkonstruovat:



Obr. 3a. Pravítko pro výpočet vodorovné a svislé složky poměrného tlaku při statickém řešení vodorovné opěrné zdi.

I. pravítko pro vztah

$$p = \gamma h \left(\frac{\cos\varphi}{n+1}\right)^2 \cdot \frac{1}{\cos\delta}\,, \quad \text{kde } n = \sqrt{\frac{\sin(\varphi+\delta)\,.\,\sin\varphi}{\cos\delta}}\,, \tag{4a}$$

vyskytující se při statickém řešení vodorovné opěrné zdi; p je poměrný tlak, uvažujeme-li tření mezi zeminou a zdí. Jeho vodorovná a svislá složka je vyjádřena rovnicemi

$$p_v = p\,.\cos\delta\,, \quad p_s = p\,.\sin\delta\,. \tag{4b}$$

Rozsah a význam proměnných:

γ ...	(1700, 2200) kg/m³	spec. váha zeminy,
h ...	(1, 7) m	výška opěrné zdi,
φ ...	(15°, 45°)	úhel přirozené sklonitosti zeminy,
δ ...	$\delta = \frac{1}{2}\varphi$, $\delta = \frac{2}{3}\varphi$	třecí úhel.

Logaritmováním vztahu (4a, b) a vynásobením modulovou mírou α dostáváme vztahy

$$\alpha \log p_v - \alpha \log \gamma = \alpha \log f_i(\varphi) - \alpha \log h\,,$$
$$\alpha \log p_s - \alpha \log \gamma = \alpha \log g_i(\varphi) - \alpha \log h\,, \quad (i = 1, 2\,,$$
$$[i = 1 \text{ pro } \delta = \tfrac{1}{2}\varphi,\ i = 2 \text{ pro } \delta = \tfrac{2}{3}\varphi)\,,$$

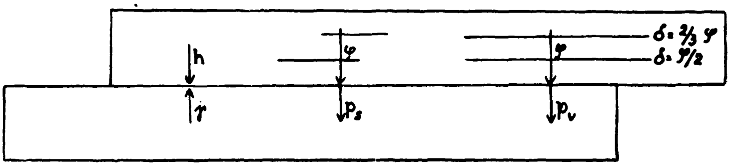
které jsou přímo „zobrazovacími rovnicemi" pravítka. Stupnice funkcí f_i a g_i ($i = 1, 2$) zakreslujeme jako dvojstupnice. Vzhledem k tomu, že stupnice pro f_i a g_i ($i = 1, 2$) se vzájemně nepřekrývají, máme možnost obě tyto stupnice zakreslit vedle sebe a výsledné hodnoty p_v a p_s číst na jedné stupnici p s upozorněním (viz obr. č. 3b), že pod g_i čteme p_s a pod f_i čteme p_v (při nastaveném h nad γ). Návrh početního pravítka viz obr. č. 3a

II. pravítko pro vztahy

$$M_m = s_0\,.\,M\,; \qquad h = \alpha\sqrt{\frac{M_m}{b}}\,; \qquad r = \varrho\sqrt{\frac{M_m}{b}}\,;$$
$$N_a = \frac{M_m}{r}\,; \qquad F_a = \frac{N_a}{2{,}3}\,, \tag{5}$$

vyskytující se při výpočtech obdélníkových nosníků.
Rozsah a význam proměnných:

b ...	(10, 60) cm	průřez nosníku,
h ...	(20, 120) cm	výška statická,
M ...	(50, 3000) kgm	moment nad podporou,
s_0 ...	$s_0 = 1{,}6$; $s_0 = 1{,}9$ ...	bezpečnostní koeficient,
α ...	(0,25 , 2,08)	činitel v tabulkách,
ϱ ...	(0,575, 103,8)	činitel v tabulkách,
r_0 ...	....	rámě výsledkové dvojice sil
N_a ...	tlaková síla působící na výztuž,	
r_a ...	náhradní průřezová plocha tahové výztuže.	



Obr. 3b. Klíč k pravítku řešícímu rovnice (4a, b).

Logaritmováním daných rovnic (5) dostaneme

$$
\begin{aligned}
\log M_m &= \log M + \log s_0\,, && (\alpha)\\
\log h - \log \alpha &= \tfrac{1}{2}\log M_m - \tfrac{1}{2}\log b\,, && (\beta)\\
\log r - \log \varrho &= \tfrac{1}{2}\log M_m - \tfrac{1}{2}\log b\,, && (\gamma)\\
\log N_a &= \log M_m - \log r\,, && (\delta)\\
\log F_a &= \log N_a - \log 2{,}3\,. && (\varepsilon)
\end{aligned}
$$

Postup při návrhu:

a) Vztah (α) lze zakreslit jako dvojstupnici (pro $s_0 = 1{,}6$; $s_0 = 1{,}9$).

b) Spojíme vztahy (β) a (γ) tím, že pro proměnné h a r, α a ϱ použijeme vždy téže stupnice.

c) Vzhledem k velkému rozsahu proměnných vynásobíme vztah (δ) $\frac{1}{2}$, což umožní použít stupnice ve vztahu (β) resp. (γ) s upozorněním, že proměnnou r odčítáme tentokrát na stupnici proměnné b vztahu (β).

d) Stupnice $\log F_a$ a $\log N_a$ zakreslíme jako dvojí stupnici.

e) Vzhledem k umístění stupnic na pravítko o délce 30 cm upravíme (β) resp. (γ) na

$$
\log h(\text{resp} \log r) - \log 3{,}2 - \log \alpha(\text{resp} \log \varrho) = \tfrac{1}{2}\log M_m - \log 3{,}2 - \tfrac{1}{2}\log b\,.
$$

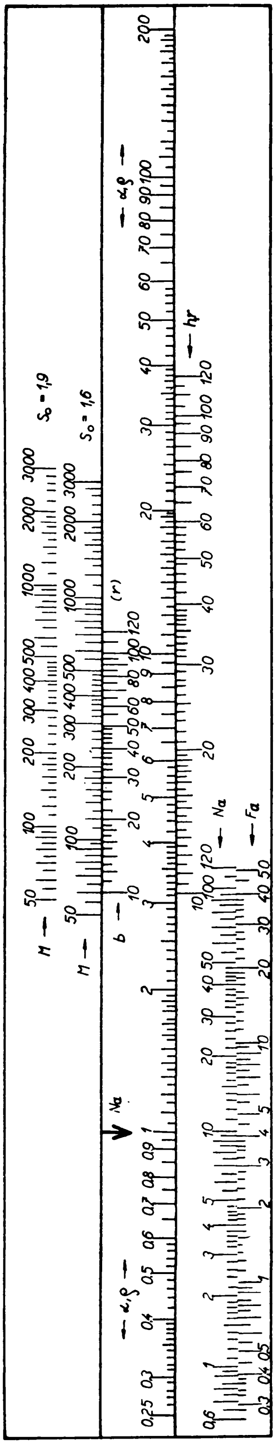
f) Umístění stupnic na pravítku — viz obr. č. 4a.

Postup při čtení:

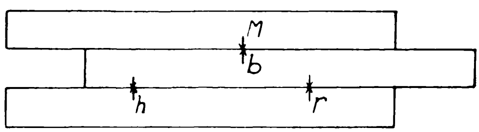
Vztah (α), (δ) a (γ) čteme při prvním nastavení šoupátka podle schématu (obr. č. 4b).

Vztah (ϱ) a (ε) čteme při druhém nastavení šoupátka podle schématu (obr. č. 4c).

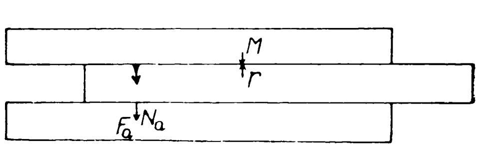
4. V uvažovaných tvarech, které jsme dosud konstruovali jako početní pravítka, jsme každou proměnnou zobrazovali stupnicí. Ukázali jsme však již také, že některé vztahy (např. $f_1 \cdot f_2 = f_3 + f_4$) lze zobrazit na pravítku teprve po zavedení nové pomocné proměnné. V těchto případech zdá se jednodušší použít binárních stupnic a konstruovat pravítko jako nomogram s průsvitkou o jednom stupni volnosti (translaci ve směru osy ξ), kde posun průsvitky na podkladě je zajištěn mechanickým způsobem. Průsvitka zde za-



Obr. 4a. Pravítko pro výpočet rovnic (5), vyskytujících se při výpočtech obdélníkových nosníků.



Obr. 4b.

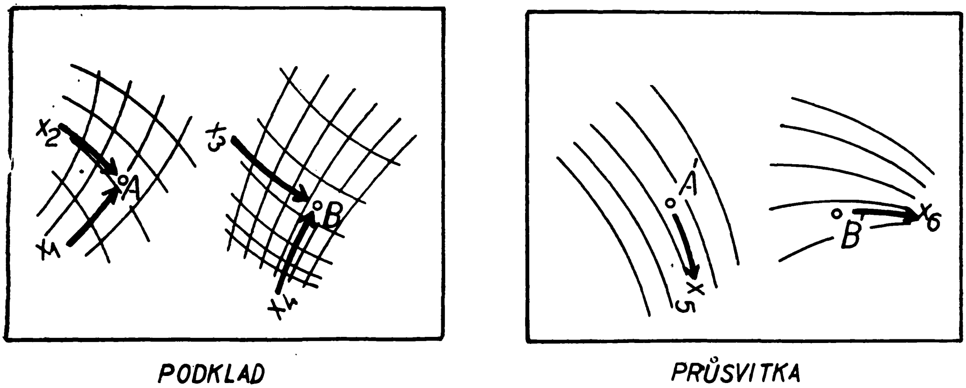


Obr. 4c.

stává dvojí úlohu: jednak šoupátka, jednak indexu a jediným nastavením můžeme číst hodnoty pro vztah o 6-ti proměnných.

Takové pravítko má na podkladě dvě binární pole, na průsvitce dvě soustavy isoplét (viz obr. č. 5). Vzájemně si odpovídající body označíme stejnými písmena $A(\xi_1, \eta_1)$, $A'(\xi_1', \eta_1')$ a $B(\xi_2, \eta_2)$, $B'(\xi_2', \eta_2')$. Elementy na průsvitce čárkujeme.

Odvoďme obecný tvar vztahu, který může být tímto pravítkem řešen. Napíšeme zobrazovací rovnice nomografických elementů na podkladě a na průsvitce.



Obr. 5. Početní pravítko jako nomogram s průsvitkou o jednom stupni volnosti (translaci ve směru osy ξ).

Podklad: $\xi_1 = f_{1,2}$ $\eta_1 = g_{1,2}$ Zobrazovací rovnice binárního pole (x_1, x_2).
$\xi_2 = f_{3,4}$ $\eta_2 = g_{3,4}$ Zobrazovací rovnice binárního pole (x_3, x_4).

Průsvitka: $F(\xi_1', \eta_1', f_5) = 0$ Zobrazovací rovnice soustavy isoplét (x_5).
odkud $\xi_1' = \Phi(\eta_1, f_5) = \Phi(g_{1,2}, f_5)$
$G(\xi_2', \eta_2', f_6) = 0$ Zobrazovací rovnice soustavy isoplét (x_6).

nebo-li

$$G(\xi_2 - \xi_1 + \Phi\,(\eta_1, f_5), \eta_2, f_6) = 0\,;$$

odtud plyne obecný tvar zobrazovaného vztahu

$$G(f_{3,4} - f_{1,2} + \Phi(g_{1,2}, f_5), g_{3,4}, f_6) = 0, \tag{6}$$

neboť mezi souřadnicemi bodů A, A' a B, B' v okamžiku, kdy splývají a kdy pravítko řeší zobrazovaný vztah, platí relace:

$$\eta_2 = \eta_2'\,,\ \eta_1 = \eta_1'\,,\ \zeta_2 - \xi_1 = \xi_2' - \xi_1'\,.$$

Zmenší-li se počet proměnných na pět, bude mít početní pravítko jedno binární pole

$$\xi_1 = f_{1,2}\,,\quad \eta_1 = g_{1,2}$$

a jednu stupnici — na podkladě

$$\xi_2 = f_3\,,\quad \eta_2 = \text{konst}$$

a jim odpovídající soustava isoplét

$$F(\xi_1', \eta_1', f_4) = 0$$

odkud

$$\xi_1' = \Phi(g_{1,2}, f_4)$$

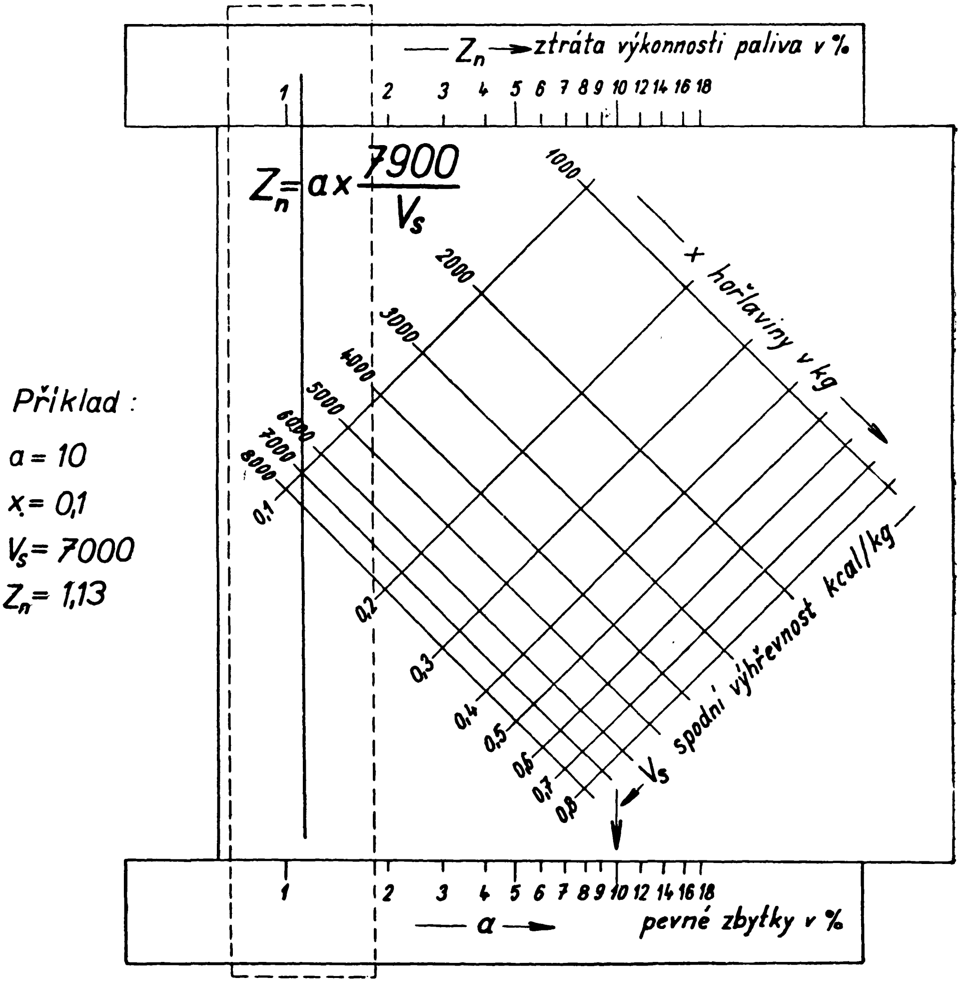
na průsvitce,

a stupnice

$$\xi_2' = f_5\,,\quad \eta_2' = \text{konst}$$

odkud plyne obecný tvar zobrazovaného vztahu

$$f_{1,2} - f_3 = \Phi(g_{1,2}, f_4) - f_5\,.$$



Obr. 6. Početní pravítko s binárním polem pro výpočet ztráty výkonnosti paliva nespálenými zbytky.

V případě čtyř proměnných redukuje se jedno binární pole na podkladě na bod, kterému bude odpovídat jedna stupnice na průsvitce (jedno binární pole a soustava isoplét zůstává zachována).

Příklad. Mějme za úkol zkonstruovat pravítko s binárním pole pro vztah $Z_n = a \cdot x \cdot \cdot \frac{7900}{V_s}$, kde rozsah a význam proměnných je uveden na obr. č. 6.

Zobrazovací rovnice:

$$\xi_1 = 0\,, \quad \eta_1 = 0 \quad \text{(nebo konst.)}\,, \quad \xi_2 = \alpha \log \frac{7900}{V_s} + \log x\,, \quad \eta_2 = \alpha \log \frac{7900}{V_s} -$$

— log x , $F(\xi_1', 0, \log a) = 0$, odkud $\xi_1' = \alpha \log a$, $\eta_1 = 0$ (nebo konst.), $G(\alpha) \log \frac{7900}{V_s}$

$\log x$ $(+ \alpha \log a,\ \eta_2,\ \alpha \log Z_n) = 0$, odkud $\xi_2' = \alpha \log Z_n$. Modulová míra $\alpha = 10$.
V případě tří proměnných redukuje se pravítko buď na průsečíkový nomogram, nebo na obyčejné početní pravítko.

Literatura

V. Hruška, *Počet grafický a graficko-mechanický* (Praha 1952b).
Ch. O. Mackey, *Graphical solutions* (New York 1945).
M. D'Ocagne, *Traité de Nomographie* (Paris 1899).