J. Kracík

Zákony zachování ve fysice plasmatu

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 5 (1960), No. 6, 676--697

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138254

FYSIKA

ZÁKONY ZACHOVÁNÍ VE FYSICE PLAZMATU

JIŘÍ KRACÍK, *ČVUT*, Praha

V tomto časopise vyšly před nedávnem tři přehledné články z magnetohydrodynamiky, speciální to části fysiky plazmatu). Následující článek je pokusem o obdobnou stať z fysiky laboratorního plazmatu.*

Je podáno odvození kinetické rovnice z Liouvillova teorému. Z této rovnice plynou zákon zachování náboje, rovnice pro hybnost, energii a rotační hybnost pro určitý druh částic, které s jinými částicemi vytvářejí plazma. Použitím rozvoje pro rozdělovací funkci je odvozen výraz pro makroskopickou rychlost a jsou podrobněji rozebrány jednotlivé členy předcházejících rovnic.

1. Úvod

V referativních článcích [6] a [7], uveřejněných v tomto časopise, byl vysvětlen pojem plazmatu a odvozeny některé základní rovnice fysiky plazmatu s ohledem na astrofysikální představy. Cílem tohoto referátu je seznámit čtenáře s problematikou základních rovnic fysiky plazmatu laboratorního, tj. se zákony zachování, ukázat jejich posloupnost, či jak se někdy říká hierarchii, povšimnout si kolektivního působení, odvození výrazu pro makroskopickou rychlost (unášivou) a při malé odchylce stavu plazmatu od statisticky rovnovážného stavu rozebrat členy jednotlivých základních rovnic a upozornit na jejich spojení (nebo nadřazenost) s rovnicemi hydrodynamiky.

V článku [7] je plazma definováno. Je vytvářeno různými druhy částic, elektricky nabitými či neutrálními a v rozličných kvantových stavech. Na tento soubor částic pak působí vnější a vnitřní silová pole, tj. gravitační síly a síly elektromagnetického původu. Vedle tepelného neuspořádaného pohybu mohou částice vykazovat i pohyb uspořádaný, který se projevuje jako makroskopické proudění částic. Jak změny neuspořádaného pohybu, tak i uspořádaného pohybu vedou ke změnám stavu plazmatu a ke změnám tvaru plazmatických útvarů.

Podmínky, za kterých existuje laboratorní plazma, liší se od podmínek, za kterých existuje plazma astronomických rozměrů. Laboratorní plazma je udržováno prakticky ve všech případech elektrickým proudem. Jde o výboj elektřiny v plynu. Přiloženým vnějším elektrickým polem jsou více urychlovány lehčí elektricky nabité částice než elektricky nabité těžší částice. Vlivem pružných i nepružných vzájemných srážek se částečně mění uspořádaný pohyb

*) J. Kleczek, *Hydromagnetika v kosmickém měřítku*, A. Hruška, *Rovnice magnetodynamiky plasmatu*, E. Chvojková, *Hydromagnetické vlny plasmatu*, v tomto časopise, V (1960), č. 3 a 5.

na pohyb neuspořádaný, tj. zvyšuje se kinetická teplota všech druhů částic, lehčích více. Plazma elektrického výboje je pak neisotermické, tj. kinetické teploty různých druhů částic jsou různé. Naproti tomu hvězdné plazma se nachází ve své většině ve stavu statistické rovnováhy, kinetické teploty všech druhů částic jsou stejné. Jde o isotermické plazma.

Vedle uvedeného rozdílu jde dále o vliv pružných a nepružných vzájemných srážek na rozdělovací funkci a tím i na další tzv. mikrofysikální veličiny, jako je koncentrace různých druhů částic a jejich kinetická teplota a o vliv na makroskopickou rychlost. U astrofysikálního plazmatu, které je zhusta s ohledem na vysokou teplotu vytvářeno jen elektrony a protony (binární plyn), pružné a nepružné bezprostřední srážky dvou částic (párové srážky) mají malý vliv [7]. V laboratorním plazmatu však ano, neboť kupř. nepružnými srážkami elektronů s neutrálními částicemi dochází ke vzniku iontového páru, takže tímto procesem při difusi částic a rekombinaci (sloučení) nabitých částic na stěnách výbojového prostoru je udržována rovnováha v jejich počtu. Vedle těchto párových srážek pružných, nepružných nebo coulombovských mají i v laboratorním plazmatu v mnohých případech značný vliv kolektivní silová pole, vytvářená kupř. lokální značnou změnou prostorového náboje nebo makroskopickým pohybem nabitých částic. Takto vznikající elektrická a magnetická pole zpětně plazma ovlivňují [6; 7].

Z naznačených rozdílů mezi laboratorním a astrofysikálním plazmatem ještě neplyne, že základní rovnice budou podstatně rozdílné. Naopak. Až na jiný počet členů, které právě vystihují vliv oněch bezprostředních srážek, lze chování laboratorního a astrofysikálního plazmatu vystihnout společnými základními vztahy. Počet rovnic uvedených v [7] je pro laboratorní plazma často výhodné rozšířit, případně podat jejich odvození s větším počtem členů. Pro malou rychlost uspořádaného pohybu lze rozkladem rozdělovací funkce dojít k velmi názorným vztahům.

Chování laboratorního plazmatu lze v podstatě mimo rovnic Maxwellových-Lorentzových popsat čtyřmi základními vztahy. Je to především zákon zachování hustoty pravděpodobnosti f_i (pro částice i-tého druhu), tzv. kinetická rovnice Boltzmannova (upravená), zákon zachování počtu částic (nebo náboje — rovnice kontinuity), zákon zachování hybnosti (rozšířená Eulerova rovnice pro plazma) a zákon zachování energie. Označíme-li vedle f_i pro částice i-tého druhu n_i jejich koncentraci (počet částic i-tého druhu v jednotce objemu), T_i jejich kinetickou teplotu a $\mathbf{u}_i$ vektor jejich makroskopické rychlosti, potom pro čtyři veličiny f_i, n_i, T_i, $\mathbf{u}_i$ dostáváme čtyři základní rovnice. Všechny úvahy lze uvedenými veličinami matematicky vyjádřit.

2. Zákon zachování hustoty pravděpodobnosti

Chování soustavy N hmotných bodů vystihuje soustava kanonických Hamiltonových rovnic

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}\ ;\ \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}\ ;\quad k = 1, 2, \ldots, s\ (s \leqq 3N)\,. \tag{1}$$

Zde p_k a q_k jsou zobecněná hybnost a souřadnice (tečka nad symbolem značí úplnou derivaci podle času), H je hamiltonián, s je počet stupňů volnosti. Horní zápis platí pro konservativní síly nebo pro síly elektromagnetického původu. Jiné síly se ve fysice plazmatu ani nevyskytují [5]. Každá funkce $F(q_1, q_2, \ldots, q_s; p_1, p_2, \ldots, p_s, t)$, která je identicky rovna konstantě, když q_k, p_k ($k = 1, 2, \ldots, s$) nahradíme jakýmkoli řešením rovnic (1), sluje prvý integrál této soustavy diferenciálních rovnic. Nutná a dostačující podmínka k tomu je, aby $\dot{F} = 0$. Rozepíšeme-li tento naznačený úkon, dostáváme s použitím (1)

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = 0 ,$$

nebo zavedením Poissonových závorek konečně

$$\frac{\partial F}{\partial t} + [F; H] = 0 . \tag{2}$$

V posledních dvou rovnicích t je čas. Je třeba mít stále na zřeteli, že jak F, tak i H jsou funkcemi q_k, p_k ($k = 1, 2, \ldots, s$) a t.

K rovnici (2) lze dojít jinou cestou. Je totiž zřejmé, že rovnice mechaniky (*1*) nejsou při velmi velkém počtu N částic zvládnutelné. Lze však na jejich základě a při nových představách dojít k takovým zákonitostem, které chování velkého makroskopického systému dokáží vystihnout.

Nechť zkoumaný makroskopický systém N částic má s stupňů volnosti. Znamená to, že k jeho určení postačuje $q_1, q_2, \ldots, q_s$ zobecněných souřadnic a $p_1, p_2, \ldots, p_s$ zobecněných hybností v příslušném čase t. Potom stav takového systému je v prostoru o $2s$ rozměrech $q_1, p_1, q_2, p_2, \ldots, q_s, p_s$ znázorněn jediným bodem. Tento prostor se nazývá fázovým prostorem, onen bod fázovým bodem. V průběhu času se mění poloha fázového bodu, který tak opisuje fázovou trajektorii, která charakterisuje vývoj makrosystému.

Předpokládejme, že systém s vnějším okolím nijak nespolupůsobí, že je zcela přesně ohraničen a že jsou známy podmínky na jeho okraji. Říkáme, že je uzavřen. Vydělme z tohoto systému nějakou jeho malou část, tzv. podsystém. Tento podsystém již nemůže být uzavřený. Se zbytkem systému dochází k vzájemnému ovlivňování.

Označme element fázového prostoru jako $\Delta q \Delta p = \prod_k (\Delta q_k \Delta p_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, s$. Je možné tvrdit, že v průběhu dostatečně dlouhého časového intervalu τ velmi složitá fázová trajektorie mnohokrát tímto elementem projde. Nechť Δt je ta část intervalu τ, v průběhu které se zvolený podsystém nachází v $\Delta q \Delta p$. Bude-li τ vzrůstat nade všechny meze, poměr $\Delta t / \tau$ bude se zřejmě blížit jisté mezi. Znamená to, že veličina

$$w = \lim_{\tau \to \infty} \frac{\Delta t}{\tau} \tag{3}$$

představuje pravděpodobnost toho, že při pozorování v libovolném okamžiku bude se podsystém nacházet v elementu fázového prostoru $\Delta q \Delta p$, tj. že bude ve zcela určitém stavu.

Zavedeme-li

$$\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}q\, \mathrm{d}p = \prod_k \mathrm{d}q_k\, \mathrm{d}p_k ; \quad k = 1, 2, \ldots, s , \tag{4}$$

potom pravděpodobnost $\mathrm{d}w$ stavů podsystému, zobrazujících se body v tomto elementu $\mathrm{d}\Omega$, bude úměrná s nějakou funkcí, označme ji F, velikosti tohoto elementu, tj.

$$\mathrm{d}w = F(q_1, q_2, \ldots, q_s; p_1, p_2, \ldots, p_s)\,\mathrm{d}\Omega\,. \tag{5}$$

Znamená to, že libovolná, kupř. k-tá souřadnice je v mezích q_k až $q_k + \mathrm{d}q_k$, libovolná, kupř. l-tá složka hybnosti je v mezích p_l až $p_l + \mathrm{d}p_l$. Funkce F je funkcí všech souřadnic a hybností a je to vlastně hustota rozdělení pravděpodobností stavů ve fázovém prostoru. Nazývá se funkcí statistického rozdělení či prostě rozdělovací (dynamickou) funkcí.

Provedeme-li integraci rovnice (5) přes celý fázový prostor, změní se pravděpodobnost na jistotu. Normovací podmínka potom je

$$\int_{(\Omega)} F\,\mathrm{d}\Omega = 1. \tag{6}$$

Mnohdy je výhodnější ztotožnit poslední integrál s počtem částic N, takže rozdělovací funkce F na místo k jedné je normována k N.

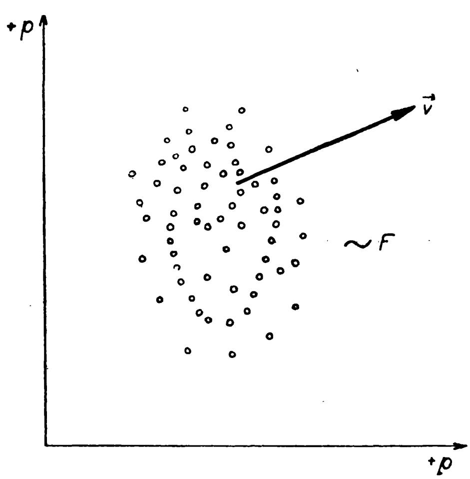
Mějme nějakou funkci $u = u(\Omega)$. Zde symbolem Ω pro jednoduchost označujeme souhrn $q_1, q_2, \ldots, q_s; p_1, p_2, \ldots, p_s$. Funkce $u(\Omega)$ nechť má k podsystému zcela určitý vztah (představuje kupř. okamžitou hodnotu energie kterékoli částice atd.) Známe-li rozdělovací funkci, můžeme počítat pravděpodobnosti rozličných hodnot libovolných fysikálních veličin, závislých na stavech zkoumaného podsystému (tj. na q a p). Můžeme potom určit i střední hodnotu $u(\Omega)$:

$$\bar{u} = \int_{(\Omega)} u(\Omega)\,F(\Omega)\,\mathrm{d}\Omega\,, \tag{7}$$

(při normování k N dostali bychom na levé straně minulé rovnice $N\bar{u}$). Rovnice (7) definuje tzv. statistický střed, neboť vynásobením veličiny u veličinou F dostaneme hodnotu této veličiny u pro různá q a p a integrací přes celý fázový prostor její střední hodnotu, která podle (3) musí být totožná s výrazem $\bar{u} = \lim\limits_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau u(t)\,\mathrm{d}t$, což je střední hodnota vytvořená časovým průměrem.

Povšimneme si dále nějakého podsystému v průběhu dlouhého časového úseku. Odpovídající rozdělovací funkce je $F = F(\Omega, t)$, neboť se může s časem hustota rozložení pravděpodobnosti ve fázovém prostoru měnit.

Podle obr. 1. vynesená fázová trajektorie znázorňuje vývoj podsystému v dlouhém časovém období. Pochopitelně bude fázová trajektorie procházet těmi místy, kde hustota pravděpodobnosti je větší než v místech sousedních. Podle obr. 1. lze si ale také situaci představit tak, že nakreslené fázové body představují stavy jednotlivých podsystémů, které lze po krátký časový okamžik považovat rozhodně za na sobě nezávislé. Body jsou rozloženy podle



Obr. 1. **Pohyb fázových bodů podsystémů.**

$F(\Omega, t)$ pro daný časový okamžik. Jinak řečeno, fázový prostor je vyplněn mediem, jehož hustota je dána hustotou pravděpodobnosti F. S postupem doby bude se měnit F od místa k místu, medium bude proudit podobně jako kapalina nebo plyn v hydrodynamice. Proudění tohoto media rychlostí $\mathbf{v}$ o hustotě F vystihuje zcela přesně a bez nároků na další popis rovnice kontinuity $\frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \, . \, (F\mathbf{v}) = 0$, čili zákon zachování počtu fázových bodů. Poslední rovnici dlužno vyjádřit přesněji s ohledem na počet rozměrů fázového prostoru. Můžeme psát, že

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial}{\partial x_k} (F v_k) = 0 \, .$$

Ale x_k je q_k a p_k, v_k pak $\dot{q}_k$ a $\dot{p}_k$. Tedy

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{k=1}^{s} \left[\frac{\partial}{\partial q_k} (F\dot{q}_k) + \frac{\partial}{\partial p_k} (F\dot{p}_k)\right] = 0 \, .$$

Použijeme-li k další úpravě rovnic (1), dostáváme snadno

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right) = 0 \, ; \quad k = 1, 2, \ldots, s, \; s \leqq 3N \, , \tag{8}$$

nebo při použití Poissonových závorek

$$\frac{\partial F}{\partial t} + [F; H] = 0 \, . \tag{8'}$$

Poslední rovnice je matematickým vyjádřením Liouvillova teorému o zachování a vývoji rozdělovací funkce. Při porovnání (2) a (8)′ je hned patrno, že rovnice (8)′ splňuje podmínku prvního integrálu rovnic (1) pro funkci F. Rovnice (8)′ spojuje tak statistické fysikální úvahy s mechanickým determinismem.

Pro zkoumání stavu systému o velkém počtu částic však Liouvillův teorém pro určení F poskytuje zrovna tak málo možností, jako kanonické rovnice Hamiltonovy. Lze však z něj určitým způsobem dospět k rovnicím pro značně jednodušší rozdělovací funkce než je F. Nyní bude Ω_i označovat soubor $q_i^{(1)}$, $q_i^{(2)}$, $q_i^{(3)}$, $p_i^{(1)}$, $p_i^{(2)}$, $p_i^{(3)}$, takže

$$\mathrm{d}\Omega_i = \prod_{\alpha=1}^{3} \mathrm{d}q_i^{(\alpha)} \, \mathrm{d}p_i^{(\alpha)} \, .$$

Určíme z (8)′ na místo $F(\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N; t)$, tj. rozdělovací funkce celého systému, funkci $f(\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k; t)$, tj. rozdělovací (dynamickou) funkci zvoleného podsystému o k částicích. Při tom $k < N$; f lze k F přiřadit touto operací:

$$f(\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k; t) =$$
$$= \int_{(\Omega_{k+1})} \int_{(\Omega_{k+2})} \ldots \int_{(\Omega_N)} F(\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N, t) \, \mathrm{d}\Omega_{k+1} \, \mathrm{d}\Omega_{k+2} \ldots \mathrm{d}\Omega_N \, , \tag{9}$$
$$k < N \, .$$

Jelikož integrujeme F po všech souřadnicích a hybnostech částice $(k + 1)$., $(k + 2)$., atd. až N-té, znamená podle (9) $\mathrm{d}w_k = f(\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k; t)$.

$\cdot \, d\Omega_1 \, d\Omega_2 \ldots, d\Omega_k$ pravděpodobnost toho, že ve zcela určitém časovém okamžiku se podsystém o k částicích nachází ve stavu, kdy souřasnice jsou v mezích q_1 až $q_1 + dq_1$, q_2 až $q_2 + dq_2, \ldots, q_k$ až $q_k + dq_k$, hybnosti v mezích p_1 až $p_1 + dp_1$, p_2 až $p_2 + dp_2, \ldots, p_k$ až $p_k + dp_k$, a kdy stav zbývající části systému o $(N - k)$ částicích je jakýkoliv. Dle (6) je

$$\int_{(\Omega_1)} \int_{(\Omega_2)} \ldots \int_{(\Omega_k)} f \, d\Omega_1 \, d\Omega_2 \ldots d\Omega_k = \int_{(\Omega_1)} \ldots \int_{(\Omega_k)} \ldots \int_{(\Omega_N)} F \, d\Omega = 1 \,,$$

nebo totožno N, tj. celkovému počtu částic systému (nikoli podsystému).

Operaci (9) uplatníme na (8)′ tak, že (8)′ násobíme $d\Omega_{k+1} \, d\Omega_{k+2} \ldots d\Omega_N$ a integrujeme člen po členu v mezích $(\Omega_{k+1}), (\Omega_{k+2}), \ldots, (\Omega_N)$. Podle (9) můžeme hned psát:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k; t) + \int_{(\Omega_{k+1})} \int_{(\Omega_{k+2})} \ldots \int_{(\Omega_N)} [F(\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k, \ldots, \Omega_N; t); H(\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k, \ldots, \Omega_N; t)] \, d\Omega_{k+1} \, d\Omega_{k+2} \ldots d\Omega_N = 0 \,. \tag{10}$$

Pro hamiltonián H můžeme napsat

$$H = \sum_{l=1}^{N} H_l(\Omega_l; t) + \sum_{(1 \leqq l < j \leqq N)} H_{lj}(\Omega_l; \Omega_j; t) \,. \tag{11}$$

Zde H_l jsou příspěvky jednotlivých částí k H od vnějších sil, H_{lj} pak od sil vnitřních.

Dosadíme-li (11) do (10) a označíme-li nyní $f(\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k; t) = f_k$, bude

$$\frac{\partial}{\partial t} f_k(\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k; t) + \sum_{l=1}^{N} \int_{(\Omega_{k+1})} \int_{(\Omega_{k+2})} \ldots \int_{(\Omega_N)} [F(\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k, \ldots, \Omega_N; t); H_l(\Omega_l; t)] \,.$$

$$d\Omega_{k+1} \, d\Omega_{k+2} \ldots d\Omega_N + \sum_{(1 \leqq l < j \leqq N)} \int_{(\Omega_{k+1})} \int_{(\Omega_{k+2})} \ldots \int_{(\Omega_N)} [F(\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k, \ldots, \Omega_N; t);$$

$$H(\Omega_l; \Omega_j; t)] \, d\Omega_{k+1} \, d\Omega_{k+2} \ldots d\Omega_N = 0 \,, \tag{12}$$

neboť $[F; H] = \sum_{\alpha=1}^{3} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i^{(\alpha)}} \frac{\partial H}{\partial p_i^{(\alpha)}} - \frac{\partial F}{\partial p_i^{(\alpha)}} \frac{\partial H}{\partial q_i^{(\alpha)}} \right)$, takže pro l-tou částici bude platit

$$\sum_{\alpha} \left(\frac{\partial F}{\partial q_l^{(\alpha)}} \frac{\partial H}{\partial p_l^{(\alpha)}} - \frac{\partial F}{\partial p_l^{(\alpha)}} \frac{\partial H}{\partial q_l^{(\alpha)}} \right) = \sum_{\alpha} \left[\frac{\partial F}{\partial q_l^{(\alpha)}} \frac{\partial}{\partial p_l^{(\alpha)}} (H_l + \sum_{(l < j \leqq N)} H_{lj}) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial F}{\partial p_l^{(\alpha)}} \frac{\partial}{\partial q_l^{(\alpha)}} (H_l + \sum_{(l < j \leqq N)} H_{lj}) \right] = [F; H_l] + \sum_{(l < j \leqq N)} [F; H_{lj}] \,.$$

Jelikož však všech částic je N, musí být sumace posledního výrazu rozšířena na $l = 1$ až N a $1 \leqq l < j \leqq N$, tj.

$$[F; H] = \sum_{l=1}^{N} [F; H_l] + \sum_{(1 \leqq l < j \leqq N)} [F; H_{lj}] \,, \tag{13}$$

čímž je správnost (12) potvrzena.

Integrální člen v této rovnici (12) rozložíme takto:

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + \sum_{l=1}^{k} \int_{(\Omega_{k+1})} \ldots \int_{(\Omega_N)} [F; H_l] \, d\Omega_{k+1} \ldots d\Omega_N + \sum_{l=k+1}^{N} \int_{(\Omega_{k+1})} \ldots \int_{(\Omega_N)} [F; H_l] \,.$$

$$\mathrm{d}\Omega_{k+1} \ldots \mathrm{d}\Omega_N + \sum_{(1 \leq l < j \leq k)} \int_{(\Omega_{k+1})} \ldots \int_{(\Omega_N)} [F; H_{lj}]\, \mathrm{d}\Omega_{k+1} \ldots \mathrm{d}\Omega_N + \sum_{\substack{l=1 \\ j=k+1}}^{l=k;\, j=N} \int_{(\Omega_{k+1})} \ldots \int_{(\Omega_N)}$$

$$[F; H_{lj}]\, \mathrm{d}\Omega_{k+1} \ldots \mathrm{d}\Omega_N + \sum_{(k+1 \leq l < j \leq N)} \int_{(\Omega_{k+1})} \ldots \int_{(\Omega_N)} [F; H_{lj}]\, \mathrm{d}\Omega_{k+1} \ldots \mathrm{d}\Omega_N = 0 \,. \tag{14}$$

Lze snadno dojít k tomu, že všechny členy v rovnici (14) tvaru $\sum_{l=k+1}^{N} \int_{(\Omega_{k+1})} \ldots$ $\ldots \int_{(\Omega_N)} [F; H_l]\, \mathrm{d}\Omega_{k+1} \ldots \mathrm{d}\Omega_N = 0$ a rovněž i $\sum_{(k+1 \leq l < j \leq N)} \int_{(\Omega_{k+1})} \ldots \int_{(\Omega_N)} [F; H_{lj}]\,.$ $.\, \mathrm{d}\Omega_{k+1} \ldots \mathrm{d}\Omega_N = 0$.

Rovnice (14) nabývá tak tvaru:

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + \sum_{l=1}^{k} \int_{(\Omega_{k+1})} \ldots \int_{(\Omega_N)} [F; H_l]\, \mathrm{d}\Omega_{k+1} \ldots \mathrm{d}\Omega_N + \sum_{(1 \leq l < j \leq k)} \int_{(\Omega_{k+1})} \ldots \int_{(\Omega_N)} [F; H_{lj}]\, \mathrm{d}\Omega_{k+1} \times$$

$$\times\, \mathrm{d}\Omega_{k+2} \ldots \mathrm{d}\Omega_N + \sum_{l=1;\, j=k+1}^{l=k;\, j=N} \int_{(\Omega_{k+1})} \ldots \int_{(\Omega_N)} [F; H_{lj}]\, \mathrm{d}\Omega_{k+1} \ldots \mathrm{d}\Omega_N = 0.$$

Druhý a třetí člen poslední rovnice lze ještě upravit:

$$\sum_{l=1}^{k} \int_{(\Omega_{k+1})} \ldots \int_{(\Omega_N)} [F; H_l]\, \mathrm{d}\Omega_{k+1} \ldots \mathrm{d}\Omega_N + \sum_{(1 \leq l < j \leq k)} \int_{(\Omega_{k+1})} \ldots \int_{(\Omega_N)} [F; H_{lj}]\, \mathrm{d}\Omega_{k+1} \ldots \mathrm{d}\Omega_N =$$

$$\sum_{l=1}^{k} [(\int_{(\Omega_{k+1})} \ldots \int_{(\Omega_N)} F\, \mathrm{d}\Omega_{k+1} \ldots \mathrm{d}\Omega_N); H_l] + \sum_{(1 \leq l < j \leq k)} [(\int_{(\Omega_{k+1})} \ldots \int_{(\Omega_N)} F\, \mathrm{d}\Omega_{k+1} \ldots \mathrm{d}\Omega_N)\,;$$

$$H_{lj}] = \sum_{l=1}^{k} [f_k; H_l] + \sum_{(1 \leq l < j \leq k)} [f_k; H_{lj}] = [f_k; (\sum_{l=1}^{k} H_l + \sum_{(1 \leq l < j \leq k)} H_{lj})] \,.$$

Poslední úprava byla možná, neboť H_l není závislé na $\Omega_{k+1}, \ldots, \Omega_N$ a H_{lj} není funkcí $\Omega_{k+1}, \ldots, \Omega_N$. Zavedeme-li analogicky podle (11) výraz $H^{(k)} = \sum_{l=1}^{k} H_l + \sum_{(1 \leq l < j \leq k)} H_{lj}$, bude už

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + [f_k; H^{(k)}] = \sum_{l=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{N} \int_{(\Omega_{k+1})} \int_{(\Omega_{k+2})} \ldots \int_{(\Omega_N)} [H_{lj}; F]\, \mathrm{d}\Omega_{k+1}\, \mathrm{d}\Omega_{k+2} \ldots \mathrm{d}\Omega_N \,. \tag{15}$$

Tato poslední rovnice je fundamentální rovnicí kinetických úvah. Levá strana vystihuje časovou změnu rozdělovací funkce f_k a prostorovou změnu f_k vlivem vnějších a vnitřních sil, které na systém a v systému o k částicích působí. Levá strana rovnice tedy pozůstává pouze z veličin, charakterisujících kvasiuzavřený podsystém o k částicích. Pravá strana rovnice (15) pak vystihuje vzájemné ovlivňování podsystému o k částicích a zbytku systému o $(N - k)$ částicích. Tento člen, jelikož obsahuje neznámou a prakticky neurčitelnou funkci F, je zdrojem všech dalších obtíží a jeho vliv na f_k lze určit jen přibližně [1, 3, 4, 5].

Velmi důležitá a pro fysiku plazmatu nepostradatelná je rovnice (15) pro $k = 1$. Označíme-li f_1 prostě jako f, bude

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [f; =H^{(1)}] \sum_{j=2}^{N} \int_{(\Omega_2)} \int_{(\Omega_3)} \ldots \int_{(\Omega_N)} [H_{1j}; F] \, d\Omega_2 \, d\Omega_3 \ldots d\Omega_N \,. \tag{16}$$

Zde $H^{(1)} = H_1$, neboť $\sum_{(1 \leq l < j \leq k)} H_{lj}$ pro $k = 1$ dává $H_{11} = 0$. Při tom $[f; H_{12}] =$

$= \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\frac{\partial f}{\partial q^{(\alpha)}} \frac{\partial H_1}{\partial p^{(\alpha)}} - \frac{\partial f}{\partial p^{(\alpha)}} \frac{\partial H_1}{\partial q^{(\alpha)}} \right)$. Označíme-li pro jednoduchost

$$\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right] = \sum_{j=2}^{N} \int_{(\Omega_2)} \int_{(\Omega_3)} \ldots \int_{(\Omega_N)} [H_{1j}; F] \, d\Omega_2 \, d\Omega_3 \ldots d\Omega_N \,, \tag{17}$$

je

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [f; H_1] = \left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]. \tag{16'}$$

Tato rovnice je shodná s rovnicí (29) z článku [7]. Je to tedy už kinetická rovnice Boltzmannova (upravená). Bylo ji tedy možné odvodit zcela neformálním způsobem na základě úvah analytické mechaniky a Liouvillova teorému. Při tom srážkový člen $[\delta f / \delta t]$ vystihuje jak pružné, tak i nepružné srážky [3, 4, 5]. Vliv celých komplexů částic, tj. kolektivní působení změnou prostorového náboje a makroskopickým pohybem, na uvažovanou partikuli je zahrnut pomocí Maxwellových-Lorentzových rovnic do hamiltoniánu H_1.

Nelze na tomto místě opomenout případ $k = 2$ a $f_k = f_2$. Rovnice (15) poskytuje

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + [f_2; =H^{(2)}] \sum_{l=1}^{2} \sum_{j=3}^{N} \int_{(\Omega_3)} \int_{(\Omega_4)} \ldots \int_{(\Omega_N)} [H_{jl}; F] \, d\Omega_3 \, d\Omega_4 \ldots d\Omega_N \,,$$

při tom $H^{(2)} = H_1 + H_2 + H_{12}$. Funkce f_2 nazývá se korelační funkcí a určuje vlastně pravděpodobnost stavu jedné částice při zadaném stavu částice druhé.

3. Rovnice kontinuity a zákon zachování hybnosti

Obě rovnice jsou odvozeny v článku [7], zde bude učiněno jen několik poznámek. Rozdělovací funkce f je závislá podle (9) na polohovém vektoru $\mathbf{r}$, okamžité rychlosti $\mathbf{c}$ částice a na čase t. Potom lze element $d\Omega$ ($\equiv d\Omega_1$) psát jako součin elementu konfiguračního prostoru dX a elementu rychlostního prostoru dC [7], neboť $d\Omega = dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \, dc_1 \, dc_2 \, dc_3 = dX \, dC$, kde jednotlivé osy kartézského souřadnicového systému jsou 1, 2, 3. V dalším případě je výhodnější normovat rozdělovací funkci f k počtu částic. Jelikož pravděpodobnost výskytu částic s rychlostmi rostoucími nade všechny meze je nulová, musí být [7] $\lim_{c \to \pm\infty} f = 0$. Nyní již

$$n(\mathbf{r}, t) = \int_{(C)} f(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t) \, dC \,. \tag{18}$$

Zde $n(\mathbf{r}, t)$ je počet částic v mezích $\mathbf{r}$ a $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ vztažený na jednotku objemu, neboť integrací rozdělovací funkce přes všechny možné hodnoty rychlostí, tj. přes obor (C), nebude n již na rychlosti závislé; n je koncentrace částic.

Provedeme-li integraci posledního výrazu přes všechny hodnoty (X) konfiguračního prostoru, sčítáme tím vlastně jednotlivá n v celém prostoru, takže výsledkem je celkový počet částic N systému, tj.

$$N(t) = \int_{(X)} n(\mathbf{r}, t)\, \mathrm{d}X = \int_{(X)} \int_{(C)} f\, \mathrm{d}C\, \mathrm{d}X = \int_{(\Omega)} f\, \mathrm{d}\Omega\,. \tag{19}$$

Tyto poznatky budou uplatněny dále.

Jak již bylo řečeno v úvodu, plazma pozůstává z různých druhů částic. Přisoudíme všem veličinám jednoho druhu částic společný index i. Budeme hovořit o částicích i-tého druhu. Kinetickou rovnici (16)′ můžeme s použitím (1) přepsat do přehlednějšího tvaru

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{c}\,.\,\nabla_{(x)} f_i + \frac{\mathbf{F}}{m_i}\,.\,\nabla_{(c)} f_i = \left[\frac{\delta f_i}{\delta t}\right], \tag{20}$$

kde $\mathbf{F}$ je působící síla, m_i hmota částice i-tého druhu, $\nabla_{(x)}$ je gradient v obyčejném, $\nabla_{(c)}$ v rychlostním prostoru [7].

Podle (7) a (18) je

$$\bar{\mathbf{u}}_i = \frac{1}{n_i} \int_{(C)} \mathbf{c} f_i\, \mathrm{d}C \tag{21}$$

makroskopická rychlost částic i-tého druhu. Okamžitou rychlost $\mathbf{c}$ částice si lze vždy představit jako vektorový součet unášivé rychlosti $\bar{\mathbf{u}}_i$ a okamžité rychlosti $\mathbf{v}$ tepelného neuspořádaného pohybu. Kdyby totiž plyn, pozůstávající z částic i-tého druhu, byl ve statisticky rovnovážném stavu, kdy $\bar{\mathbf{u}}_i = 0$, bude $\mathbf{c} = \mathbf{v}$, tj. rozdělení rychlostí kolem počátku rychlostního prostoru bude zcela souměrné. Za $\mathbf{c}$ lze tedy dosazovat [5]

$$\mathbf{c} = \bar{\mathbf{u}}_i + \mathbf{v}\,. \tag{22}$$

Jak je uvedeno v [7], rovnici kontinuity pro částice i-tého druhu dostaneme z kinetické rovnice vynásobením $\mathrm{d}C$ a integrací přes (C); jde o operaci (18). Jelikož v laboratorním plazmatu nelze uvažovat jen pružné srážky, bude

$$\int_{(C)} \left[\frac{\delta f_i}{\delta t}\right] \mathrm{d}C = J_i - R_i\,,$$

takže rovnice kontinuity má oproti [7] vzhled:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla_{(x)}\,.\,(n_i \bar{\mathbf{u}}_i) = J_i - R_i\,. \tag{23}$$

Zde J_i je počet částic i-tého druhu vznikajících za jednotku doby v jednotce objemu (třeba ionisací), R_i je pak počet částic i-tého druhu, které v jednotce objemu a za jednotku doby zanikají (rekombinací).

Operace (21) vede k zákonu zachování hybnosti. Vynásobíme-li totiž kinetickou rovnici (20) $\mathbf{c}\, \mathrm{d}C$ a integrujeme člen po členu přes všechny hodnoty (C), bude výsledek shodný (až na jiné označení) s rovnicí (40) z článku [7], tj.

$$s_i \frac{\mathrm{d}\bar{\mathbf{u}}_i}{\mathrm{d}t} = n_i \bar{\mathbf{F}}_i - \sum_{\beta=1}^{3} \sum_{\alpha=1}^{3} \mathbf{e}_\alpha^0 \frac{\partial}{\partial x_\beta} (s_i \overline{v_\alpha v_\beta}) + m_i \int_{(C)} \left[\frac{\delta f_i}{\delta t}\right] \mathbf{v}\, \mathrm{d}C\,. \tag{24}$$

Jelikož $s_i = m_i n_i$ (hustota), je rozměr každého členu (g cmsec^{-1}/cm^{3}sec). Rovnice (24) určuje tedy změnu hybnosti částic i-tého druhu v plazmatu za jednotku doby a v jednotce objemu, nebo změnu hustoty hybnosti. Druhý člen na pravé straně rovnice (24) je prostorová změna tensoru tlaku ($\mathbf{e}_\alpha^0$ je jednotkový vektor ve směru osy α), poslední člen udává vlastně hybnost předanou při sážkách částicemi i-tého druhu částicím druhů ostatních (strhování částic). S ohledem na vnitřní síly (elektromagnetické od prostorových nábojů a makroskopických proudů) je výhodné psát i $\overline{\mathbf{F}}_i$, tj. střední hodnota síly působící na částice i-tého druhu, nikoli jen $\mathbf{F}$ [5].

4. Zákon zachování energie a rotační hybnosti; souhrn

Na rozdíl od magnethydrodynamických aplikací rovnic (23) a (24) pro zkoumání laboratorního plazmatu je mnohdy nevyhnutelné řešit energetické poměry. Je tedy třeba znát rovnici energetické rovnováhy, nebo přesně řečeno tvar zákona zachování energie v plazmatu a jeho exaktní odvození. Lze to udělat takto [3, 5]: Vyšetříme, čemu se bude rovnat výraz, který získáme z kinetické rovnice vynásobením $c^2\,\mathrm{d}C$ a integrací člen po členu přes celý obor (C). Z (20) je

$$\int_{(C)} c^2 \frac{\partial f_i}{\partial t}\,\mathrm{d}C + \int_{(C)} c^2 (\mathbf{c}\,.\,\nabla_{(X)} f_i)\,\mathrm{d}C + \frac{1}{m_i}\int_{(C)} c^2 (\mathbf{F}_i\,.\,\nabla_{(C)} f_i)\,\mathrm{d}C = \int_{(C)} c^2 \left[\frac{\delta f_i}{\delta t}\right]\mathrm{d}C\,. \qquad (25)$$

Rozebereme nyní tuto rovnici člen po členu.

První člen: $\displaystyle\int_{(C)} c^2 \frac{\partial f_i}{\partial t}\,\mathrm{d}C = \frac{\partial}{\partial t}\int_{(C)} c^2 f_i\,\mathrm{d}C = \frac{\partial}{\partial t}(n_i \bar{u}_i^2) + \frac{\partial}{\partial t}(n_i \overline{v_i^2})$.

Druhý člen: $\displaystyle\int_{(C)} c^2 (\mathbf{c}\,.\,\nabla_{(X)} f_i)\,\mathrm{d}C = \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\int_{(C)} c_\alpha^2 c_\beta f_i\,\mathrm{d}C = \bar{u}_i^2\,[\nabla_{(X)}\,.\,(n_i\bar{\mathbf{u}}_i)] +$

$$+\, n_i(\bar{\mathbf{u}}_i\,.\,\nabla_{(X)})\,\bar{u}_i^2 + \overline{v_i^2}\,[\nabla_{(X)}\,.\,(n_i\bar{\mathbf{u}}_i)] + (n_i\bar{\mathbf{u}}_i)\,.\,\nabla_{(X)}\overline{v_i^2} + \nabla_{(X)}\,.\,\{n_i\overline{[2\bar{\mathbf{u}}_i\,.\,\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i^2)\mathbf{v}_i\,]}\}.$$

Třetí člen: $\displaystyle\frac{1}{m_i}\int_{(C)} c^2 (\mathbf{F}_i\,.\,\nabla_{(C)} f_i)\,\mathrm{d}C = -\frac{2}{m_i}\,n_i\overline{\mathbf{F}}_i\,.\,\bar{\mathbf{u}}_i - \frac{2}{m_i}\,n_i\overline{(\mathbf{F}_i\,.\,\mathbf{v}_i)}$.

Je možné podrobnějším zkoumáním sil kolektivního působení dojít k tomu [5], že v poslední rovnici člen $\overline{(\mathbf{F}_i\,.\,\mathbf{v}_i)} = 0$. Je to způsobeno tím, že složka síly $\mathbf{F}_i$, odpovídající kolektivnímu působení, je sama statistickým středem a jelikož $\int_{(C)} \mathbf{v}\,\mathrm{d}C = 0$ z důvodů symetrického rozložení $\mathbf{v}$ kolem středu rychlostního prostoru, bude i celý výraz $\overline{(\mathbf{F}_i\,.\,\mathbf{v}_i)}$ nulový.

Poslední člen rovnice (25) s ohledem na rovnici (23) je roven:

$$\int_{(C)} c^2\left[\frac{\delta f_i}{\delta t}\right]\mathrm{d}C = \bar{u}_i^2\int_{(C)}\left[\frac{\delta f_i}{\delta t}\right]\mathrm{d}C + 2\bar{\mathbf{u}}_i\,.\int_{(C)}\mathbf{v}\left[\frac{\delta f_i}{\delta t}\right]\mathrm{d}C + \int_{(C)} v^2\left[\frac{\delta f_i}{\delta t}\right]\mathrm{d}C =$$

$$= \bar{u}_i^2\,(J_i - R_i) + 2\bar{\mathbf{u}}_i\,.\int_{(C)}\mathbf{v}\left[\frac{\delta f_i}{\delta t}\right]\mathrm{d}C + \int_{(C)} v^2\left[\frac{\delta f_i}{\delta t}\right]\mathrm{d}C\,.$$

Dosadíme-li nyní poslední čtyři výrazy do (25), dostáváme po menší úpravě rovnici

$$n_i\left[\frac{\partial \bar{u}_i^2}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}}_i\,.\,\nabla_{(x)})\,\bar{u}_i^2 - \frac{2}{m_i}\,\overline{\mathbf{F}}_i\,.\,\bar{\mathbf{u}}_i\right] + \bar{u}_i^2\left[\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla_{(x)}\,.\,(n_i\bar{\mathbf{u}}_i) - J_i + R_i\right] +$$

$$+ n_i \left[\frac{\partial \overline{v_i^2}}{\partial t} + (\nabla_{(X)}\overline{v_i^2}) \cdot \bar{\mathbf{u}}_i\right] + \overline{v_i^2}\left[\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla_{(X)} \cdot (n_i \bar{\mathbf{u}}_i)\right] = \tag{26}$$

$$= - \nabla_{(X)} \cdot \{ n_i \overline{[(2\bar{\mathbf{u}}_i \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i^2)\,\mathbf{v}_i]}\} + 2\mathbf{u}_i \cdot \int_{(c)} \mathbf{v} \left[\frac{\delta f_i}{\delta t}\right] \mathrm{d}C + \int_{(c)} v^2 \left[\frac{\delta f_i}{\delta t}\right] \mathrm{d}C \,.$$

Člen s $\overline{u_i^2}$ v lomené závorce je podle (23) roven nule. Člen u $\overline{v_i^2}$ v lomené závorce je roven levé straně rovnice (23). Je tedy možné za něj dosadit $\int_{(c)} \left[\frac{\delta f_i}{\delta t}\right] \mathrm{d}C$. Dále platí

$$\frac{\partial \bar{u}_i^2}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}}_i \cdot \nabla_{(X)})\, \bar{u}_i^2 = \frac{\mathrm{d}\bar{u}_i^2}{\mathrm{d}t}\,, \qquad \frac{\partial \overline{v_i^2}}{\partial t} + (\nabla_{(X)}\overline{v_i^2}) \cdot \bar{\mathbf{u}}_i = \frac{\mathrm{d}\overline{v_i^2}}{\mathrm{d}t}\,.$$

Zavedeme ještě označení (použitelné i pro rovnici (24))

$$\int_{(c)} \mathbf{v} \left[\frac{\delta f_i}{\delta t}\right] \mathrm{d}C = \frac{1}{m_i} \bar{\mathbf{P}}_i\,; \qquad n_i \overline{[(2\bar{\mathbf{u}}_i \cdot \mathbf{v}_i + v_i^2)\,\mathbf{v}_i]} = \Phi_i\,. \tag{27}$$

Upravíme-li podle posledního rovnici (26) s použitím $s_i = m_i n_i$, bude už následující rovnice vyjadřovat zákon zachování energie částic i-tého druhu:

$$s_i \frac{\mathrm{d}\bar{u}_i^2}{\mathrm{d}t} + s_i \frac{\mathrm{d}\overline{v_i^2}}{\mathrm{d}t} = 2n_i \bar{\mathbf{F}}_i \cdot \bar{\mathbf{u}}_i + 2\mathbf{P}_i \cdot \bar{\mathbf{u}}_i - m_i \nabla_{(X)} \cdot \Phi_i + m_i \int_{(c)} (v^2 - \overline{v_i^2}) \left[\frac{\delta f_i}{\delta t}\right] \mathrm{d}C\,. \tag{28}$$

V poslední rovnici každý ze členů má rozměr (g cm^2/cm^3 sec^3) = (g cm^{2}sec^{-2}/ /cm^{3}sec) = (erg/cm^{3}sec). (28) je tedy rovnice, která vystihuje změnu energie plynu pozůstávajícího z částic i-tého druhu v jednotce objemu a za jednotku doby. Jinak řečeno, popisuje změnu hustoty energie částic i-tého druhu za jednotku doby. Jde o energetickou bilanci, neboť levá strana poslední rovnice udává úplnou časovou změnu čtverce unášivé rychlosti a úplnou časovou změnu čtverce rychlosti neuspořádaného pohybu, pravá strana pak je tvořena členy, které tuto celkovou časovou změnu vyvolávají. Je to pochopitelné. Ke změně hustoty energie může dojít buď změnou kinetické energie uspořádaného pohybu částic, nebo změnou kinetické teploty plynu, tj. změnou čtverce rychlosti neuspořádaného pohybu [3, 4, 5]. Jde o změnu v závislosti na čase a na prostorových souřadnicích. To právě levá strana poslední rovnice vystihuje. První člen na pravé straně pak ukazuje na první příčinu této změny hustoty energie za jednotku doby. Je to totiž výkon, který je přiveden (nebo odveden) jednotce objemu silami, které udržují unášivý pohyb. U plazmatu může jít o síly gravitační a o síly elektromagnetického původu. Kupř. vnějším elektrickým polem je vytvářen elektrický proud, tedy usměrněný pohyb nabitých částic, mezihvězdným gravitačním polem jsou urychlována oblaka plazmatu atd. Působí-li tyto síly na rychlost neuspořádaného pohybu, plazma je vyhříváno. Druhý člen na pravé straně rovnice (28) znamená v podstatě výkon přenesený částicemi i-tého druhu v jednotce objemu unášivou rychlostí na částice druhů ostatních nebo obráceně, a to srážkami všech druhů. Vzniká tím buď uspořádaný pohyb — strhování částic jednoho druhu proudem částic jiného druhu, nebo je plazma vyhříváno. Mnohdy proud částic, který vniká do plazmatu, vyvolává ustálené oscilace plazmatu na velmi vysokých kmitočtech. Třetí člen na pravé straně rovnice (28), jak uvidíme dále, udává ohřev nebo ochlazení, které je způsobeno kompresí nebo expansí plynu tvořeného částicemi i-tého druhu. Konečně čtvrtý člen rovnice (28) určuje zisk či ztrátu hustoty energie za jednotku doby způsobenou srážkami všech druhů mezi částicemi i-tého druhu a ostatními, které plazma vyhřívají nebo ochlazují. Kupř. pružné srážky elektronů s neutrálními částicemi vyhřívají neutrální plyn.

Rovnice (28) je rovnicí energetické bilance jen částic i-tého druhu. Pro celkovou hustotu energie plazmatu je nutné znát rovnice energetických bilancí částic všech druhů, které plazma vytvářejí a hustotu energie elektromagnetického pole. Při znalosti excitačních poměrů a hraničních podmínek čtvrtý člen na pravé straně rovnice (28) udává pak i energetické ztráty zářením.

V minulých odstavcích jsme došli k tomu, že operace typu $\int\limits_{(\sigma)} \mathbf{c}^{(n)} f_i \,\mathrm{d}C$ vedly postupně na rovnice

$$\int\limits_{(\sigma)} (\mathbf{c})^n f_i \,\mathrm{d}C \to \begin{cases} n = 0 \ldots \text{rovnice kontinuity}\,, \\ n = 1 \ldots \text{zákon zachování hybnosti}\,, \\ n = 2 \ldots \text{zákon zachování energie}\,. \end{cases} \tag{29}$$

Vyšší mocniny n nevedou k rovnicím dobré fysikální interpretace a není třeba jich používat.

Podle rovnosti (29) je zřejmé, že integrace se vůbec nevztahuje na prostor plazmatem zaplněný. Jistě má tedy smysl otázka, zda-li lze najít operaci obdobnou k (29), kde by se integrace přes prostorové uspořádání plazmatu vyskytovala a kde by se při tom docházelo k fysikálně snadno interpretovatelným výsledkům.

Normalisačním vztahem (18) bylo možné z rozdělovací funkce získat koncentraci částic, normalisačním vztahem (19) pak bylo možné dostat celkový počet částic i-tého druhu, které v plazmatickém oblaku jsou. Na základě (19) získáme další zákony zachování [8, 5].

Celková hmota částic i-tého druhu je $M_i = m_i N_i$. Známe-li ale celkovou hmotu a hustotu hmoty jako funkci polohy, můžeme snadno stanovit polohu těžiště. Bude-li totiž $\mathbf{r}_i^*$ polohový vektor těžiště ve zvoleném souřadnicovém systému, bude $M_i \mathbf{r}_i^*$ moment těžiště k počátku těchto souřadnic, který dle (19) je možné psát:

$$M_i \mathbf{r}_i^* = m_i \int\limits_{(X)} n_i \mathbf{r} \,\mathrm{d}X \Rightarrow \mathbf{r}_i^* = \frac{1}{N_i} \int\limits_{(\Omega)} f_i \mathbf{r} \,\mathrm{d}\Omega\,. \tag{30}$$

Derivace $\mathbf{r}_i^*$ podle času udává rychlost, s jakou se bude těžiště oblaku částic i-tého druhu pohybovat. Při tom v (30) se vyskytuje součin rozdělovací funkce f_i a polohového vektoru. Násobme tedy kinetickou rovnici (20) $\mathbf{r}\,\mathrm{d}\Omega$ a integrujme přes (Ω); úpravou pomocí (30) a opětným seřazením dostaneme

$$\frac{1}{m_i} \frac{\partial}{\partial t} (M_i \mathbf{r}_i^*)^* + \int\limits_{(X)} [\nabla_{(X)} \cdot (n_i \mathbf{u}_i)]\ \mathbf{r} \,\mathrm{d}X = \int\limits_{(X)} (J_i - R_i)\, \mathbf{r} \,\mathrm{d}X\,. \tag{31}$$

To je však rovnice kontinuity násobená $\mathbf{r}\,\mathrm{d}X$ a integrovaná člen po členu. Je to rovnice pohybu těžiště částic i-tého druhu. Pro různé tvary oblaku lze provést její konkrétnější integraci.

Vybereme-li ze systému N_i bodů k-tý, bude jeho rotační hybnost dána výrazem $m_k(\mathbf{r}_k \times \mathbf{c}_k)$. Podle dřívějšího pak rotační hybnost celého oblaku částic

i-tého druhu k počátku souřadnic konfiguračního prostoru je

$$m_i \int_{(\Omega)} (\mathbf{r} \times \mathbf{c}) f_i \, dC = m_i \int_{(\Omega)} (\mathbf{r} \times \mathbf{u}_i) f_i \, d\Omega + m_i \int_{(\Omega)} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) f_i \, d\Omega = \int_{(X)} s_i (\mathbf{r} \times \mathbf{u}_i) \, dX . \tag{32}$$

Vynásobíme-li $(\mathbf{r} \times \mathbf{c}) \, d\Omega$ kinetickou rovnici a integrujeme-li přes celý obor (Ω), dostáváme už zákon zachování rotační hybnosti:

$$\int_{(\Omega)} \frac{\partial f_i}{\partial t} (\mathbf{r} \times \mathbf{c}) \, d\Omega + \int_{(\Omega)} (\mathbf{c} \,.\, \nabla_{(X)} f_i)(\mathbf{r} \times \mathbf{c}) \, d\Omega + \frac{1}{m_i} \int_{(\Omega)} (\mathbf{F}_i \,.\, \nabla_{(c)} f_i)(\mathbf{r} \times \mathbf{c}) \, d\Omega =$$

$$= \int_{(\Omega)} \left[\frac{\delta f_i}{\delta t} \right] (\mathbf{r} \times \mathbf{c}) \, d\Omega .$$

První člen dává

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{(\Omega)} f_i \mathbf{r} \times \mathbf{c} \, d\Omega = \frac{\partial}{\partial t} \int_{(X)} n_i \mathbf{r} \times \bar{\mathbf{u}}_i \, dX = \frac{1}{m_i} \frac{\partial}{\partial t} \int_{(X)} s_i \mathbf{r} \times \mathbf{u}_i \, dX .$$

Bylo by možné pokračovat takto dále. Je však zřejmé, že integrací přes obor (C) získáme rovnici zachování hybnosti, takže

$$\int_{(X)} s_i \mathbf{r} \times \frac{d\bar{\mathbf{u}}_i}{dt} \, dX = \int_{(X)} n_i \mathbf{r} \times \bar{\mathbf{F}}_i \, dX - \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \int_{(X)} \mathbf{r} \times \mathbf{e}_{\alpha}^{o} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} (s_i \overline{v_{\alpha} v_{\beta}}) \, dX +$$

$$+ \int_{(X)} \mathbf{r} \times \bar{\mathbf{P}}_i \, dX \tag{33}$$

je zákon zachování rotační hybnosti.

Jak tedy vyplývá z předcházejícího, základní zákony zachování plynou z Liouvillova teorému. Nejprve dostaneme kinetickou rovnici jakožto zákon zachování hustoty pravděpodobnosti ve fázovém prostoru. Z ní pak operacemi $\int_{(C)} (\mathbf{c})^n f_i \, dC$ plynou pro různá n další rovnice, další zákony zachování, popisující stav plazmatu. Při operaci $\int_{(\Omega)} f_i \mathbf{r} \, d\Omega$ plyne z kinetické rovnice vztah pro pohyb těžiště, při operaci $\int_{(\Omega)} f_i \mathbf{r} \times \mathbf{c} \, d\Omega$ pak zákon zachování rotační hybnosti. Ty vystihují chování celého plazmatického oblaku. Bylo by možné použít i vyšších mocnin r. Kupř. pro $\int_{(\Omega)} r^2 f_i \, d\Omega$ plyne výraz pro moment setrvačnosti atd. Nebo při použití určitých diferenciálních operací na kinetickou rovnici vyplývaly by opět další rovnice, blíže určující stav plaumatu. V podstatě však uvedené rovnice vyhovují praktickým požadavkům na možnost výpočtu stavu laboratorního plazmatu.

Je tedy zřejmé, že kinetická rovnice (20) je základním zákonem ve fysice plazmatu. Všem ostatním rovnicím je nadřazena. Je možné tyto rovnice z ní odvodit.

5. Makroskopická rychlost

Při určitých předpokladech lze makroskopickou (unášivou) rychlost $\bar{\mathbf{u}}_i$ částic i-tého druhu stanovit poněkud bezprostředněji, než je tomu v rovnici

(24). Nejprve je ale třeba říci pár slov ke srážkovému členu $\left[\frac{\delta f_i}{\delta t}\right]$. Budeme-li brát v úvahu pouze párové pružné srážky, lze dojít k výrazu [1, 3, 4, 5]

$$\left[\frac{\delta f_i}{\delta t}\right] = \sum_k \int_{(\sigma')} \int_{(\omega)} (f'_i f'_k - f_i f_k)\, \sigma_{ik}(c_r;\, \vartheta)\, c_r;\, \cos \vartheta \; \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}C' \,.$$

$$k = i, \ldots \tag{34}$$

Zde f'_i je rozdělovací funkce částic i-tého druhu před srážkou, f_i po srážce, f'_k a f_k totéž pro částice k-tého druhu, σ_{ik} je tzv. srážkový průřez, c_r je relativní rychlost obou interagujících částic, ω je prostorový úhel, ϑ pak azimutální úhel srážky. Nachází-li se plyn, pozůstávající z částic i-tého druhu, v klidu, nebude rozdělovací funkce f_i záviset ani na čase, ani na prostorových souřadnicích. Na tento plyn nebude působit také žádná síla. Potom je ale levá strana kinetické rovnice (20) nulová. Aby byla nulová i pravá strana této rovnice, tj. aby byl nulový výraz (34), musí být integrand tohoto výrazu roven nule. Jelikož ani σ_{ik}, ani c_r identicky nulové být nemůže, musí pro plyn ve statisticky rovnovážném stavu být splněno $f'_i f'_k - f_i f_k = 0$. Z této funkcionální rovnice je možné dojít k rozdělovací funkci f_i, která bude vystihovat tuto statistickou rovnováhu. Jde o Maxwellovu rozdělovací funkci [7]. Při statisticky rovnovážném stavu jde o isotermické plazma.

Laboratorní plazma ve velkém počtu praktických případů se nachází ve stavu, který je statistické rovnováze blízký. Liší -li se tento stav s nějakým malým parametrem α od rovnovážného stavu, lze rozdělovací funkci f_i částic i-tého druhu podle Enskoga rozvinout v řadu rozdělovacích funkcí, kde koeficienty členů jsou mocniny tohoto malého parametru. Řada má tvar $f_i = f_i^{(0)} + \alpha f_i^{(1)} + \alpha^2 f_i^{(2)} + \ldots$. Zde $f_i^{(0)}$ je základní rozdělovací funkce, vystihující statisticky rovnovážný stav a má zpravidla vždy vzhled Maxwellovy rozdělovací funkce. Je to tedy z hlediska rychlostního prostoru symetrická složka f_i. Funkce $f_i^{(1)}$ a vyšší jsou pak nesymetrické složky rozdělovací funkce f_i, vystihují odchylku od rovnovážného stavu. Chapman dokázal, že poslední řada není dobře pro nabité částice v elektrickém poli konvergentní. Je pak lépe rozvinout f_i do řady sférických funkcí v rychlostním prostoru. Řada s prvními dvěma nejdůležitějšími členy má pak tvar

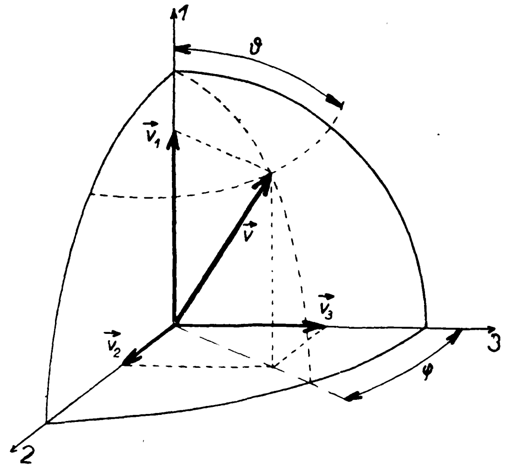
$$f_i(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t) = f_i^{(0)} + \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{f}_i^{(1)}}{c} + \ldots \tag{35}$$

Při této substituci je možné vyjádřit srážkový člen $\left[\frac{\delta f_i}{\delta t}\right]$ diferenciálním zápisem [3, 5]

$$\left[\frac{\delta f_i}{\delta t}\right] \cong \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{kT_k}{m_k} \frac{v^3}{\lambda_i} \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial v} + \frac{m_i v^4}{m_k \lambda_i} f_i^{(0)} \right) - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}^{(1)}}{\lambda_i}\,; \quad \begin{array}{l} m_i \ll m_k \\ n_i \ll n_k \,, \end{array} \tag{36}$$

λ_i je volná dráha částice i-tého druhu.

Obě omezení pro hmoty a koncentrace zjednodušují odvození srážkového členu. V posledním výrazu je k Boltzmannova konstanta, T_k je kinetická teplota částic k-tého druhu. Pro tento druh částic je předpokládáno Maxwellovo rozdělení rychlostí, pro jednodušší vyjádření σ_{ik} je předpokládán zanedbatelný poměr (m_i/m_k) proti jedné. Jelikož bereme do počtu srážek jen pružné srážky mezi částicemi i-tého a k-tého druhu, nikoli vzájemné pružné srážky částic i-tého druhu, musí být pro oprávněnost této představy mnohem menší koncentrace částic i-tého druhu, než je koncentrace částic k-tého druhu.



Obr. 2. **Poměry v rychlostním prostoru rychlostí v.**

Vzorec (36) s uvedenými předpoklady velmi dobře vyhovuje poměrům v plazmatu elektrických výbojů. Tam hlavními nosiči proudu jsou elektrony. Koncentrace elektronů je zpravidla mnohem menší, než je koncentrace neutrálních částic, hmota elektronu je mnohem menší, než hmota této částice.

Obrátíme nyní pozornost na vzorec (35). Podle obr. 2. zřejmě platí, že

$$\frac{v_1}{v} = \cos\vartheta ; \; \frac{v_2}{v} = \cos(90 - \vartheta)\cos(90 - \varphi) = \sin\vartheta \sin\varphi ; \tag{37}$$

$$\frac{v_3}{v} = \cos(90 - \vartheta)\cos\varphi = \sin\vartheta\cos\varphi ;$$

$$d\omega = \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi ; \quad dv_1 \, dv_2 \, dv_3 = v^2 \, dv \, d\omega .$$

Potom ovšem

$$\int_{(\omega)} d\omega = 4\pi \tag{38}$$

a při $i \; (j, k) = 1, 2, 3$

$$\int_{(\omega)} \left(\frac{v_i}{v}\right)^p \left(\frac{v_j}{v}\right)^q \left(\frac{v_k}{v}\right)^r d\omega = \begin{cases} = 0 \text{ pro } q = r = 0, p = 1, \\ = \frac{4\pi}{3} \text{ pro } q = r = 0, p = 2, \\ = 0 \text{ pro } r = 0, p = q = 1, i \neq j, \\ = 0 \text{ pro } q = r = 0, p = 3, \\ = 0 \text{ pro } r = 0, p = 2, q = 1, i \neq j, \\ = 0 \text{ pro } p = q = r = 1, i \neq j \neq k. \end{cases} \tag{39}$$

Podle vzorce (21) s použitím rozvoje (35) určíme makroskopickou rychlost částic i-tého druhu. Odchylku od rovnovážného stavu vlivem uspořádaného proudění vystihuje funkce $f^{(1)}$. Můžeme tedy dle (21), (35), (37) a (39) psát, že

$$\bar{\mathbf{u}}_i = \frac{1}{n_i} \int_{(v)} \int_{(\omega)} \mathbf{v} f_i v^2 \, dv \, d\omega = \frac{1}{n_i} \int_{(v)} \int_{(\omega)} \sum_\alpha \mathbf{e}_\alpha^0 \, v_\alpha \Big(f_i^{(0)} + \frac{1}{v} \sum_\beta v_\beta f_{i\beta}^{(1)}\Big) v^2 \, dv \, d\omega =$$

$$= \frac{4\pi}{3} \frac{1}{n_i} \int_0^\infty f_i^{(1)} v^3 \, dv . \tag{40}$$

Makroskopická rychlost $\bar{u}_i$ je tedy závislá jenom na $\mathbf{f}_i^{(1)}$. K dalšímu jejímu vyjádření musíme znát blíže tuto část rozdělovací funkce. Určíme ji z kinetické rovnice (20), do které jednak dosadíme za srážkový člen z výrazu (36), jednak rozvedeme f_i podle (35). Budeme pro další odvození předpokládat, že na elektricky nabité částice i-tého druhu působí jen síly elektromagnetického původu, dané intensitou elektrického pole $\mathbf{E}$ a magnetickou indukcí $\mathbf{B}$. Kinetická rovnice bude mít nyní tvar (jednotky CGSE):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(f_i^{(0)} + \frac{\mathbf{v}\,.\,\mathbf{f}_i^{(1)}}{v}\right) + \mathbf{v}\,.\,\nabla_{(x)}\left(f_i^{(0)} + \frac{\mathbf{v}\,.\,\mathbf{f}_i^{(1)}}{v}\right) + \frac{q_i}{m_i}\left[E + \frac{1}{c_0}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})\right].\,\nabla_{(c)}$$

$$\left(f_i^{(0)} + \frac{\mathbf{v}\,.\,\mathbf{f}_i^{(1)}}{v}\right) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{kT_k}{m_k}\frac{v^3}{\lambda_i}\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial v} + \frac{m_i v^4}{m_k\lambda_i} f_i^{(0)}\right) - \frac{\mathbf{v}\,.\,\mathbf{f}_i^{(1)}}{\lambda_i}\,. \qquad (41)$$

Zde q_i je elektrický náboj částice i-tého druhu, c_0 je rychlost světla.

Rovnici (41) vynásobíme nejprve $d\omega$ a budeme integrovat přes všechny možné směry rychlosti $\mathbf{v}$. Potom budeme rovnici (41) násobit $\mathbf{v}\,d\omega$ a opět ji budeme integrovat člen po členu přes celé (ω). Dostaneme tak pro dvě neznámé funkce $f_i^{(0)}$ a $\mathbf{f}_i^{(1)}$ dvě rovnice. Podrobné provedení těchto dvou nikoli obtížných úkonů je kupř. v [5]. Výsledkem jsou rovnice:

$$\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial t} + \frac{v}{3}\sum_\alpha \frac{\partial f_{i\alpha}^{(1)}}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{3}\frac{q_i}{m_i}\frac{1}{v^2}\sum_\alpha E_\alpha \frac{\partial}{\partial v}(v^2 f_{i\alpha}^{(1)}) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{v^3 kT_k}{m_k\lambda_i}\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial v} + \right.$$

$$\left. + \frac{m_i v^4}{mg\lambda_i} f_i^{(0)}\right); \quad \frac{\partial \mathbf{f}_i^{(1)}}{\partial t} + v\sum_\alpha \mathbf{e}_\alpha^0 \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial x_\alpha} + \frac{q_i}{m_i}\mathbf{E}\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial v} + \frac{q_i}{m_i c_0}(\mathbf{B} \times \mathbf{f}_i^{(1)}) = -\frac{v}{\lambda_i}\mathbf{f}_i^{(1)}. \qquad (42)$$

Z těchto rovnic je možné stanovit $f_i^{(0)}$ a $\mathbf{f}_i^{(1)}$. Nejsou-li rozdělovací funkce závislé ani na čase, ani na prostorových souřadnicích a je-li $\mathbf{B}$ nulové, zmizí z (42) členy s derivací podle t, x_α a člen s $\mathbf{B}$, takže po menší úpravě dostáváme přímo pro elektrony (e_0 je náboj elektronů, index e je pro elektrony, index g pro neutrální částice):

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{e_0}{m_e}\right)^2 E^2\lambda_e v\frac{\partial f_e^{(0)}}{\partial v} + \frac{v^3 kT_g}{m_g\lambda_e}\frac{\partial f_e^{(0)}}{\partial v} + \frac{m_e v^4}{m_g\lambda_e} f_e^{(0)}\right\} = 0.$$

Poslední rovnice musí platit pro všechna v, tedy i pro $v = 0$ a $v \to \infty$. Pak musí být člen ve svorce rovný nule. Lze potom snadno určit $f_e^{(0)}$. Budeme-li ještě předpokládat, že

$$\lambda_e = \frac{v}{\bar{\nu}_e}, \qquad (43)$$

kde $\bar{\nu}_e$ je tzv. srážková frekvence elektronu, bude

$$f_e^{(0)} = \text{konst}\,.\,\exp\left[-\frac{m_e v^2}{2kT_g + \frac{2}{3}m_g\left(\frac{e_0 E}{m_e\bar{\nu}_e}\right)^2}\right], \qquad (44)$$

to je ale Maxwellova rozdělovací funkce. Neutrální částice mají teplotu T_g. Elektrické pole, které působí jenom na nabité elektrony, zvyšuje jejich kinetickou teplotu. Jmenovatel exponentu vzorce (44) je totiž možné upravit:

$$2kT_g + \frac{2}{3} m_g \left(\frac{e_0 E}{m_e \bar{v}_e}\right)^2 \equiv 2k\left[T_g + \frac{m_g}{3k}\left(\frac{e_0 E}{m_e v_e}\right)^2\right] = 2kT_e\,,$$

$$T_e = T_g + \frac{m_g}{3k}\left(\frac{e_0 E}{m_e \bar{v}_e}\right)^2, \tag{45}$$

tedy $T_e > T_g$, jak bylo dlužno očekávat.

Obrátíme nyní svou pozornost k určení funkce $\mathbf{f}_e^{(1)}$. Budeme zatím i nadále předpokládat, že $\mathbf{B} = 0$, že $f_e^{(0)}$ a $\mathbf{f}_e^{(1)}$ nejsou na čase a na prostorových souřadnicích závislé a že platí (43). Potom druhá rovnice (42) poskytuje přímo výraz pro $\mathbf{f}_e^{(1)}$, který po dosazení do (40) dává:

$$\bar{\mathbf{u}}_e = -\frac{e_0}{m_e \bar{v}_e}\,\mathbf{E}\,, \tag{46}$$

což je Langevinův výraz pro unášivou rychlost elektronů.

Určíme nyní ze druhé rovnice (42) $\mathbf{f}_e^{(1)}$ (a tím vlastně $\bar{\mathbf{u}}_e$) jen s jediným omezením — rozdělovací funkce nechť není závislá na čase. Po menší úpravě plyne

$$\mathbf{f}_e^{(1)} - \frac{e_0}{m_e c_0}\frac{\lambda_e}{v}(\mathbf{B} \times \mathbf{f}_e^{(1)}) = \frac{e_0}{m_e}\frac{\lambda_e}{v}\,\mathbf{E}\frac{\partial f_e^{(1)}}{\partial v} - \lambda_e \sum_\alpha \frac{\partial f_e^{(0)}}{\partial x_\alpha}\,\mathbf{e}_\alpha^0\,.$$

Nejprve budeme tuto rovnici násobit zprava vektorově $\mathbf{B}$, pak znova tutéž rovnici skalárně $\mathbf{B}$. Z takto vzniklých rovnic dojdeme delší úpravou ke konečnému názornému výsledku:

$$\mathbf{f}_e^{(1)} = \frac{e_0\lambda_e}{m_e v}\frac{\partial f_e^{(0)}}{\partial v}\,\frac{\mathbf{E} - \dfrac{1}{c_0}\dfrac{e_0\lambda_e}{m_e v}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \left(\dfrac{1}{c_0}\dfrac{e_0\lambda_e}{m_e v}\right)^2 (\mathbf{E}\,.\,\mathbf{B})\,\mathbf{B}}{1 + \left(\dfrac{1}{c_0}\dfrac{e_0\lambda_e}{m_e v}B\right)^2} -$$

$$-\lambda_e\,\frac{\sum\limits_\alpha \dfrac{\partial f_e^{(0)}}{\partial x_\alpha}\mathbf{e}_\alpha^0 - \dfrac{1}{c_0}\dfrac{e_0\lambda_e}{m_e v}\left(\sum\limits_\alpha \dfrac{\partial f_e^{(0)}}{\partial x_\alpha}\mathbf{e}_\alpha^0 \times \mathbf{B}\right) + \left(\dfrac{1}{c_0}\dfrac{e_0\lambda_e}{m_e v}\right)^2\left(\sum\limits_\alpha \dfrac{\partial f_e^{(0)}}{\partial x_\alpha} B_\alpha\right)\mathbf{B}}{1 + \left(\dfrac{1}{c_0}\dfrac{e_0\lambda_e}{m_e v}B\right)^2}\,. \tag{47}$$

Tato rovnice určuje vlastně unášivou rychlost elektronů $\bar{\mathbf{u}}_e$ jako funkci $f_e^{(0)}$, $\mathbf{E}$ a $\mathbf{B}$. Z rovnice (47) je zřejmé, že existují dva významné uspořádané proudy elektronů (a vůbec všech nabitých částic v plazmatu), z nichž každý má tři složky. První uspořádaný proud je způsoben elektrickým polem o intensitě $\mathbf{E}$. Neexistuje-li elektrické pole, neexistuje ani tento proud. Druhý proud je způsoben prostorovou změnou symetrické části rozdělovací funkce $f_e^{(0)}$. Jelikož $f_e^{(0)}$ závisí obecně na koncentraci elektronů n_e a kinetické teplotě elektronů T_e, je tento druhý proud proudem difusním, ať už způsobeným prostorovou změnou koncentrace částic nebo prostorovou změnou kinetické teploty. Na oba tyto proudy působí pak magnetické pole. První složka obou proudů není na magnetickém poli závislá. Elektrony proudí účinkem pole nebo difusí nezávisle na směru B, jenom rychlost je zmenšena členem s B ve jmenovateli.

Druhá složka obou proudů je kolmá na složku minulou a na směr vektoru magnetické indukce $\mathbf{B}$. Dává vznikat Hallovu napětí v plynném plazmatu. Třetí složka obou proudů má směr $\mathbf{B}$. Tyto tři složky unášivé rychlosti zapříčiňují různé pozoruhodné jevy (magnetohydrodynamické), např. stahování elektrického výboje k ose trubice, vznik víření, vln atd.

6. Bližší určení některých členů základních rovnic

Vyjdeme z rovnice zachování hybnosti (24). Všimneme si jednotlivých členů. Pro jednoduchost ze členu $n_i \overline{\mathbf{F}_i}$ budeme uvažovat jen výraz, vyjadřující působení vnějšího gravitačního pole, tj.

$$n_i\overline{\mathbf{F}}_i = - s_i \nabla \varphi_0 \,, \tag{48}$$

kde φ_0 je gravitační potenciál.

Přejdeme na tensor tlaku $\sum\limits_\alpha\sum\limits_\beta \mathbf{e}^0_\alpha (s_i\overline{v_\alpha v_\beta})$. Jeho složka je $(s_i\overline{v_\alpha v_\beta})$. Musíme určit střední hodnotu součinu složek rychlostí. K tomu je nutná znalost rozdělovací funkce f_i, neboť $\Psi_{i\alpha\beta} \equiv s_i\overline{(v_\alpha v_\beta)} = m_i \int\limits_{(C)} v_\alpha v_\beta f_i \,\mathrm{d}C$. Je-li rozdělovací funkce zcela obecná, není možné poslední vzorec více upravovat, použije-li se však rozvoj (35), lze k určitým závěrům dojít. Dostáváme

$$\Psi_{i\alpha\beta} = m_i \int\limits_{(v)} \int\limits_{(\omega)} v_\alpha v_\beta \left(f_i^{(0)} + \frac{1}{v} \sum_\gamma v_\gamma f_{i\gamma}^{(1)} \right) v^2 \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}\omega = m_i \int\limits_{(v)} f_i^{(0)} v^4 \,\mathrm{d}\omega \int\limits_{(\omega)} \frac{v_\alpha}{v} \frac{v_\beta}{v} \,\mathrm{d}\omega +$$
$$+ m_i \sum_\gamma \int\limits_{(v)} f_{i\gamma}^{(1)} v^4 \,\mathrm{d}v \int\limits_{(\omega)} \frac{v_\alpha}{v} \frac{v_\beta}{v} \frac{v_\gamma}{v} \,\mathrm{d}\omega \,.$$

Podle (39) má první člen smysl pouze pro $\alpha = \beta$, druhý člen je nulový. Tedy $\Psi_{i\alpha\alpha} = s_i\overline{(v_\alpha v_\beta)}_{\alpha=\beta} = m_i \dfrac{4\pi}{3} \int\limits_{(v)} f_i^{(0)} v^4 \mathrm{d}v$. Avšak podle definice efektivní hodnoty je $4\pi \int\limits_{(v)} v^2 (f_i^{(0)} v^2) \,\mathrm{d}v = n_i v_{efi}^2$ a podle představ kinetické teorie plynů [5] tlak je $p_i = \dfrac{1}{3} m_i n_i v_{efi}^2$. Potom už

$$\Psi_{i\alpha\alpha} = p_i; \sum_\beta \sum_\alpha \mathbf{e}^0_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\beta} (s_i\overline{v_\alpha v_\beta}) = \sum_\alpha \mathbf{e}^0_\alpha \frac{\partial p_i}{\partial x_\alpha} = \nabla p_i \,. \tag{49}$$

Rovnice (49) při souměrném rozdělení rychlostí částic kolem počátku rychlostního prostoru dochází k obyčejnému třísložkovému gradientu hydrostatického tlaku. Jinak je $\Psi_{i\alpha\beta}$ tensor o devíti složkách.

Rozebereme nyní člen $\overline{\mathbf{P}}_i$. Pro srážkový člen uvážíme jen pružné srážky, tj. dosadíme do první rovnice (27) za $\left[\dfrac{\delta f_i}{\delta t}\right]$ ze vzorce (36). Pro $\overline{\mathbf{P}}_i$ potom je:

$$\overline{\mathbf{P}}_i = m_i \int\limits_{(v)} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{v^3 k T_k}{m_k \lambda_i} \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial v} + \frac{m_i v^4}{m_k \lambda_i} f_i^{(0)} \right] v^2 \,\mathrm{d}v \int\limits_{(\omega)} \mathbf{v} \,\mathrm{d}\omega -$$
$$- m_i \sum_\alpha \sum_\beta \mathbf{e}^0_\beta \int\limits_{(v)} \frac{f_{i\alpha}^{(1)}}{\lambda_i} v^4 \,\mathrm{d}v \int\limits_{(\omega)} \frac{v_\alpha}{v} \frac{v_\beta}{v} \,\mathrm{d}\omega \,.$$

S ohledem na rovnice (39) a (40) při předpokladu, že volná dráha λ_i je vyjádřitelná obdobou výrazu (43), bude $\overline{\boldsymbol{P}}_i$ rovno

$$\overline{\boldsymbol{P}}_i = - m_i n_i \bar{\boldsymbol{u}}_i \sum_k \bar{\nu}_{ik} = - s_i \bar{\boldsymbol{u}}_i \sum_k \bar{\nu}_{ik} \,. \tag{50}$$

Fysikální vysvětlení posledního výsledku je jednoduché. Tato rovnice určuje velikost a směr hustoty hybnosti předané za jednotku doby částicemi i-tého druhu částicím k-tého druhu. Jde o strhování částic k-tého druhu částicemi druhu i-tého, nebo řečeno obrazně, jde o „brzdění" pohybu částic i-tého druhu v prostředí, které je vyplněno částicemi k-tého druhu. Je pochopitelné, že se zde uplatňuje pouze unášivá rychlost. Při nepravidelném tepelném pohybu, jelikož rozložení rychlostí je souměrné k počátku rychlostního prostoru, je předaná a přijatá hybnost při vektorovém součtu se všech směrů nulová.

Shrnutím posledních výsledků dostáváme nyní rovnici pro hybnost ve tvaru:

$$s_i \frac{\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{u}}_i}{\mathrm{d}t} = - s_i \nabla \varphi_0 - \nabla p_i - s_i \bar{\boldsymbol{u}}_i \sum_k \bar{\nu}_{ik} \,. \tag{51}$$

Budeme-li nyní uvažovat takové medium, ve kterém člen s $\bar{\nu}_{ik}$ je nepatrný a nahradíme-li $(-\nabla\varphi_0)$ vektorem gravitačního zrychlení $\boldsymbol{g}$, bude rovnice (51) nyní vypadat takto:

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{u}}_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{g} - \frac{1}{s_i} \nabla p_i \,. \tag{52}$$

To je ale Eulerova rovnice pro proudění nestlačitelné kapaliny, tj. jedna ze základních rovnic hydrodynamiky.

Prozkoumáme nyní blíže jednotlivé členy rovnice zachování energie v plazmatu (28). Ze členu se silou $\overline{\boldsymbol{F}}_i$ ponecháme, jako v předcházejícím případě, pouze vnější gravitační pole, tj.

$$n_i \overline{\boldsymbol{F}}_i \,.\, \bar{\boldsymbol{u}}_i = - s_i \bar{\boldsymbol{u}}_i \,.\, \nabla\varphi_0 = s_i \bar{\boldsymbol{u}}_i \,.\, \boldsymbol{g} \,. \tag{53}$$

Určíme dále člen $(-2/s_i)\, \overline{\boldsymbol{P}}_i \,.\, \bar{\boldsymbol{u}}_i$. To lze udělat jednoduše vynásobením vzorce (50) skalárně vektorem unášivé rychlosti, tj.

$$- \frac{2}{s_i} \overline{\boldsymbol{P}}_i \,.\, \bar{\boldsymbol{u}}_i = 2\bar{u}_i^2 \sum_k \bar{\nu}_{ik} \,. \tag{54}$$

Tato rovnice určuje vlastně ztrátu energie částic i-tého druhu v jednotce objemu za jednotku doby srážkami s částicemi jiných druhů. Může jít o srážky pružné i nepružné. Uplatňuje se zde pouze uspořádaný pohyb.

Z minulého výsledku bude jasný i další člen, tj.

$$\frac{1}{n_i} \int_{(c)} (v^2 - \bar{v}_i^2) \left[\frac{\delta f_i}{\delta t}\right] \mathrm{d}C = \frac{1}{n_i} \int_{(c)} v^2 \left[\frac{\delta f_i}{\delta t}\right] \mathrm{d}C - \frac{\bar{v}_i^2}{n_i} \int_{(c)} \left[\frac{\delta f_i}{\delta t}\right] \mathrm{d}C \,.$$

Druhý člen na pravé straně dle úprav pro rovnici (23) je

$$- \frac{\bar{v}_i^2}{n_i} \int_{(c)} \left[\frac{\delta f_i}{\delta t}\right] \mathrm{d}C = - (v_{efi}^2/n_i)(J_i - R_i) \,. \tag{55}$$

Tento výsledek udává vlastně ztrátu energie nepružnými srážkami ionisačními, nebo zisk energie rekombinačními srážkami.

První člen určíme se srážkovým členem (36):

$$\frac{1}{n_i}\int_{(C)} v^2 \left[\frac{\delta f_i}{\delta t}\right] \mathrm{d}C = \frac{1}{n_i}\int_{(v)} v^2 \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{v^3 kT_k}{m_k\lambda_i}\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial v} + \frac{m_i v^4}{m_k\lambda_i} f_i^{(0)}\right) \mathrm{d}v \int_{(\omega)} \mathrm{d}\omega -$$

$$-\frac{1}{n_i}\int_{(v)} \frac{\mathbf{f}_i^{(1)}}{\lambda_i} v^2\,\mathrm{d}v \,.\int_{(\omega)} \mathbf{v}\,\mathrm{d}\omega\,.$$

Člen s $\mathbf{f}_i^{(1)}$ je podle (39) nulový. Člen s funkcí $f_i^{(0)}$ je dále:

$$\frac{4\pi}{n_i}\int_0^\infty v^2 \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{v^3 kT_k}{m_k\lambda_i}\frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial v} + \frac{m_i v^4}{m_k\lambda_i} f_i^{(0)}\right) \mathrm{d}v$$

a při (43) s ohledem na $\frac{3kT_i}{m_i} = v^2_{ef_i}$ podle kinetické teorie je při Maxwellově rozdělovací funkci $f_i^{(0)}$

$$\frac{1}{n_i}\int_{(C)} v^2 \left[\frac{\delta f_i}{\delta t}\right] \mathrm{d}C = -\, v^2_{efi} \sum_k \frac{2m_i}{m_k}\left(1 - \frac{T_l}{T_i}\right) \bar{\nu}_{ik}\,. \tag{56}$$

Tento člen určuje tedy při pružných srážkách ztrátu neuspořádaným pohybem.

Zbývá rozebrat člen $(-1/n_i)\,\nabla\,.\,\Phi_i$. Podle (27) nejprve

$$n_i\overline{(2\bar{\mathbf{u}}_i\,.\,\mathbf{v}_i)\,\mathbf{v}_i} = \int_{(C)} (2\bar{\mathbf{u}}_i\,.\,\mathbf{v})\;\mathbf{v}\;f_i\;\mathrm{d}C = 2\sum_\alpha\sum_\beta \mathbf{e}^0_\beta \bar{u}_{i\alpha} \int_{(v)} v^4 f_i^{(0)}\,\mathrm{d}v \int_{(\omega)} \frac{v_\alpha}{v}\frac{v_\beta}{v}\,\mathrm{d}\omega +$$

$$+\,2\sum_\alpha\sum_\beta\sum_\gamma \mathbf{e}^0_\beta\;\bar{u}_{i\alpha}\int_{(v)} v^4 f^{(1)}_{i\gamma}\;\mathrm{d}v\int_{(\omega)}\frac{v_\alpha}{v}\frac{v_\beta}{v}\frac{v_\beta}{v}\,\mathrm{d}\omega\,.$$

Podle (39) je druhý člen nulový, první má smysl jen pro $\alpha = \beta$. Tedy

$$2\sum_\alpha \mathbf{e}^0_\alpha\,\bar{u}_{i\alpha}\,\frac{1}{3}\,4\pi\int^\infty v^4\,f_i^{(0)}\,\mathrm{d}v = n_i\overline{(2\bar{\mathbf{u}}_i\,.\,\mathbf{v}_i)\,\mathbf{v}_i}\,.$$

Jelikož $4\pi\int_0^\infty v^4 f_i^{(0)}\,\mathrm{d}v = v^2_{efi} n_i$ a dále $\frac{1}{3}\,m_i n_i v^2_{efi} = p_i$, je první člen Φ_i

$$\frac{2}{m_i}\,p_i\bar{\mathbf{u}}_i\,. \tag{57}$$

Druhý člen Φ_i je:

$$n_i\overline{v_i^2\mathbf{v}_i} = \int_{(C)} v^2\mathbf{v} f_i\,\mathrm{d}C = \int_{(v)} v^4 f_i^{(0)}\,\mathrm{d}v\int_{(\omega)}\mathbf{v}\,\mathrm{d}\omega + \sum_\alpha\sum_\beta \mathbf{e}^0_\alpha\int_{(v)} v^5 f^{(1)}_{i\beta}\,\mathrm{d}v\int_{(\omega)}\frac{v_\alpha}{v}\frac{v_\beta}{v}\,\mathrm{d}\omega\,.$$

Podle (39) je výraz s $f_i^{(0)}$ nulový, výraz s $f^{(1)}_{i\beta}$ má smysl zase jenom pro $\alpha = \beta$, takže

$$\sum_\alpha \mathbf{e}^0_\alpha\,\frac{4\pi}{3}\int_{(v)} v^5\,f^{(1)}_{i\alpha}\,\mathrm{d}v = \frac{4\pi}{3}\int_{(v)} v^2(v^3\mathbf{f}_i^{(1)})\,\mathrm{d}v\,.$$

Podle (40) je s ohledem na definici střední hodnoty [5]

$$n_i\overline{v_i^2\mathbf{v}_i} = n_i\bar{\mathbf{u}}_i v_{efi}^2 = \frac{3}{m_i}\, p_i\bar{\mathbf{u}}_i\,. \tag{58}$$

Sečtením (57) a (58) je pak obecně

$$\Phi_i = \frac{\text{konst}}{m_i}\, p_i\bar{\mathbf{u}}_i\,. \tag{59}$$

Rozměr $p_i\bar{\mathbf{u}}_i$ je (dyn cm/cm² sec) = (erg/cm² sec), což je rozměr výkonu na jednotku plochy. Znamená to, že člen $\nabla\,.\,\Phi_i$ určuje přírůstek nebo úbytek hustoty energie za jednotku doby kompresí nebo expansí plynu částic i-tého druhu. Konstanta určuje pak kvalitu termodynamické cesty, po které se tato expanse nebo komprese děje.

Předcházející výsledky je možné už dosadit do rovnice energetické rovnováhy. Po menší úpravě platí, že

$$\frac{\mathrm{d}\bar{u}_i^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}v_{efi}^2}{\mathrm{d}t} = 2\bar{\mathbf{u}}_i\,.\,\mathbf{g} - \frac{\text{konst.}}{s_i}\,\nabla\,.\,p_i\bar{\mathbf{u}}_i\, -$$

$$- 2\bar{u}_i^2 \sum_k \bar{\nu}_{ik} - v_{efi}^2 \sum_k \frac{2m_i}{m_k}\left(1 - \frac{T_k}{T_i}\right)\bar{\nu}_{ik} - \frac{v_{efi}^2}{m_i}\,(J_i - R_i)\,. \tag{60}$$

Levá strana poslední rovnice udává v podstatě časovou změnu energie částic i-tého druhu, a to kinetickou energii uspořádaného pohybu a kinetickou energii neuspořádaného pohybu, tj. vnitřní energii. Na pravé straně rovnice (60) jsou pak příčiny této časové změny. V případě nulové makroskopické rychlosti je vnitřní energie plynu částic i-tého druhu měněna pouze pružnými a nepružnými bezprostředními srážkami. Pružné srážky přispívají k energetické bilanci jen potud, pokud $T_k \neq T_i$. Při $T_k < T_i$ částice i-tého druhu energii předávají, plyn i-tých částic se těmito srážkami ochlazuje, při $T_i < T_k$ je tomu obráceně. Při expansi nebo kompresi musí být vždy unášivá rychlost nenulová.

Zanedbáme-li v (60) srážkové členy a v_{efi}^2, je

$$\frac{\mathrm{d}\bar{u}_i^2}{\mathrm{d}t} = 2\bar{\mathbf{u}}_i\,.\,\mathbf{g} - \frac{\text{konst.}}{s_i}\,\nabla\,.\,p_i\bar{\mathbf{u}}_i\,. \tag{61}$$

Rovnice odpovídá mediu, které proudí vysokou rychlostí při malé rychlosti neuspořádaného pohybu.

Při ustáleném proudění, kdy $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$, je s pomocí výrazu pro $(\mathrm{d}\bar{u}_i^2/\mathrm{d}t)$

$$2\bar{\mathbf{u}}_i\,.\,\mathbf{g} = 2\bar{\mathbf{u}}_i\,.\,(-\nabla\varphi_0) = -2\sum_\alpha \bar{u}_{i\alpha}\,\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\,\varphi_0 =$$

$$= -2\left(\sum_\alpha \bar{u}_{i\alpha}\,\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)\varphi_0 = -2(\bar{\mathbf{u}}_i\,.\,\nabla)\,\varphi_0.$$

V rovnici (61) konst. = 2, neboť pro tento člen platí pouze vzorec (57). Vzorec (58) byl odvozen při nenulové funkci $f_i^{(1)}$, která však při takto definovaném proudícím mediu postrádá smyslu. Vyslovíme-li ještě požadavek nestlačitel-

ného media, nebude s_i funkcí souřadnic x_α. Za těchto podmínek rovnice kontinuity (23) po vynásobení m_i poskytuje: $\nabla \cdot \bar{\boldsymbol{u}}_i = 0$. Podle toho $-\dfrac{2}{s_i} \nabla p_i \bar{\boldsymbol{u}}_i =$
$$= -\frac{2}{s_i} \bar{\boldsymbol{u}}_i \cdot \nabla p_i = -\frac{2}{s_i} \sum_\alpha \bar{\boldsymbol{u}}_{i\alpha} \frac{\partial p_i}{\partial x_\alpha} = -\frac{2}{s_i} (\bar{\boldsymbol{u}}_i \cdot \nabla)\, p_i.$$
Pro rovnici (61) pak dostáváme $(\bar{\boldsymbol{u}}_i \cdot \nabla)\, \bar{\boldsymbol{u}}_i^2 = -2(\bar{\boldsymbol{u}}_i \cdot \nabla)\, \varphi_0 - \dfrac{2}{s_i} (\bar{\boldsymbol{u}}_i \cdot \nabla)\, p_i$. Po menší úpravě pak
$$(\bar{\boldsymbol{u}}_i \cdot \nabla) \frac{\bar{\boldsymbol{u}}_i^2}{2} + (\bar{\boldsymbol{u}}_i \cdot \nabla)\, \varphi_0 + (\bar{\boldsymbol{u}}_i \cdot \nabla) \frac{p_i}{s_i} = 0, \text{ čili } (\bar{\boldsymbol{u}}_i \cdot \nabla) \left\{ \frac{\bar{\boldsymbol{u}}_i^2}{2} + \varphi_0 + \frac{p_i}{s_i} \right\} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\bar{\boldsymbol{u}}_i^2}{2} + \varphi_0 + \frac{p_i}{s_i} = \text{konst.} \tag{62}$$
Rovnice (62) je Bernoulliho rovnicí pro nestlačitelné kapaliny. Je to tedy další ze základních rovnic hydrodynamiky, na kterou lze jednu z rovnic plazmatu převést. (Jelikož zemské gravitační pole lze při uvedeném zkoumání považovat za homogenní, je $\varphi_0 = gh$, kde h je výška nad zemským povrchem.)

Z Liouvillova teorému, jako základního zákona zachování rozdělovací funkce — hustoty pravděpodobnosti — ve fázovém prostoru, plynou všechny další fundamentální rovnice fysiky plazmatu. Z nich je možné dojít při určitých zjednodušeních k rovnicím hydrodynamiky. Kinetická rovnice je nadřazena rovnici kontinuity, rovnici pro hybnost atd. Tyto rovnice jsou pak obecnější než hydrodynamické zákonitosti. Pro řešení poměrů v laboratorním plazmatu se uvedených rovnic velmi často používá.

Literatura

[1] N. N. Bogoljubov, *Problemy dinamičeskoj těorii v statističeskoj fizike*, OGIZ, Moskva-Leningrad 1946.
[2] L. Landau, E. Lifšic, *Statističeskaja fizika*, GITTL, Moskva-Leningrad 1951.
[3] S. Chapman, T. G. Cowling, *The mathematical theory of non-uniform gases*, Cambridge 1953.
[4] V. L. Granovskij, *Električeskij tok v gaze I.*, GITTL, Moskva-Leningrad 1952.
[5] J. Kracík, *Úvod do teorie plazmatu I.*, učeb. text., SNTL, Praha 1960.
[6] Kleczek J., Pokroky matem., fys., astron. V (1960), 293, č. 3.
[7] Hruška A., Pokroky matem., fys., astron. V (1960), 308, č. 3.
[8] Kracík J., Sborník prací elektrotechn. fak. ČVUT — 1960, (v tisku).

NĚKOLIK POZNÁMEK O DOSAVADNÍM VÝVOJI PALIVOVÝCH ČLÁNKŮ

A. FOŘT

Katedra obecné fysiky matematicko-fysikální fakulty KU)*

V dosavadní praxi bylo nutné nejenom počítat s omezenou účinností tepelných zařízení, podléhající termodynamickým zákonům přeměny tepla na mechanickou energii, ale bylo nutno tuto mechanickou energii přeměnit v elektrickou přídavným zařízením. V poslední době se proto vyvinula snaha obejít omezení a hledat možnost účinné a přímé přeměny tepla v elektrickou energii.

*) Podle *Nature* 186/1960/,589.