Tibor Šalát

Rad prevrátených hodnôt všetkých prvočísel a niektoré výsledky o konvergencii čiastočných radov harmonického radu

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 10 (1965), No. 3, 168--178

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/138240`

ani jednotkou ionizace ani absorbované dávky ve vzduchu. Ačkoliv podle definice z r. 1953 má rentgen rozměr toku energie, neříká nic o intenzitě ani o energii záření, i když tyto veličiny mohou být z výsledku měření vypočteny. Poslední doporučení ICRU ve snaze upřesnit vývody předchozích doporučení definují absorbovanou dávku, novou veličinu kerma a expozici.

Z uvedeného výčtu nejrůznějších definic a jednotek dávky záření by se mohlo zdát, že v dozimetrii ionizujícího záření byla a dosud je řada nerozřešených problémů. Diskuse, které probíhají v oblasti dozimetrie, se však převážně týkají spíše teoretických otázek, nikoli způsobů praktického měření. Praktická měření se setkávají nanejvýš s technickými, nikoli však se zásadními obtížemi.

Literatura

[1] F. Běhounek, A. Bohun, J. Klumpar: *Radiologická fyzika.* SNTL, Praha 1958.

[2] F. Běhounek: *Dozimetrie ionizačního záření a ochrana před ním.* SPN, Praha 1959.

[3] G. J. Hine, G. L. Brownell: *Radiation Dosimetry.* Academic Press Inc. Publishers, New York 1956.

[4] S. N. Ardašnikov, N. S. Četverikov: Atomnaja energija *9*, 239 (1957).

[5] G. W. Gorschkow: *Gammastrahlung radioaktiver Körper.* B. G. Teubner Verlaggesellschaft, Leipzig 1960.

[6] E. H. Quimby, G. C. Laurence: Radiology *35*, 138 (1940).

[7] Report of the International Commission on Radiological Units and Measurements (ICRU) 1956. National Bureau of Standards Handbook *62*, April 10, 1957; ruský překlad: Moskva 1959.

[8] ICRU Report No. 10a, 19292. Nat. Bur. Stds Handbook No. 84; ruský překlad Izmeritelnaja technika *10*, 54 (1963). Přehledně v článku J. W. Boag: Physics in Med. and Biol. *7*, 409 (1963).

[9] Vyhláška ministerstev zdravotnictví a chemického průmyslu ze dne 21. 3. 1963 o hygienické ochraně před ionizujícím zářením a o hospodaření se zdroji ionizujícího záření č. 34, částka 19 Sb. zák. ČSSR (1963).

[10] V. Šindelář, L. Smrž: Nová měrová soustava v ČSSR. Normalizace č. 12 (1963).

RAD PREVRÁTENÝCH HODNÔT VŠETKÝCH PRVOČÍSEL A NIEKTORÉ VÝSLEDKY O KONVERGENCII ČIASTOČNÝCH RADOV HARMONICKÉHO RADU

Tibor Šalát, Bratislava

V tomto článku pojednáme o niektorých spôsoboch, ako možno zistiť divergenciu radu $\sum_{n=1}^{\infty} 1/p_n$ prevrátených hodnôt všetkých prvočísel a osvetlíme túto problematiku aj pomocou istých úvah, ktoré sa týkajú divergencie čiastočných radov harmonického radu.

Označme všade v ďalšom znakom

$$(1) \qquad p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$$

postupnosť všetkých prvočísel, teda $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, atd.

Nech

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} d_n = d_1 + d_2 + \ldots + d_n + \ldots$$

je nekonečný číselný rad, nech

$$(3) \qquad k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$$

je (nejaká) postupnosť prirodzených čísel, potom rad

$$(4) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} d_{k_n} = d_{k_1} + d_{k_2} + \ldots + d_{k_n} + \ldots$$

nazývame *čiastočným radom* radu (2). Ak rad (2) absolútne konverguje, potom je známe, že aj (4) konverguje pre každú postupnosť (3). Ak (2) konverguje neabsolútne alebo diverguje a $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$, potom existujú čiastočné rady (4), ktoré konvergujú, i také, ktoré divergujú. Ak špeciálne klademe $d_n = 1/n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, potom vidíme, že rad

$$(5) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n} + \ldots$$

je čiastočným radom harmonického radu

$$(6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Keďže $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, existujú čiastočné rady radu (6), ktoré konvergujú (takým je napríklad $\sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k$) i také, ktoré divergujú (takým je napríklad $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(2k)$). K posledným patrí aj rad (5), ako je v podstate známe už od Eulerových dôb.

V ďalšom podáme niekoľko jednoduchých dôkazov divergencie radu (5), v ktorých sa zreteľne prejavia rozmanité vlastnosti prvočísel. Pôjde teda o dôkazy nasledujúcej dobre známej vety.

***Veta* 1.** *Ak $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť všetkých prvočísel, potom* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/p_n = +\infty$.

I. Už od Eulera prochádza nasledujúci dôkaz divergencie radu (5) spočívajúci v podstate na vete o vyjadriteľnosti prirodzeného čísla väčšieho než 1 vo tvare súčinu prvočísel (pozri [1] str. 10, 156–158). Pomocou tohto základného poznatku teorie čísel ľahko nahliadneme, že nekonečný súčin

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n}\right) \tag{7}$$

diverguje. Naozaj, nech $\varepsilon > 0$. Zvoľme $n_0 > 1$ tak, aby

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n_0}>\frac{1}{\varepsilon}.$$

To je zrejme možné na základe divergencie radu (6). Nech teraz p_i $(i = 1, 2, \ldots m)$ sú všetky prvočísla neprevyšujúce číslo n_0. Ku každému p_i $(i = 1, 2, \ldots m)$ existuje prirodzené α_i tak, že

$$p_i^{\alpha_i} \leqq n_0 < p_i^{\alpha_i+1} \quad (i = 1, 2, \ldots m).$$

Potom zrejme

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{p_i}} > 1+\frac{1}{p_i}+\frac{1}{p_i^2}+\ldots+\frac{1}{p_i^{\alpha_i}},$$

$$\frac{1}{\left(1-\dfrac{1}{p_1}\right)\left(1-\dfrac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{p_m}\right)} > \sum \frac{1}{p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\ldots p_m^{\beta_m}}.$$

Vpravo sa sčituje cez všetky také m-tice $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m)$ celých čísel, pre ktoré platí $0 \leqq \beta_i \leqq \alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots m)$. Na základe vety o kanonickom rozklade prirodzených čísel dostávame vzhľadom na voľbu čísel α_i $(i = 1, 2, \ldots m)$

$$\frac{1}{\left(1-\dfrac{1}{p_1}\right)\left(1-\dfrac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{p_m}\right)} > \sum_{k=1}^{n_0}\frac{1}{k} > \frac{1}{\varepsilon};$$

odtiaľ

$$\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_m}\right) < \varepsilon.$$

Ak klademe

$$P_k = \prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_1}\right) \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

potom $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ je zrejme klesajúca postupnosť a na základe predošlého je $P_k < \varepsilon$ pre $k \geqq m$, teda $\lim_{k\to\infty} P_k = 0$. Odtiaľ na základe známych vlastností nekonečných súčinov (pozri [2] str. 119) vyplýva $\sum_{n=1}^{\infty} 1/p_n = +\infty$.

II. Iný, tiež už veľmi dávno známy dôkaz vety 1 vyplýva z ČEBYŠEVOVÝCH nerovností pre n-té prvočíslo (pozri [1] str. 166). Ako je známe, Čebyšev ukázal, že existujú kladné reálne čísla a, b tak, že pre každé $n > 1$ je $an \log n < p_n < bn \log n$. Odtiaľ vyplýva

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} > \frac{1}{b} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} . \tag{8}$$

Z elementov analýzy je známe, že rad $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n \log n)$ diverguje, takže z (8) vyplýva správnosť tvrdenia vety 1 na základe porovnávacieho kritéria.

III. K dôkazu vety 1 možno použiť aj rozklad čísla > 1 na súčin maximálneho kvadratického deliteľa a čísla bez kvadratických deliteľov (pozri [3] str. 16–17). Z kanonického rozkladu prirodzeného čísla vyplýva, že každé $n > 1$ možno jednoznačne vyjadriť vo tvare $n = n_1^2 \,.\, m$, kde $n_1 \geqq 1$ a $m = q_1^{\beta_1} \,.\, q_2^{\beta_2} \ldots q_s^{\beta_s}$, $s \geqq 1$, pritom q_i $(i = 1, 2, \ldots s)$ sú prvočíslení delitelia čísla n a $\beta_i = 0$ alebo 1 pre každé $i = 1, 2, \ldots s$. Nech by teraz (5) konvergoval. Potom existuje j tak, že

$$\frac{1}{p_{j+1}} + \frac{1}{p_{j+2}} + \ldots + \frac{1}{p_{j+k}} + \ldots < \frac{1}{2} .$$

Označme pri pevnom prirodzenom $x > 2^{2j+2}$ znakom $N(x)$ počet všetkých tých prirodzených $n \leqq x$, ktoré nie sú deliteľné žiadnym prvočíslom $p_n (n > j)$. Potom na základe predošlého každé $n \leqq x$, ktoré nie je deliteľné žiadnym $p_n (n > j)$ má tvar $n = n_1^2 \,.\, m = n_1^2 \,.\, p_1^{\beta_1} \ldots p_j^{\beta_j} (\beta_i = 0$ alebo 1 pre $i = 1, 2, \ldots j)$. Pre n_1 máme nie viac než $\sqrt{x}$ možných hodnôt a pre m máme nie viac než 2^j možných hodnôt, preto $N(x) \leqq 2^j \sqrt{x}$. Ďalej počet všetkých tých $n \leqq x$, ktoré sú deliteľné prirodzeným a je $\leqq x/a$, takže pre počet $x - N(x)$ všetkých tých $n \leqq x$, z ktorých každé je deliteľné aspoň jedným p_n $(n > j)$ dostávame

$$x - N(x) \leqq \frac{x}{p_{j+1}} + \frac{x}{p_{j+2}} + \ldots < \frac{x}{2} ,$$

teda $x - N(x) \leqq x/2$, $x/2 \leqq N(x) \leqq 2^j \sqrt{x}$, odtiaľ $x \leqq 2^{2j+2}$, čo je vo spore s voľbou čísla x.

IV. Z novších dôkazov vety 1 spomenieme BELLMANOV dôkaz z roku 1943 (pozri [4]). Ide o nepriamy dôkaz, ktorý se zase opiera o vetu o kanonickom rozklade prirodzených čísel.

Nech $\sum_{i=1}^{\infty} 1/p_i < +\infty$, potom existuje $k \geqq 1$ tak, že

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_i} = \alpha < 1 .$$

Utvorme súčin

$$\alpha^n = \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_i}\right)^n = \sum \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_n}},$$

vpravo indexy $i_1, i_2, \dots i_n$ prebiehajú čísla $k + 1, k + 2, \dots$. Porovnaním s radom $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n$ dostávame odtiaľ konvergenciu radu $\sum_l 1/l$, kde l prebieha všetky prirodzené čísla > 1, ktoré vo svojich kanonických rozkladoch neobsahujú prvočísla p_n $(n \leqq k)$. Utvorme konečne súčin

$$\left(\sum_l \frac{1}{l}\right) \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)} = \left(\sum_l \frac{1}{l}\right)\left(1 + \sum_m \frac{1}{m}\right),$$

kde m prebieha všetky tie prirodzené čísla > 1, ktoré vo svojich kanonických rozkladoch neobsahujú prvočísla p_i $(i > k)$. Teda

$$\left(\sum_l \frac{1}{l}\right)\left(1 + \sum_m \frac{1}{m}\right) < +\infty$$

a tak aj

$$\left(1 + \sum_l \frac{1}{l}\right)\left(1 + \sum_m \frac{1}{m}\right) < +\infty$$

Z vety o kanonickom rozklade však ihneď vyplýva, že ľavá strana v poslednej nerovnosti je totožná s harmonickým radom, dospeli sme teda ku sporu.

V. Medzi novšie dôkazy vety 1 patrí aj tento MOSEROV dôkaz z roku 1958 (pozri [5]), spočívajúci na originálnej myšlienke, ktorá vhodne zapadne do našich ďalších úvah.

Označme znakom π prvočíselnú funkciou (teda $\pi(x)$ značí počet prvočísel nie väčších než x) a pri celom $x \geqq 0$ položme $R(x) = \sum_{p_i \leqq x} 1/p_i$ (vpravo sa sčituje pre tie a len tie p_i, ktoré neprevyšujú x, teda pre $i = 1, 2, \dots \pi(x)$; prázdny súčet kladieme rovný nule).

Napred ľahko možno ukázať, že ak $\sum_{i=1}^{\infty} 1/p_i < +\infty$, tj. ak existuje konečná limita $\lim_{x\to\infty} R(x) = \lambda$, potom $\lim_{x\to\infty} \pi(x)/x = 0$. Naozaj, jednoduchou úpravou dostaneme

$$\pi(x) = 1(R(1) - R(0)) + 2(R(2) - R(1)) + \dots + x(R(x) - R(x - 1)),$$

odtiaľ

$$\frac{\pi(x)}{x} = R(x) - \frac{R(0) + R(1) + \dots + R(x - 1)}{x}$$

Ak teraz existuje konečná $\lim_{x\to\infty} R(x) = \lambda$, potom ako je známe z elementov analýzy,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{R(0) + R(1) + \ldots + R(x-1)}{x} = \lambda$$

a tak $\lim_{x\to\infty} \pi(x)/x = 0$.

Nech teda $\sum_{i=1}^{\infty} 1/p_i < +\infty$. Potom existuje k tak, že $\sum_{i=k+1}^{\infty} 1/p_i < 1/2$. Ďalej na základe predošlého zvoľme m tak, aby $\pi(p_k!\, m)/m < 1/2$. Zostrojme teraz čísla

$$T_i = i \,.\, p_k! - 1 \quad (i = 1, 2, \ldots m)\,.$$

Ak nejaké prvočíslo p delí T_i, potom z definície čísla T_i vyplýva

$$p_k < p < p_k!\, m\,. \tag{9}$$

Ďalej ak p delí T_i a tiež aj T_j, potom p delí aj $T_i - T_j = (i-j)\,.\,p_k!$, teda p delí rozdiel $i - j$. Odtiaľ vyplýva, že každé prvočíslo splňujúce (9) delí nie viac než $(m/p) + 1$ členov postupnosti $T_1, T_2, \ldots T_m$, teda

$$\sum_{p_k < p < p_k! m} \left(\frac{m}{p} + 1\right) \geqq m\,,$$

odtiaľ

$$1 \leqq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_i} + \frac{\pi(mp_k!)}{\mathrm{m}}$$

a odtiaľ na základe voľby čísel m, k dostávame spor $(1 < 1)$.

Poznamenajme na koniec tohoto prehľadu dôkazov vety 1, že presnejšími odhadmi možno dokázať nasledujúce vzťahy pre čiastočné súčty radov (5), (6) (pozri [6] str. 49, 339–340):

Ak x je reálne, $x > 1$, potom

$$\sum_{n \leqq x} \frac{1}{n} = \log x + C + O(1/x)\,, \tag{10}$$

$$\sum_{p_i \leqq x} \frac{1}{p_i} = \log\log x + B + O(1/\log x)\;^{*)} \tag{11}$$

$(C, B$ sú konštanty$)$.

---

*) $O(\psi(x))$ značí funkciu $f(x)$, pre ktorú platí

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{\psi(x)} < +\infty$$

Z (10) a (11) vyplýva

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sum\limits_{p_i \leqq x} \frac{1}{p_i}}{\sum\limits_{n \leqq x} \frac{1}{n}} = 0 ;$$

to ukazuje na „pomalosť“ divergencie radu (5) vzhľadom na „rýchlosť“ divergencie radu (6) a súčasne na „riedkosť“ rozloženia prvočísel v postupnosti všetkých prirodzených čísel.

Aj inak ešte možno ilustrovať rozdiel medzi divergenciami radov (5) a (6). Rad $\sum_{n=1}^{\infty} 1/k_n$ nazveme slabo divergentným, ak $\sum_{n=1}^{\infty} 1/k_n = +\infty$ a súčasne $\sum_{k_n > 1} 1/(k_n \log k_n) < +\infty$. V zmysle tejto definície rad (6) nie je slabo divergentným, keďže $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n \log n) = +\infty$. Naproti tomu z Čebyševových nerovností dostávame (pre $n > 1$) $p_n > an \log n$ a tak $\log p_n > \log a + \log n + \log \log n > \log n$ (pre $n > n_1 > 1$), teda pre $n > n_1$ je

$$\sum_{n > n_1} \frac{1}{p_n \log p_n} < \frac{1}{a} \sum_{n > n_1} \frac{1}{n \log^2 n} < +\infty ,$$

takže rad (5) je slabo divergentným.

Teraz urobíme niekoľko všeobecných poznámok ku problémom konvergencie čiastočných radov.

Ak vyjadríme každé $x \in (0, 1\rangle$ nekonečným dyadickým rozvojom $x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(x)/2^k$ ($\varepsilon_k(x) = 0$ alebo 1 a pre nekonečne mnoho k je $\varepsilon_k(x) = 1$), potom

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(x)\, d_k \tag{12}$$

je čiastočný rad radu (2) a obrátene, ak (4) je čiastočný rad radu (2), položme $\varepsilon_{k_n} = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ a $\varepsilon_j = 0$ pre $j \neq k_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k/2^k$, $\varepsilon_k = \varepsilon_k(x)$, potom (4) možno písať vo tvare (12). Teda ak x prebieha všetky reálne čísla intervalu $(0, 1\rangle$, potom (12) prebieha všetky čiastočné rady radu (2). Táto skutočnosť vyvoláva myšlienku „ohodnotiť“ množinu všetkých konvergentných a množinu všetkých divergentných čiastočných radov radu (2). Možno dokázať nasledujúci dnes už klasický výsledok (analogický výsledok je známy aj o čiastočných postupnostiach divergentnej postupnosti).

***Veta* 2.** *Nech rad* $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ *diverguje. Potom pre skoro všetky* $x \in (0, 1\rangle$ (v zmysle Lebesgueovej miery) *platí: rad* (12) *diverguje.*

(Pozri [7], [8] str. 404.)

Predošlý výsledok komentujeme stručně takto: Skoro všetky čiastočné rady divergentného radu divergujú. Teda konvergencia čiastočného radu divergentného radu je udalosť „výnimočná", pravidelnou udalosťou je divergencia takého radu. V tomto zmysle sa rad (5) chová „pravidelne".

Dá sa očakávať, že divergencia čiastočného radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \ldots + \frac{1}{k_n} + \ldots \tag{13}$$

radu (6) bude asi súvisieť s tým, ako „husto" sú prvky množiny

$$A = \{k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots\}$$

rozdelené v postupnosti všetkých prirodzených čísel. K posúdenie tejto „hustoty" používame pojem asymptotickej hustoty množiny. Asymptotickou hustotou množiny A nazývame číslo $\delta(A)$ definované rovnosťou

$$\delta(A) = \lim_{x \to \infty} \frac{A(x)}{x},$$

kde $A(x)$ značí počet všetkých prvkov množiny A nepresahujúcich reálne číslo x. $\delta(A)$ definujeme ovšem len za predpokladu, že limita vpravo existuje. Zrejme $\delta(A) \in \in \langle 0, 1 \rangle$ a podľa veľkosti čísla $\delta(A)$ usudzujeme na „bohatosť", „hustotu" množiny A.

Ukážeme ďalej, že konvergencia čiastočného radu (13) radu (6) môže nastať len v prípade „chudobnosti" množiny A, presne povedené len keď A má asymptotickú hustotu 0. K dôkazu tohto faktu použijeme nasledujúcu lemmu (pozri [9], [10]).

Lemma 1. *Nech $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n \geqq \ldots$, $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ Označme pri $x > 0$ znakom $f(x)$ počet všetkých tých i, pre ktoré $a_i \geqq x$. Ak $\sum_{i=1}^{\infty} a_i < +\infty$, potom $\lim_{x \to 0+} x f(x) = 0$.*

Dôkaz. Nech $a_{k+1} < x \leqq a_k$. Potom zrejme $f(x) = k$ a tak $x f(x) \leqq k a_k$. No je dobre známe, že pre konvergentné rady s nezápornými členmi tvoriacimi nerastúcu postupnosť platí $\lim_{k \to \infty} k a_k = 0$. Preto $\lim_{x \to 0+} x f(x) = 0$.

***Veta* 3.** *Nech $\sum_{n=1}^{\infty} 1/k_n < +\infty$, $A = \{k_1 < k_2 < \ldots < k_n \ldots\}$. Potom $\delta(A) = 0$.*

Dôkaz. Nech $\sum_{n=1}^{\infty} 1/k_n < +\infty$. Použijeme predošlú lemmu. Pri označení lemmy 1 $f(x)$ $(x > 0)$ značí počet všetkých tých i, pre ktoré $1/k_i \geqq x$, teda $f(x)$ je počet všetkých tých i, pre ktoré $k_i \leqq 1/x$, teda $f(x) = A(1/x)$. Ďalej $x f(x) = x A(1/x) = A(1/x)/(1/x)$. Položme $y = 1/x$, potom z posledných rovností na základe lemmy 1 dostaneme

$$\delta(A) = \lim_{y \to \infty} \frac{A(y)}{y} = 0.$$

Poznámka. Dôkaz vety 3 možno uskutočniť aj úplne analogickým postupom tomu postupu, ktorým je v Moserovom dôkaze vety 1 ukázané, že z konvergencie radu $\sum_{i=1}^{\infty} 1/p_i$ vyplýva $\lim_{x\to\infty} \pi(x)/x = 0$. Ďalší dôkaz vety 3 sa nájde v [11] a dôkaz vety trochu obecnejšej než je veta 3 je podaný v [12].

Podmienka $\delta(A) = 0$ nie je postačujúca pre konvergenciu radu (13), aby sme to nahliadli, stačí za A zvoliť množinu všetkých prvočísel.

Nasledujúca veta ukazuje, že o divergencii radu (13) rozhoduje v značnej miere chovanie podielov tvaru

$$\frac{A(x)}{\left(\dfrac{x}{\log x}\right)}, \quad \frac{A(x)}{\left(\dfrac{x}{\log^{1+\varepsilon} x}\right)} \qquad (\varepsilon > 0)$$

pri $x \to \infty$.

Dôkaz časti *a*) nasledujúcej vety je analogon dôkazu jednej z Čebyševových nerovností.

Veta 4. *a*) *Nech* $A = \{k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots\}$. *Ak* $\liminf_{x\to\infty} A(x)/(x \log^{-1} x) > 0$, *potom* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/k_n = +\infty$.

b) *Nech A má predošlý význam. Nech existuje* $\varepsilon > 0$ *tak, že*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{A(x)}{\left(\dfrac{x}{\log^{1+\varepsilon} x}\right)} < +\infty\,. \tag{14}$$

Potom $\sum_{n=1}^{\infty} 1/k_n < +\infty$.

Dôkaz. a) Nech platia predpoklady uvedené sub *a*). Potom existuje $c_1 > 0$ tak, že pre všetky x od istého počínajúc (pre $x \geqq k_r$) je

$$A(x) > c_1 \frac{x}{\log x}\,.$$

Potom pre $x = k_n$, $n \geqq r$, dostaneme

$$n = A(k_n) > c_1 \frac{k_n}{\log k_n}\,,$$

odtiaľ

$$c_1 < \frac{n \log k_n}{k_n}\,. \tag{15}$$

No z elementov analýzy je známe, že $(\log k_n)\sqrt{k_n} \to 0$, ak $n \to \infty$, preto pre $n \geqq s \geqq r$ (s je vhodne volené) platí $(\log k_n)/\sqrt{k_n} < c_1$, to spolu s (15) dá $k_n < n^2$,

$\log k_n < 2 \log n$. Potom z (15) dostaneme

$$c_1 < \frac{2n \log n}{k_n}, \quad \frac{1}{k_n} > \frac{c_1}{2n \log n}.$$

Odtiaľ je už divergencia radu $\sum_{n=1}^{\infty} 1/k_n$ zrejmá.

b). Nech platí (14). Potom existuje $c_2 > 0$ tak, že pre všetky $x \geqq 2$ je

$$A(x) \leqq c_2 \frac{x}{\log^{1+\varepsilon} x}.$$

Odhadneme súčet $\tau_n = \sum 1/k_i$, $2^n \leqq k_i < 2^{n+1}$. Jednoduchým odhadom dostaneme

$$\tau_n < A(2^{n+1}) \cdot \frac{1}{2^n} < c_2 \frac{2^{n+1}}{2^n \log^{1+\varepsilon}(2^{n+1})} = \frac{c_3}{(n+1)^{1+\varepsilon}},$$

$$c_3 = \frac{2c_2}{\log^{1+\varepsilon} 2} > 0.$$

Odtiaľ

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k_i} = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n < c_3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} < +\infty,$$

keďže $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$ konverguje pri $\alpha > 1$.

Z dokázanej vety (časť a) vyplýva divergencia radu (5) na základe prvočíslenej vety (pozri [3] str. 9), podľa ktorej

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{\left(\frac{x}{\log x}\right)} = 1.$$

Ak p i $p + 2$ je prvočíslo, potom čísla p, $p + 2$ nazývame prvočíslenými dvojčatmi. Je známe, že ak A značí množinu všetkých prvočíselných dvojčat, potom (pozri [13] str. 126—131) platí

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{A(x)}{\frac{x(\log \log x)^2}{\log^2 x}} < +\infty. \tag{16}$$

Keďže $\lim_{x \to \infty} (\log \log x)^2 / \sqrt{\log x} = 0$, dostaneme zo (16)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{A(x)}{\left(\frac{x}{\log^{\frac{3}{2}} x}\right)} = 0$$

a tak, ak A je nekonečná (to dodnes ovšem ešte nevieme), dostávame z vety 4 (časť b)) konvergenciu radu prevrátených hodnôt prvkov množiny A (to je tzv. BRUNOVA veta).

Označme ďalej znakom $\mathfrak{A}$ systém všetkých nekonečných podmnožín množiny všetkých prirodzených čísel. $\mathfrak{A}_0$ ($\mathfrak{A}_1$ resp. $\mathfrak{A}_2$) nech značí množinu všetkých tých $A \in \mathfrak{A}$, pre ktoré $\delta(A) = 0$

$$\left\{ \liminf_{x \to \infty} \frac{A(x)}{\left(\frac{x}{\log x}\right)} = 0 \quad \text{resp.} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{A(x)}{\left(\frac{x}{\log x}\right)} = 0 \right\}$$

Potom zrejme platí inklúzia $\mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{A}_1$. Ak označíme znakom $\mathfrak{A}_c$ množinu všetkých tých $A \in \mathfrak{A}$, $A = \{k_1 < k_2 < \ldots < k_n \ldots\}$, pre ktoré $\sum_{n=1}^{\infty} 1/k_n < +\infty$, potom na základe vety 3 je $\mathfrak{A}_c \subset \mathfrak{A}_0$ a na základe vety 4 (časť a)) je $\mathfrak{A}_c \subset \mathfrak{A}_1$. Vzniká otázka, či platí aj inklúzia $\mathfrak{A}_c \subset \mathfrak{A}_2$, inými slovami či platí výrok:

$$\text{Ak } \sum_{n=1}^{\infty} 1/k_n < +\infty, \text{ potom } \lim_{x \to \infty} A(x)/(x \log^{-1} x) = 0\,.$$

Ako ukázal P. T. BATEMAN (pozri [14]) a S. W. GOLOMB (pozri [15]), správna odpoveď na formulovanú otázku je negatívna. Z výsledkov v [14] a [15] vyplýva ľahko dokonca táto veta

Veta 5. *Nech $\mathfrak{A}_c$, $\mathfrak{A}_2$ majú predošlý význam. Potom každá z množín $\mathfrak{A}_c - \mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_c$ je neprázdna.*

Literatúra

[1] W. SIERPIŃSKI: *Teoria liczb.* Warszawa—Wroclaw 1950.

[2] V. JARNÍK: *Diferenciální počet.* Praha 1953.

[3] G. H. HARDY, E. M. WRIGHT: *An introduction to the theory of numbers.* Oxford 1954.

[4] R. BELLMAN: A note on the divergence of a series. Amer. Math. Monthly, *50* (1943), 318.

[5] L. MOSER: On the series $\sum 1/p$, Amer. Math. Monthly *65* (1958), 104.

[6] A. A. BUCHŠTAB: *Teorija čisel.* Moskva 1962 (rusky).

[7] H. AUERBACH: Über die Vorzeichenverteilung in unendlichen Reihen. Studia Math. *2* (1930), 228.

[8] R. G. COOKE: *Infinite matrices and sequence spaces* (ruský preklad). Moskva 1960.

[9] J. P. TULL, D. REARICK: A convergence criterion for positive series. Amer. Math. Monthly *71* (1964), 294.

[10] Problem E 1552. Amer. Math. Monthly *67* (1962), 1008.

[11] J. KRZYŚ: Twierdzenie Oliviera i jego uogólnienia. Prace matem. *2* (1956), 159.

[12] T. ŠALÁT: On subseries. Math. Zeitschrift *85* (1964), 209.

[13] A. O. GELFOND, JU. V. LINNIK: *Elementarnye metody v analitičeskoj teorii čisel.* Moskva 1962 (rusky).

[14] Problem 4970. Amer Math. Monthly *69* (1962), 813.

[15] S. W. GOLOMB: *Arithmetica topologica.* Gen. Topol. and its Relat. to Mod. Anal. and Algebra. Prague 1962, 179.