Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Vladimír Kořínek

Teorie množin, její vznik a vývoj

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 10 (1965), No. 3, 131--160

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/138238`

TEORIE MNOŽIN, JEJÍ VZNIK A VÝVOJ

VLADIMÍR KOŘÍNEK, Praha

Tento článek vznikl z přednášek, které jsem měl začátkem července 1964 nejdříve ve Svitu a pak ve Zvolenu pro žilinskou a zvolenskou pobočku Jednoty československých matematiků. Byly určeny především učitelům středních škol. Jejich cílem bylo seznámit posluchače se vznikem, vývojem a základními fakty této teorie, která pronikla celou matematikou a dnes tvoří základy všech matematických disciplín, takže ve světovém měřítku se cítí nutnost postavit již na střední škole vyučování matematice na množinový základ. Abych čelil námitkám těch, kteří teorii množin nepřejí, upozorňuji zde hned na to, že jen velmi malá část toho, o čem jedná tento článek, přichází v úvahu jako vyučovací látka střední školy. Chtěl jsem napsat informativní článek o abstraktní teorii množin pro učitele matematiky na ZDŠ a SVVŠ, kteří ovšem by měli být seznámeni s teorií množin daleko šíře. Článek vznikl z přednášek a to určilo jeho ráz. Obsahuje zřídka důkazy, a to jen jednoduché, jako ilustrace pro vykládanou látku. Rovněž teorii množin líčí spíše geneticky než systematicky.

Když roku 1872 německý matematik Georg CANTOR (1845—1918) uveřejnil své první pojednání o teorii množin[1]), netušil jistě žádný tehdejší matematik, že tím začíná velký převrat v základních pojetích matematiky, v jejím obsahu i v jejích metodách, který po úporných bojích dá matematice následujícího, dvacátého století silně změněnou tvářnost. Nikdo tehdy nemohl vědět, že tato nová teorie bude vlastním základem toho, aby se teorie reálných funkcí mohla rozvinout v obsáhlou matematickou disciplínu, a dá vznik úplně novým odvětvím matematiky, jako je topologie a funkcionální analýza. Funkcionální analýza, která se vyvinula teprve po 1. světové válce na základě teorie integrace z jedné strany a z topologie ze strany druhé, nabyla záhy ústředního postavení mezi ostatními disciplínami matematické analýzy. Rovněž algebra, která na konci 19. století z vlastních vnitřních příčin nastoupila na nové cesty, nebyla by nikdy na těchto cestách dosáhla dnešního rozvoje a významu bez teorie množin. Mimo to a nad to přinutila teorie množin matematiky obrátit znovu svou pozornost k základům této vědy, k podstatě jejích hlavních pojmů. Tak vzniklo ruku v ruce s rozvojem matematické logiky pověstné „Grundlagenforschung", které proniklo hluboko k samým základům logického a matematického myšlení, které vyjasnilo řadu otázek a objevilo stejný počet nových problémů, o nichž matematici 19. století neměli zdání.

---

[1]) Životopis Cantorův napsal A. FRAENKEL [9] a [5]. Viz též nekrolog Cantorův od A. SCHOENFLIESE [15] a od téhož autora některé dokumenty a poznámky k jednomu z nejdůležitějších období Cantorova života [16]. Sebrané spisy Cantorovy vydal ZERMELO [5], kde je též hodně dokumentů ke Cantorově tvorbě a životu. Seznam Cantorových prací najde čtenář v [15], [9] a pak ovšem v [5]. Pěkné vylíčení teorie množin z pera E. KAMKE, ovšem podle stavu těsně před druhou světovou válkou a tedy ještě před vyjitím objevné práce GÖDELOVY [10], najde čtenář v článku ve 2. vyd. Encyklopedie [11]. Tam jsou též obsáhlé literární údaje.

Než počneme naše výklady, musíme si ujasnit, co to množina jest. Je to základní pojem celé teorie, jako na příklad pojmy bod, přímka, rovina jsou základními pojmy eukleidovské geometrie. Takové základní pojmy nelze definovat, lze jen sestavit základní vlastnosti, které takové pojmy mají, do vhodné soustavy axiomů. Ovšem nejdříve musila být teorie množin ve svých hlavních rysech vybudována, než bylo možno vytvořit vhodnou soustavu axiomů. Byl to z hlediska přítomného okamžiku až poslední stupeň jejího vývoje. Sám Georg Cantor položil za základ svých úvah intuitivní ponětí množiny, které můžeme formulovat asi takto (viz [5] str. 282):

Množinou rozumíme sloučení v jedno nějakých objektů, které jsou dobře rozlišitelné naší intuicí nebo naší myslí.

Je jisté, že intuitivní Cantorova definice množiny stačí pro velkou část teorie množin tak, jak je používána jinými matematickými disciplinami kromě matematické logiky. Ovšem bezvadné logické vybudování teorie množin bylo provedeno až její axiomatizací, jak se o tom zmíním na konci tohoto článku. Proto nejdříve úplně postačí, výjdeme-li z této intuitivní definice množiny. Začnu tím, že zde stručně uvedu základní pojmy teorie množin a značení, kterého budu užívat.

1

Množina je tedy soubor jistých objektů, které jsou dobře rozlišitelné. Tyto objekty, na jejichž povaze naprosto nezáleží, nazýváme *prvky množiny*. Okolnost, že objekt a je prvkem množiny A, značíme

(1) $$a \in A\,.$$

Není-li a prvkem množiny A, píšeme

(2) $$a \notin A\,.$$

Je důležité zavést si i množinu, která nemá vůbec prvky, tj. *množinu prázdnou*, kterou značíme $\emptyset$. Jeden z důvodů, proč tak činíme, je tento: Množiny jsou obyčejně definovány jistými vlastnostmi matematických objektů, které množiny tvoří. Tyto vlastnosti jsou dány v rámci nějaké matematické teorie a často napřed nevíme, zda ve vyšetřované teorii existují objekty těchto vlastností. Je účelné mluvit o množině těchto objektů ještě dříve, než vyšetříme, zda existují či neexistují. V druhém případě je pak množina oněch objektů prázdná. To však se stává i v obyčejném životě. V nějakém shromáždění můžeme mluvit o množině účastníků tohoto shromáždění, jejichž příjmení obsahují 20 písmen. Je velmi pravděpodobné, že to bude množina prázdná, ale nemusí tak být. Napřed to nevíme.

Máme-li množinu A, pak každá část jejích prvků je rovněž množinou. Jsou-li tedy všechny prvky množiny B zároveň prvky množiny A, píšeme tento vztah mezi množinami

(3) $$B \subseteq A$$

a nazýváme jej inkluzí. Inkluze $\subseteqq$ mezi dvěma množinami B, A je vlastně definována implikací[2])

$$(4) \qquad a \in B \ \Rightarrow \ a \in A\,.$$

Důležitá je množina všech částí dané množiny A, kterou budeme označovat $\mathscr{P}(A)$. Nesmí nás zarazit, že prvky této množiny jsou opět množiny. Do této množiny patří mimo jiné množina A sama a všechny jednoprvkové množiny $\{a\}$, kdež $a \in A$.

Máme-li již dány nějaké množiny A a B, můžeme z nich tvořit množiny jiné sjednocením a průnikem. *Sjednocení* dvou množin

$$(5) \qquad A \cup B$$

je množina, která obsahuje právě všechny prvky, které leží buď v A, nebo v B. *Průnik*

$$(6) \qquad A \cap B$$

je množina všech prvků společných množinám A a B. Tyto dvě definice lze zapsat též pomocí logických symbolů takto

$$(7) \qquad c \in A \cup B \ \Leftrightarrow \ c \in A \ \mathsf{VEL} \ c \in B\,,$$

$$(8) \qquad c \in A \cap B \ \Leftrightarrow \ c \in A \ \mathsf{ET} \ c \in B\,.$$

Průnik může být i prázdný, nemají-li množiny A a B společných prvků. Pak takovým množinám říkáme *disjunktní.* A to je druhý důvod, proč je třeba zavést množinu prázdnou. Jinak by totiž nebylo možno tvořit neomezeně průniky. Sjednocení a průnik je tím definován matematickou indukcí pro libovolnou konečnou soustavu množin. Sjednocení i průnik se dá ovšem utvořit stejným způsobem i pro nekonečnou soustavu množin S. Pak píšeme

$$(9) \qquad \bigcup_{A \in S} A \quad \text{a} \quad \bigcap_{A \in S} A\,.$$

První symbol značí množinu všech prvků, z nichž každý leží aspoň v jedné množině A soustavy (množiny množin) S a druhý množinu všech prvků, z nichž každý leží ve všech množinách A soustavy S.

Mějme danou množinu M a utvořme si množinu všech části M : $\mathscr{P}(M)$. Je jasno, že části množiny M můžeme libovolně sjednocovat a tvořit jejich průniky a vždy dostáváme množiny z $\mathscr{P}(M)$. V $\mathscr{P}(M)$ můžeme však zavést ještě jednu operaci:

[2]) Jsou-li V_1 a V_2 dva výroky, pak implikace $V_1 \Rightarrow V_2$ značí, že z V_1 plyne V_2, tj. že nemůže nastat případ, aby V_1 bylo pravdivé a V_2 nepravdivé. $V_1 \Leftrightarrow V_2$ značí logickou ekvivalenci, tj. případ, kdy oba výroky V_1 a V_2 jsou současně buď pravdivé, nebo nepravdivé. Logickou konjunkci dvou výroků V_1 a V_2 budu v tomto pojednání značit $V_1 \ \mathsf{ET} \ V_2$. Znamená to, že oba výroky jsou pravdivé. Podobně logickou alternativu budu značit $V_1 \ \mathsf{VEL} \ V_2$. Znamená to, že alespoň jeden z výroků V_1 a V_2 je pravdivý.

tvoření *komplementu* A' k dané části $A \in \mathscr{P}(M)$. Je to množina všech prvků z M, které neleží v A:

$$a \in A' \Rightarrow a \in M \text{ ET } a \notin A . \tag{10}$$

Platí zřejmě

$$A \cup A' = M, \quad A \cap A' = \emptyset .$$

Přicházím nyní k jednomu z nejdůležitějších pojmů teorie množin, k pojmu zobrazení. Jsou-li dány dvě množiny A a B, pak *zobrazení množiny A do množiny B*

$$A \to B$$

je každý předpis φ, který přiřaďuje prvku $a \in A$ jednoznačně nějaký prvek $b \in B$. Píšeme

$$a\varphi = b .$$

b se nazývá *obraz* prvku a, a je *vzorem* prvku b v zobrazení φ. Je-li zobrazení takové, že každý prvek z B je obrazem nějakého prvku z A, mluvíme o *zobrazení množiny A na množinu B*. Je to speciální případ *zobrazení množiny A do B*. V zobrazení může více prvků z A být zobrazeno na týž prvek $b \in B$, tj. b může mít v daném zobrazení φ více vzorů. Má-li každý obraz b z B jen jeden vzor, říkáme takovému zobrazení *zobrazení prosté*. Je to tedy, stručně řečeno, zobrazení vzájemně jednoznačné. Je-li φ prosté zobrazení množiny A na množinu B, pak existuje i prosté zobrazení množiny B na množinu A, které je k φ *inverzní* a které budeme značit φ^{-1}. Dostaneme je, když ve φ zaměníme vzor a obraz, což lze učinit, neboť každý obraz má jen jeden vzor a všechny obrazy v zobrazení φ dávají celou množinu B.

Mějme zobrazení φ množiny A do B a zobrazení ψ množiny B do C. Pak tato zobrazení můžeme složit a dostaneme tak zobrazení množiny A do C. Toto zobrazení označíme $\varphi\psi$ a vytvoříme je takto: Je-li pro $a \in A$ $a\varphi = b \in B$ a $b\psi = c \in C$, pak

$$a\varphi\psi = c .$$

V tomto případě mluvíme též *o součinu zobrazení*. Takto můžeme tvořit i součin konečného počtu zobrazení $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ vždy, když splňují tuto podmínku: Je-li φ_i zobrazení množiny A_i do A_{i+1}, $i = 1, 2, \dots, n - 1$, pak musí φ_{i+1} být zobrazení množiny A_{i+1} do nějaké další množiny A_{i+2}. Takto tvořený součin zobrazení

$$\varphi_1\varphi_2 \cdots \varphi_n$$

je zřejmě asociativní. Dále se lehko ukáže: Jsou-li všechna φ_i, $i = 1, 2, \dots, n$ prostá nebo zobrazení na příslušné množiny A_{i+1}, pak je jejich součin opět zobrazení prosté, popřípadě zobrazení na množinu.

Nejčastěji se vyskytující zobrazení jsou reálné funkce. Jsou to zobrazení množiny reálných čísel R do sebe samy, neboť reálná funkce — na příklad definovaná na celém intervalu $(-\infty, +\infty)$ — přiřaďuje každému reálnému číslu nějaké reálné číslo jako funkční hodnotu v tomto bodě. V teorii množin se obyčejně mluví o *funkci definované na množině* A, když se jedná o zobrazení množiny A do množiny reálných čísel R.

V teorii množin často vyšetřujeme množinu všech zobrazení množiny A do množiny B pro dané množiny A, B. Pro množinu všech těchto zobrazení zavedl K. KURATOWSKI značení

$$B^A , \tag{11}$$

které se ukáže v dalším velmi sugestivní. Označíme-li přitom vždy konečnou množinu přirozeným číslem, které udává počet jejích prvků, pak na příklad množina

$$2^A \tag{12}$$

je množina všech zobrazení množiny A do dvouprvkové množiny $\{0, 1\}$. Každé takové zobrazení je tedy funkce definovaná na A, která nabývá jen dvě hodnoty: 0, 1. Je zřejmé, že každá taková funkce je úplně určena, jsou-li určeny ty prvky z A, pro něž má funkce hodnotu 1. Ty tvoří jistou část množiny A. Naopak, máme-li libovolnou část $B \subseteqq A$, pak můžeme si utvořit *charakteristickou funkci* této části, tj. funkci, která nabývá na B hodnotu 1 a na komplementu B' k B v A hodnotu 0. Jsou tedy prvky množiny (12) vzájemně jednoznačně přiřaděny prvkům množiny $\mathscr{P}(A)$ všech částí A.

Je třeba se zmínit ještě o jednom způsobu, kterým tvoříme z daných množin množiny další. Je to *kartézský součin*. Mějme dáno n množin $A_1, A_2, \ldots, A_n$, pak jejich kartézský součin

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \tag{13}$$

je množina všech n-tic $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, kdež a_i je libovolný prvek z A_i. Kartézský součin je úkon na první pohled asociativní. Ztotožníme-li součin (13) se součiny

$$A_{i_1} \times A_{i_2} \times \ldots \times A_{i_n} , \tag{14}$$

kdež $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ je nějaké pořadí čísel $(1, 2, \ldots, n)$, což, jak si ukážeme, můžeme učinit, pak je kartézský součin i komutativní. Platí-li v (13)

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A ,$$

pak mluvíme *o kartézské mocnině* a píšeme

$$A^n .$$

Kartézský se nazývá tento součin proto, že se poprvé vyskytuje u francouzského matematika René DESCARTESA (1596—1650), který jej užil, aniž si ovšem uvědomil, že zavádí nový pojem. Obvyklé souřadnice roviny, které Descartes při zakládání analytické geometrie zavedl, nejsou totiž nic jiného než kartézský součin $R \times R = R^2$. (R je množina reálných čísel). Kartézský součin možno zavést ještě jiným způsobem pro libovolnou i nekonečnou soustavu množin:

$$(15) \qquad A_\lambda, \qquad \lambda \in \Lambda,$$

kdež λ probíhá jistou indexovou množinu Λ. Tento způsob je obecnější než způsob používající n-tice. Kartézský součin

$$(16) \qquad \prod_{\lambda \in \Lambda}^{\times} A_\lambda$$

je množina všech zobrazení φ indexové množiny Λ z (15) do sjednocení

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda ,$$

která splňují podmínku, že vždy obraz indexu λ leží v A_λ:

$$\lambda\varphi \in A_\lambda, \qquad \lambda \in \Lambda .$$

Je ihned vidět, že pro konečný počet množin dává to n-tice již se ztotožněním n-tic z (13) s n-ticemi ze (14). S touto druhou definicí lze při důkazech lépe pracovat. Zákon komutativní je zde zřejmý.

Konečně si musíme vyložit některé věci o binárních relacích. Mějme dány dvě množiny A, B. *Binární relace* ϱ mezi prvky množiny A a množiny B je dána nějakou částí D kartézského součinu $A \times B$. Je-li $(a, b) \in D$, $a \in A$, $b \in B$, píšeme

$$a\varrho b$$

a říkáme: b je v relaci ϱ s prvkem a. Je-li $(a, b) \notin D$, píšeme

$$a\bar{\varrho}b$$

a říkáme: b není v relaci ϱ s a. Nejjednoduším případem binární relace je zobrazení množiny A do B. Pak platí

$$a\varrho b$$

právě tehdy, když b je obrazem a. Pojem relace je ovšem obecnější a odpovídá tomu, co se v geometrii nazývá korespondence.

Všimněme si ještě případu $A = B$, tj. binární relace definované na A (přesně vlastně na A^2). Zde nutno vytyčit dva druhy binárních relací. První z nich je *ekvivalence*, která má všechny podstatné vlastnosti rovnosti.

Binární relace ϱ na A je ekvivalencí, platí-li pro ni:

a) **Zákon reflexní**: $a\varrho a$ pro každé $a \in A$.

b) **Zákon symetrický**: $a\varrho b \Rightarrow b\varrho a$.

c) **Zákon tranzitivní**: $a\varrho b$ ET $b\varrho c \Rightarrow a\varrho c$.

Všechny ekvivalence na dané množině A jsou dány právě všemi rozklady množiny A na disjunktní části. Máme-li dán nějaký takový rozklad, pak platí $a\varrho b$, leží-li prvky

a, b v téže části rozkladu a $a\bar{\varrho}b$, leží-li v různých částech rozkladu. Jednotlivé části nazýváme třídy ekvivalence [3]).

Druhý druh binárních relací, který nás bude zajímat, se nazývá *úplné uspořádání*. Místo ϱ budeme tuto relaci značit $<$. Relace úplného uspořádání na množině A je definována těmito vlastnostmi:

a) **Trichotomie:** Pro každou dvojici $(a, b) \in A^2$ platí právě jeden z těchto vztahů:

$$a < b, \quad a = b, \quad b < a . \tag{17}$$

b) **Zákon tranzitivní:**

$$a < b \text{ ET } b < c \Rightarrow a < c . \tag{18}$$

Je-li na nějaké množině A zavedena binární relace $<$ o těchto vlastnostech, říkáme, že *množina A* je *úplně uspořádaná*. Příklad na úplné uspořádání je vztah „je menší" mezi reálnými čísly.

Vedle úplného uspořádání máme ještě *částečné uspořádání*, v němž vlastnost a) je nahrazena touto vlastností:

a') Pro každou dvojici $(a, b) \in A^2$ platí nejvýše jeden ze vztahů (17). Příklad takové relace je ostrá inkluze v $\mathscr{P}(M)$, tj. mezi částmi množiny M[4]).

Je-li nějaká množina úplně uspořádaná relací $<$, pak se z této relace odvozuje relace jiná: $\leqq$. $a \leqq b$ značí, že platí buď $a < b$, nebo $a = b$, tj. že neplatí (při úplném uspořádání) $b < a$. Obráceně, nechť je na množině A zavedena binární relace $a \leqq b$ o těchto vlastnostech:

a_1) Pro každou dvojici $(a, b) \in A^2$ platí aspoň jeden ze vztahů

$$a \leqq b, \quad b \leqq a .$$

a_2) Platí-li oba dva tyto vztahy, pak $a = b$.

b) Platí zákon tranzitivní (18).

Pak dostaneme odtud relaci $<$ o vlastnostech a), b), definujeme-li: $a < b$ značí $a \leqq b$, $a \neq b$. Pro rozlišení $<$ od $\leqq$ nazývá se $<$ *ostrá relace uspořádání* (*ostrá nerovnost*). Pro naše pozdější výklady je výhodnější pracovat s ostrou relací uspořádání.

---

[3]) Podrobněji viz o tom [13] str. 19.

[4]) Pojem úplného uspořádání množiny je starší než pojem částečného uspořádání. Proto původně se říkalo a dodnes se ještě často říká místo úplné uspořádání prostě jen uspořádání. Bourbakisté zavedli však označení právě opačné. Místo částečného uspořádání říkají jen uspořádání (un ensemble ordonné) a jeho speciální případ, úplné uspořádání, rozlišují adjektivem, po případě příslovcem (un ensemble strictement ordonné). Tento způsob označování v dnešní době převládl. V moderní matematice se vyskytuje totiž (částečné) uspořádání daleko častěji než úplné uspořádání. My budeme pracovat především s úplným uspořádáním.

2

Když jsme si ve stručnosti takto zopakovali technický aparát teorie množin, můžeme přistoupit k vylíčení vlastních objevů Georga Cantora. Mají-li se tyto objevy stručně celkově charakterizovat, obvykle se říká, že Cantor získal nesporně domovské právo v matematice pro aktuální nekonečno. *Potenciálním nekonečnem* se nazývá obyčejně předpoklad, který je základem celé matematické analýzy, totiž, že je možno každou veličinu zvětšit nebo zmenšit. *Aktuálním nekonečnem* rozumíme tu okolnost, že vyšetřujeme množiny obsahující nekonečný počet objektů, o kterých předpokládáme, že existují současně aspoň v mysli matematikově.

Vysvětlíme si to na příkladech. Je-li $f(x)$ reálná funkce, pak

$$\lim_{x \to a} f(x) = c$$

znamená toto: k libovolnému kladnému ε existuje kladné δ takové, že platí

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon .$$

Zde nevyšetřujeme žádné nekonečné množiny. Volíme jen libovolné kladné ε, o němž předpokládáme, že je můžeme volit tak malé, jak chceme, že je můžeme libovolně zmenšovat. Skoro celá analýza do doby Cantorovy vystačila s tímto potenciálním nekonečnem. A mnohdy se popírala oprávněnost zavádět do matematiky aktuální nekonečno. Příklad na aktuální nekonečno je Dedekindova teorie reálných čísel. Zde musíme mít najednou dánu množinu racionálních čísel a tuto množinu dělit nekonečně mnoha způsoby ve dvě části, horní a dolní skupinu řezu. Aktuální nekonečno nacházíme již u Bernarda BOLZANA (1781—1848), je však zahaleno do nikoli zrovna jasných filozofických úvah.

Cantorova vyšetřování množin brala se dvěma hlavními směry. Předně Cantor vyšetřoval množiny jako takové, tj. vyšetřoval ty vlastnosti množin, které jsou důsledkem základní relace teorie množin (1) „býti prvkem množiny". Tak položil základy *abstraktní teorii množin*. Druhý směr spočíval v tom, že mezi prvky množiny zavedl ještě další vztahy, které definoval analogicky ke vztahům, které platí v množině reálných nebo komplexních čísel. Je to především pojem vzdálenosti dvou bodů nebo obecněji pojem okolí bodů. Přesně řečeno Cantor při studiu trigonometrických řad byl veden k vyšetřování množin reálných čísel, tj. množin bodů na reálné ose. Tak vznikla *teorie bodových množin*. Geniální duch Cantorův rozpoznal záhy, že při bodových množinách se vyskytují obecné zákonitosti, které spočívají jen na relaci (1) a na jejích důsledcích. To ho vedlo k tomu, že položil základy k abstraktní teorii množin a rozvíjel obě teorie současně. V matematice se začala nejdříve uplatňovat teorie bodových množin, která vedla k obecné topologii a k funkcionální analýze. Abstraktní teorie množin získávala si uznání a uplatňovala se v matematice daleko pomaleji. Dnes však i teorie bodových množin i jiné matematické disciplíny jsou nemyslitelné bez abstraktní teorie množin, především bez transfinitní indukce.

V tomto článku budu se zabývat jen abstraktní teorií množin. Vylíčit vývoj a problémy teorie bodových množin by vyžadovalo daleko více místa a času, než mám k dispozici.

První a základní krok Cantorův spočíval právě v tom, že učinil předmětem matematického vyšetřování nekonečné množiny jako celky. Jednou z prvních otázek, kterou řešil, byla tato: Je možno nějakým způsobem určit počet prvků nekonečné množiny? A zde přinesl Cantor první překvapení. Ano, je to možno, a to velmi jednoduchým způsobem, totiž právě tím způsobem, jak to děláme při množinách konečných. Jak zjistíme, že množina židlí v nějaké místnosti je stejně početná jako množina osob v místnosti přítomných? Nejjednodušší bude, když si každá osoba sedne na jednu židli. Pak se to ihned pozná. To však je jen zvláštní způsob prostého zobrazení množiny osob na množinu židlí. Tedy dvě konečné množiny mají stejný počet prvků, existuje-li prosté zobrazení jedné množiny na druhou. Tuto definici možno však beze změny přenésti i na nekonečné množiny. Proto definujeme:

Dvě množiny A, B, ať již konečné nebo nekonečné, mají stejnou *mohutnost* – to říkáme místo stejný počet prvků, aby to při nekonečných množinách nevedlo k nedorozumění – když existuje prosté zobrazení množiny A na množinu B. Takové dvě *množiny* nazýváme pak *ekvivalentní.*

Je zřejmé, že dvě konečné množiny mají stejnou mohutnost právě tehdy, když mají stejný počet prvků. Avšak jak je tomu u nekonečných množin? Nekonečná množina, kterou si člověk pravděpodobně nejdříve vytvořil ve své mysli, je množina přirozených čísel

$$1, 2, 3, 4, \ldots \ .$$

Každou množinu, která je ekvivalentní této množině, nazýváme *spočetnou.* Je to taková množina, jejíž prvky se dají uspořádat v posloupnost. A tu si musíme všimnout jedné věci, která byla známa již před Cantorem. Zobrazení

$$n \to 2n, \qquad n \text{ přirozené číslo},$$

je prosté zobrazení přirozených čísel na přirozená čísla sudá. Nekonečná množina, na rozdíl od konečných množin, může se tedy dát prostě zobrazit na svou vlastní část (tj. část různou od množiny samé). Richard DEDEKIND (1831—1916) ukázal v [7], že je to pro nekonečné množiny charakteristické. Lze to říci i obráceně. Množina A je konečná, když neexistuje prosté zobrazení množiny A na nějakou její vlastní část. Při axiomatickém budování teorie množin právě pomocí této vlastnosti se konečné množiny definují. Větu znal rovněž již BOLZANO, nepodal však její důkaz. Jako příklad ekvivalence množin můžeme si vzít kartézské součiny (13) a (14) definované pomocí n-tic. Když přiřadíme n-tici $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ k n-tici $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$, dostaneme prosté zobrazení množiny (13) na množinu (14) a v důsledku tohoto zobrazení můžeme obě množiny ztotožnit.

Pro každou nekonečnou množinu A platí, že množina přirozených čísel N se dá vždy prostě zobrazit do A, tj. že vždy existuje část S množiny A, která je spočetná.

Nyní však stojíme před základní otázkou: Má takto definovaná mohutnost pro nekonečné množiny vůbec význam? Je jasné, že kdyby byla každá nekonečná množina spočetná, pak by definice mohutnosti nic nového nepřinesla. Zde bylo nutno nejdříve postupovat krok za krokem a zkoumat jednotlivé případy.

Lze lehko ukázat toto: Všechna racionální čísla x, pro něž platí $0 < x < 1$, tvoří spočetnou množinu. Tato množina je dále ekvivalentní množině všech racionálních čísel vůbec. Než jak je to s množinou čísel reálných R? Již roku 1873 formuluje Cantor problém ekvivalence množiny racionálních čísel s množinou čísel reálných a za několik neděl potom podává důkaz, že množina reálných čísel není ekvivalentní množině čísel racionálních, že není spočetná. Dokázal to velmi důvtipnou metodou nazvanou potom *diagonální metoda*. Mohutnost množiny reálných čísel nazval Cantor *mohutností kontinua*. Lze opět lehko ukázat, že interval $(0, 1)$ má stejnou mohutnost jako množina všech reálných čísel. Funkce

$$y = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\pi\,(2x - 1)$$

zobrazuje prostě interval $(0, 1)$ na množinu všech reálných čísel. Od počátku roku 1874 se namáhal Cantor po několik let ukázat, že v tomto smyslu má rovina více bodů než přímka. Množinově řečeno to znamená: Kartézská mocnina R^2 má jinou (větší) mohutnost než R. Jeho úsilí bylo však marné — až roku 1877 učinil velmi překvapující objev. R^2 má stejnou mohutnost jako R a dokonce i R^n (n-rozměrný prostor) je ekvivalentní s R (s přímkou)! Tím rázem vyvstal problém dimenze. Lze vůbec nějakým způsobem z hlediska teorie množin definovat dimenzi? Tento problém byl rozřešen daleko později. Důkaz ekvivalence R a R^2 uveřejnil CANTOR r. 1878 v Journalu für reine und angewandte Mathematik ([5] str. 119). Toto pojednání obsahovalo ještě pojem ekvivalence, pojem mohutnosti a hypotézu kontinua, o níž bude později řeč. Uveřejnění tohoto pojednání setkalo se v Crelleově Journalu již s obtížemi, které nebyly způsobeny jen paradoxností výsledku o ekvivalenci prostorů různých dimenzí. Bylo to poslední pojednání, které Cantor v Journalu für reine u. angewandte Mathematik uveřejnil.

Než obraťme svou pozornost opět ke Cantorovým výzkumům v abstraktní teorii množin. Všimněme si nejdříve, že relace „být ekvivalentní“ mezi dvěma množinami je skutečně ekvivalencí, tj. je to relace reflexivní, symetrická a tranzitivní. Všechny množiny se rozpadají proto ve třídy navzájem ekvivalentních množin. A nyní učinil Cantor velmi odvážný krok. Každé takové třídě přiřadil symbol, který nazval *kardinálním číslem* a který reprezentuje celou třídu ekvivalentních množin. Pro konečné množiny bereme za tato čísla právě počet prvků množiny, tedy přirozená čísla. Při nekonečných množinách máme spočetné množiny, množiny mohutnosti kontinua a brzy si ukážeme, že takových mohutností je nekonečně mnoho. Tedy i nekonečných kardinálních čísel je nekonečně mnoho.

Odvážnost tohoto kroku spočívala především v tom, že zavedl početní úkony s těmito čísly. *Sčítání dvou kardinálních čísel* μ, ν definujeme takto: Vezmeme si dvě množiny A, B příslušných mohutností, které jsou disjunktní: $A \cap B = \emptyset$, což je vždy možno. Kardinální číslo $\mu + \nu$ definujeme nyní jako kardinální číslo příslušející množině $A \cup B$. To lze ovšem provést pro libovolnou množinu μ_λ, $\lambda \in \Lambda$ kardinálních čísel. Ke každému μ_λ vezmeme si množinu A_λ příslušné mohutnosti tak, aby $A_{\lambda_1} \cap \cap A_{\lambda_2} = \emptyset$ pro $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Pak $\sum_{\lambda \in \Lambda} \mu_\lambda$ je mohutnost množiny $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. Definujeme-li *součin dvou kardinálních* čísel μ, ν, stačí si vzít dvě libovolné množiny A, B příslušných mohutností. Součin $\mu\nu$ je pak kardinální číslo příslušné množině

$$A \times B .$$

Máme-li opět nekonečnou množinu kardinálních čísel μ_λ, $\lambda \in \Lambda$, pak jejich součin

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} \mu_\lambda$$

je mohutnost příslušná ke kartézskému součinu (16), kdež A_λ je množina mohutnosti μ_λ. Sčítání a násobení kardinálních čísel je komutativní a asociativní. A protože zřejmě platí

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) ,$$

platí i zákon distributivní pro kardinální čísla

$$\lambda(\mu + \nu) = \lambda\mu + \lambda\nu .$$

Konečně můžeme si zavést i mocniny kardinálních čísel. Pro přirozené číslo n označuje ν^n mohutnost kartézské mocniny A^n, kdež A je množina mohutnosti ν. Mějme libovolná dvě kardinální čísla μ, ν, Buďtež A, B dvě množiny o mohutnostech μ a ν. Vezměme si tolik exemplářů množiny B, kolik prvků má množina A. Tyto exempláře si pro rozlišení oindexujeme prvky množiny A : B_a, $a \in A$. Utvořme si kartézský součin

$$\prod_{a \in A}^{\times} B_a$$

a jeho mohutnost definujeme jako kardinální číslo ν^μ. Z druhé definice kartézského součinu (16) plyne lehko, že je to právě mohutnost množiny (11) B^A. Všechny tyto početní úkony použity na konečná kardinální čísla dávají právě obvyklé početní úkony s přirozenými čísly.

Uveďme ještě, že mohutnost kontinua κ dá se vyjádřit jakožto mocnina kardinálních čísel 2 a σ, značí-li σ spočetnou mohutnost. Platí

$$\kappa = 2^\sigma . \tag{19}$$

Je-li totiž C množina všech reálných čísel z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, o níž již víme, že má mohutnost κ, dá se lehko ukázat, vyjádříme-li si každé takové reálné číslo jakožto dyadický zlomek, tj. posloupnost nul a jedniček, že C je ekvivalentní množině všech zobrazení nekonečné posloupnosti na dvouprvkovou množinu $\{0, 1\}$[5]).

[5]) Přitom ovšem nutno ukázat, že nevadí ta okolnost, že číslo s periodou 1 např. 0, a_1, a_2, ..., a_{k-1}, 0, 1, 1, ... je rovno číslu 0, $a_1 a_2$, ..., a_{k-1} 1, 0, 0, ... s periodou 0.

Další krok Cantorův spočíval v tom, že se pokusil uspořádat kardinální čísla podle velikosti. Pro dvě konečná kardinální čísla m a n, jež označují počet prvků množiny $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ a množiny $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, platí $m < n$ právě tehdy, když množina M se dá prostě zobrazit do N a množina N se nedá prostě zobrazit do M. Nabízí se tedy pro libovolná kardinální čísla μ, ν a pro dvě množiny A, B o příslušných mohutnostech tento postup: Budeme říkat, že platí

$$\mu < \nu ,$$

když množina A se dá prostě zobrazit do B, avšak množina B se nedá prostě zobrazit do A. Nutno vyšetřit, zda takto definovaná relace mezi kardinálními čísly má ony dvě vlastnosti úplného uspořádání: a) trichotomii (17), b) tranzitivnost (18).

Pro tranzitivnost (18) je to lehké. Mějme tři kardinální čísla λ, μ, ν a tři množiny A, B, C o příslušných mohutnostech. Nechť platí $\lambda < \mu$, $\mu < \nu$. To značí: Existuje prosté zobrazení φ_1 A do B a prosté zobrazení φ_2 B do C a neexistují prostá zobrazení B do A a C do B. Pak zřejmě $\varphi_1\varphi_2$ je prosté zobrazení A do C. Kdyby existovalo prosté zobrazení ψ C do A, pak $\psi\varphi_1$ by bylo prosté zobrazení C do B, což je spor s předpokladem. Tedy platí $\lambda < \nu$.

S trichotomií (17) je to však těžší. Z logického hlediska mohou nastat pro dvě množiny A, B celkem 4 případy, které se navzájem vylučují:

I. A **se dá** prostě zobrazit do B, B **se dá** prostě zobrazit do A.

II. A **se dá** prostě zobrazit do B, B **se nedá** prostě zobrazit do A.

III. A **se nedá** prostě zobrazit do B, B **se dá** prostě zobrazit do A.

IV. A **se nedá** prostě zobrazit do B, B **se nedá** prostě zobrazit do A.

V případě II a III platí pro příslušná kardinální čísla podle definice

II $\quad \mu < \nu, \quad$ III $\quad \nu < \mu .$

Aby platil právě jeden ze vztahů

$$\mu < \nu, \qquad \mu = \nu, \qquad \nu < \mu ,$$

nutno ukázat, že v případě I vždy platí $\mu = \nu$ a že případ IV nemůže nastat. Cantor považoval první věc nejdříve za samozřejmou, později však přišel na to, že je třeba ji dokázat. Teprve roku 1897 dokázal Felix Bernstein příslušnou větu, které se dnes říká věta Cantor-Bernsteinova. Bernsteinův důkaz uveřejnil poprvé Emile Borel ve své knize [3].

Věta Cantor-Bernsteinova. *Dá-li se množina A prostě zobrazit do množiny B a množina B prostě zobrazit do množiny A, pak existuje prosté zobrazení množiny A na množinu B.* Tedy skutečně platí v I. případě vždy $\mu = \nu$.

Případ IV byl daleko tvrdší oříšek. Ukázalo se, že bez dalšího předpokladu nelze dokázat, že případ IV nemůže nastat. Na čem věc spočívá, to věděl již Cantor. Teprve však německý matematik Ernst Zermelo podal roku 1904 [19] přesné formulace a důkazy. Tím se budu zabývat až v další kapitole.

Zde uvedu ještě jeden důležitý vztah, který odtud vyplývá. Mějme množinu A, jejíž mohutnost je dána kardinálním číslem μ. Množina (12) 2^A všech zobrazení množiny A do dvouprvkové množiny $\{0, 1\}$ má vždy větší mohutnost než A, tj. pro každé kardinální číslo platí

$$\mu < 2^\mu \,. \tag{20}$$

Důkaz je velmi snadný. Nejdříve každému prvku $a \in A$ přiřadíme toto zobrazení z 2^A: Prvek a nechť je zobrazen na 1 a každý jiný prvek na 0. Tím jsme prostě zobrazili množinu A do 2^A. Že 2^A se nedá prostě zobrazit do A, dokážeme sporem. Předpokládejme, že takové zobrazení existuje. Pak lze všechna zobrazení φ z 2^A oindexovat právě těmi prvky z A, jimž jsou přiřazena:

$$\varphi_a \to a \,.$$

Sestrojme si zobrazení $\varphi \in 2^A$ takto:

$$a\varphi \neq a\varphi_a \,,$$

tj. když φ_a přiřaďuje prvku a 0, pak $a\varphi = 1$, v opačném případě $a\varphi = 0$. Zobrazení φ je různé od každého zobrazení φ_a, neboť obrazy prvku a v obou zobrazeních φ_a a φ jsou od sebe různé. Tedy φ se liší od všech zobrazení φ_a, což je proti předpokladu, že všechna zobrazení lze oindexovat prvky z A. Je to jen nepatrně pozměněná diagonální metoda, kterou Cantor dokázal, že množina reálných čísel má větší mohutnost než spočetnou. V úvaze provedené za vzorcem (12) jsme si ukázali, že množina 2^A a množina $\mathscr{P}(A)$ všech částí množiny A mají stejnou mohutnost. Tedy i $\mathscr{P}(A)$ má větší mohutnost než A. Protože ke každé množině můžeme sestrojit množiny $\mathscr{P}(A)$ i 2^A, je i nekonečných kardinálních čísel nekonečně mnoho. Kardinální číslo patřící k spočetným množinám je z nich nejmenší, neboť dříve jsme již řekli, že každá nekonečná množina má část, která je spočetná.

3

Při dalším budování teorie množin poznal Cantor velmi dobře, že je třeba podrobněji vyšetřovat úplné uspořádání v množinách. To bylo předmětem Cantorova bádání přibližně v devadesátých letech 19. století. Protože v dalším půjde vždy o úplné uspořádání, budu pro jednoduchost říkat prostě uspořádání.

Vezměme si jako příklad tyto dvě posloupnosti

$$1, 2, 3, 4, \dots$$

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \dots \,.$$

Uspořádání na těchto dvou množinách definujeme tím, že ze dvou čísel prohlásíme za „menší“ to, které v příslušné posloupnosti předchází číslo druhé. Tím ovšem dostaneme pro druhou posloupnost jiné uspořádání, než je obyčejné uspořádání čísel podle velikosti. Jiný příklad je tento: Vezměme si racionální čísla x splňující nerovnost $0 < x < 1$, tj. racionální čísla z intervalu $(0, 1)$ a uspořádejme je podle velikosti. Toto uspořádání je na první pohled různé od uspořádání posloupnosti přirozených čísel, je však stejné s uspořádáním všech racionálních čísel podle velikosti z intervalu $(1, 2)$, jak plyne ihned ze zobrazení

$$0 < x < 1, \quad x \rightarrow x + 1, \quad 1 < x + 1 < 2.$$

My však víme, že množina všech racionálních čísel z intervalu $(0, 1)$ je spočetná. Proto všechna racionální čísla z intervalu $(0, 1)$ lze seřadit v posloupnost. Tím je dáno jiné uspořádání této množiny, prohlásíme-li za „menší" ze dvou čísel to, které v posloupnosti předchází. Toto druhé uspořádání je stejné jako uspořádání posloupnosti přirozených čísel podle velikosti. Tyto skutečnosti je třeba nyní matematicky zachytit.

Mějme dvě uspořádané množiny A a B a nechť existuje prosté zobrazení množiny A na B takové, že platí

$$a_1, a_2 \in A \text{ ET } a_1 < a_2 \Rightarrow a_1\varphi < a_2\varphi . \tag{21}$$

Protože pro uspořádání platí trichotomie, plyne již pro inverzní zobrazení φ^{-1} vztah

$$b_1, b_2 \in B \text{ ET } b_1 < b_2 \Rightarrow b_1\varphi^{-1} < b_2\varphi^{-1} . \tag{22}$$

Takové zobrazení nazýváme *podobným zobrazením* a o množinách A a B říkáme, že jsou *podobně uspořádané*. Stručně, ale ne zcela přesně, můžeme říci, že podobné zobrazení zachovává uspořádání. Dvě podobně uspořádané množiny musí nutně mít stejnou mohutnost.

Je zřejmé, že vztah mezi uspořádanými množinami „být podobně uspořádána" je vztah reflexivní, symetrický a tranzitivní, tedy ekvivalence. Lze proto všechny podobně uspořádané množiny sloučit ve třídy podobně uspořádaných množin. Mluvíme pak *o typu uspořádání* nebo *o pořádkovém typu* jednotlivých těchto tříd. Pořádkový typ je tedy symbol, který charakterizuje „stejné" uspořádání množin z jedné třídy podobně uspořádaných množin. Poznali jsme dosud dva takové typy. Jedním z nich je uspořádání přirozených čísle podle velikosti. Tento typ označujeme ω. Druhý typ, který jsme měli, bylo uspořádání racionálních čísel z intervalu $(0, 1)$ podle velikosti. Oba typy jsou různé typy, jak plyne z toho, že první uspořádání má nejmenší prvek 1, kdežto druhé uspořádání nejmenší prvek nemá.

Kardinální čísla jsme si utvořili jako symboly jednotlivých tříd ekvivalentních množin. Podobně pořádkové typy jsou symboly jednotlivých tříd podobně uspořádaných množin. Je zde však jeden podstatný rozdíl. Kardinální číslo je dáno množinou samou, její mohutností. Pořádkový typ není dán jen množinou samou, nýbrž množinou a jejím uspořádáním. Tatáž množina může mít různé pořádkové typy, patřit do různých pořádkových tříd podle toho, jak je uspořádána. Příkladem na to je množina racionálních čísel z intervalu $(0, 1)$, jak o tom byla výše řeč. Na druhé straně budiž A uspořádaná množina. Tato množina má tedy jistý pořádkový typ. Pak každou množinu B, která má stejnou mohutnost jako množina A, lze uspořádat do stejného pořádkového typu. Existuje totiž prosté zobrazení φ množiny A na množinu B. A právě inverzního zobrazení φ^{-1} použijeme k definici vztahu $<$ na B. $b_1 < b_2$ bude nám značit, že platí na A $b_1\varphi^{-1} < b_2\varphi^{-1}$. Z (21) a (22) ihned plyne, že zobrazení φ se stane tímto ustanovením podobným zobrazením množiny A na množinu B.

Pořádkový typ ω množiny přirozených čísel má jednu důležitou vlastnost. Každá neprázdná část množiny přirozených čísel obsahuje, jak známo, nejmenší prvek. To není vlastností každého pořádkového typu. Na příklad otevřený interval $(0, 1)$, v němž jsou čísla uspořádaná podle velikosti, tuto vlastnost nemá, neboť ji nemá již celá množina $(0, 1)$ sama. Na druhé straně to není vlastnost jen pořádkového typu ω. Mějme množinu prvků

$$(23) \qquad a_{ij}, \qquad i = 1, 2, 3 \ldots, j = 1, 2, 3, \ldots .$$

Na této množině definujeme uspořádání schématem

$$(24) \qquad \begin{array}{l} a_{11}, a_{12}, a_{13} \ldots \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \ldots \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

V něm nejdříve jdou prvky mající první index 1 uspořádané podle druhých indexů, pak prvky mající první index 2 opět uspořádané podle druhých indexů atd.... Přesná definice je tato:

$$\begin{array}{lll} a_{ij} < a_{kl}, & \text{když} & i < k\,, \\ a_{ij} < a_{ik}, & \text{když} & j < k\,. \end{array}$$

Každá neprázdná část této množiny má nejmenší prvek. První indexy prvků z nějaké neprázdné části této množiny tvoří množinu přirozených čísel a ta obsahuje číslo nejmenší i_0. Všechny druhé indexy prvků této části, které mají první index i_0, obsahují z téhož důvodu nejmenší prvek j_0. Pak $a_{i_0 j_0}$ je zřejmě nejmenší prvek této části. Ukážeme si ještě pro pozdější účely, že množina (23), (24) je spočetná. Uspořádáme ji do posloupnosti podle součtu indexů:

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41}, a_{15} \ldots \ .$$

Tyto úvahy vedou k této definici:

Úplně uspořádanou množinu nazveme *dobře uspořádanou*, když každá její neprázdná část má první (nejmenší) prvek.

Předně je patrno, že být dobře uspořádanou množinou je vlastnost celého pořádkového typu. Podobná zobrazení zachovávají zřejmě vlastnost být nejmenším prvkem dané části. Dále je lehko vidět, že každá neprázdná část nějaké dobře uspořádané množiny A je uspořádáním na množině A rovněž dobře uspořádána. Podotýkám zde, že v každé dobře uspořádané množině má sice libovolný prvek následovníka, nemusí mít však předchůdce, i když není prvním prvkem. V množině (23), (24) nemají předchůdce prvky $a_{11}, a_{21}, a_{31}, \ldots$. Dobře uspořádaná množina může, ale nemusí mít poslední prvek.

Položme si nyní otázku, která je pro použití dobrého uspořádání v teorii množin základní: Dá se každá množina dobře uspořádat? Je zřejmé, že odpověď je kladná pro všechny konečné množiny a pro všechny spočetné množiny. Intuitivně je jasné, že bude kladná i pro libovolnou množinu A. V A si můžeme vybrat jeden prvek a_1. V množině $A - \{a_1\}$[6]) si můžeme vybrat opět jeden prvek a_2, v množině $A - \{a_1, a_2\}$ opět jeden prvek a_3 a tak můžeme postupovat dále. Když jsme tímto způsobem vybrali posloupnost prvků

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \,, \tag{25}$$

můžeme ze zbytku vybrat prvek a_ω, potom $a_{\omega+1}$, $a_{\omega+2}$ atd.:

$$a_\omega, a_{\omega+1}, a_{\omega+2}, \ldots .$$

Tak pokračujeme dále, až celou množinu vyčerpáme. Na této úvaze byla založena

Věta o dobrém uspořádání. *Každá množina se dá dobře uspořádat.*

Neuspokojivost celé předešlé úvahy spočívá hlavně na tom, že z množiny A volíme postupně jednotlivé prvky $a_1, a_2, a_3, \ldots$ a že volba libovolného prvku závisí přirozeně na volbách všech prvků předcházejících. Bylo oprávněně namítáno, že takovéto volby nelze libovolně transfinitně pokračovat. Transfinitním pokračováním se míní všechny volby, které se konají po konstrukci posloupnosti (25).

Cantor sám užíval věty o dobrém uspořádání bez rozpaků. Neuspokojivé základy této věty způsobily, že se celá věc vyšetřovala daleko zebrubněji. Ernst ZERMELLO (1871—1953), od něhož pochází první axiomatická teorie množin, formuloval roku 1904 [19] zvláštní axiom a ukázal, že z něho plyne věta o dobrém uspořádání. (Obrácená implikace je triviální.) Tento axiom ve velmi silné formě dá se vyslovit takto:

Axiom výběru. *Mějme nějakou soustavu množin* (15) A_λ, $\lambda \in \Lambda$. *Pak existuje aspoň jedno zobrazení* φ *indexové množiny* Λ *do* $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ *takové, že platí*

$$\lambda\varphi \in A_\lambda, \qquad \lambda \in \Lambda .$$

Tento axiom požaduje tedy, aby bylo lze vybrat současně a nezávisle na sobě z každé množiny (15) po jednom prvku. Tím je odstraněna námitka, která byla činěna proti dříve uvedenému induktivnímu postupu spočívajícímu v tom, že vybíral pro dobré uspořádání z dané množiny jeden prvek za druhým. Někteří matematici vyslovovali pochybnosti o tom, zda je přípustno zavádět tento axiom. Protože však intuitivně byla jeho platnost plauzibilní, užívali ho, či vlastně spíše věty o dobrém uspořádání, stále více. Jen se ujal zvyk říci, zda se v té neb oné práci axiom výběru používá či nikoli. A zkoumalo se, ve kterých starších důkazech byl tento axiom mlčky použit, při čemž se přišlo na některé zajímavé věci.

---

[6]) $A - B$ značí množinu všech prvků z A, které neleží v B. Speciálně tedy $A - \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ je množina A bez prvků $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Všimněme si nyní, jaké důsledky plynou z věty o dobrém uspořádání. Viděli jsme, že být množinou dobře uspořádanou je vlastností vždy celé třídy podobně uspořádaných množin. Nyní provedl Cantor s těmito množinami totéž, co udělal s třídami množin stejné mohutnosti. Přiřadil každému typu dobře uspořádaných množin jistý symbol, který tento typ charakterizuje a který nazval *ordinálním číslem*. Je ihned zřejmo, že konečné množiny o témž počtu n prvků mají vždy týž pořádkový typ, ať je uspořádáme jakkoli. Dvě konečné množiny o různém počtu prvků mají různou mohutnost, a tedy i různý pořádkový typ. Můžeme proto vzít za ordinální čísla konečných množin prostě přirozená čísla. Konečná ordinální čísla pak odpovídají vzájemně jednoznačně konečným kardinálním číslům. Jinak je tomu u nekonečných kardinálních čísel. Vezměme si např. množinu prvků

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, b \tag{26}$$

uspořádanou tak, jak jdou její prvky za sebou. Přiřadíme-li prvku b číslo 1 a prvku a_n číslo $n + 1$, vidíme, že tato množina je spočetná. Má však jiný pořádkový typ než množina

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \quad . \tag{27}$$

Množina (26) má totiž dva prvky bez předchůdců a_1, b, kdežto množina (27) jen jeden takový prvek a_1. Viděli jsme rovněž, že spočetná množina (23) a (24) má opět jiný pořádkový typ. Přísluší tedy množinám (24), (26) a (27) různá ordinální čísla, ačkoli mají stejnou mohutnost.

Pro ordinální čísla zavedl Cantor podobně jako pro kardinální čísla sčítání a násobení. Mějme dvě ordinální čísla α, β a vezměme si dvě disjunktní množiny těchto pořádkových typů: A a B. Součet $\alpha + \beta$ definujeme jako pořádkový typ množiny $A \cup B$ uspořádané takto: Pro dva prvky $a_1, a_2 \in A$ platí $a_1 < a_2$ právě tehdy, platí-li v uspořádání množiny A. Stejně nechť je tomu pro prvky $b_1, b_2 \in B$. Pro $a \in A$, $b \in B$ nechť platí vždy $a < b$. Toto uspořádání je dobré. Uveďme si některé příklady. Nechť A je množina (27), která má ordinální typ ω, a B je jednoprvková množina $\{b\}$ s ordinálním číslem 1. Pak $1 + \omega$ je ordinální číslo množiny

$$b, a_1, a_2, a_3, \ldots \quad . \tag{28}$$

To je však množina s ordinálním číslem ω. Platí tedy

$$1 + \omega = \omega \, .$$

Podobně se snadno nalezne, že platí pro každé přirozené číslo n

$$n + \omega = \omega \, .$$

Naproti tomu je $\omega + 1$ ordinální číslo množiny (26), o němž již víme, že to není ω. Lehko zjistíme, že ordinální čísla

$$\omega + 1, \;\; \omega + 2, \;\; \omega + 3, \ldots$$

jsou od sebe různá. *Sčítání ordinálních čísel není komutativní.* Dá se lehko ukázat, že *je asociativní.* Je-li opět A množina (27) a B množina

(29) $$b_1, b_2, b_3, \dots,$$

z nichž obě mají ordinální číslo ω, pak množina

(30) $$a_1, a_2, a_3, \dots, b_1, b_2, b_3, \dots$$

má ordinální číslo $\omega + \omega$. Tak bychom mohli tvořit dále množiny, které mají ordinální čísla

$$\omega + \omega + \omega, \quad \omega + \omega + \omega + \omega, \quad \dots \quad .$$

Pro konečné množiny dává sčítání ordinálních čísel obyčejné sčítání přirozených čísel.

Přejděme nyní k násobení ordinálních čísel. Mějme dvě ordinální čísla α, β a dvě množiny A, B příslušných pořádkových typů. Definice *součinu* $\alpha\beta$ je složitější. Vezměme si tolik exemplářů množiny A, kolik je prvků množiny B a oindexujme je těmito prvky

$$A_b, \qquad b \in B .$$

$\alpha\beta$ je ordinální číslo množiny

(31) $$\bigcup_{b \in B} A_b ,$$

kterou uspořádáme takto: Všechny prvky z A_{b_1} jsou menší než prvky A_{b_2}, platí-li v B $b_1 < b_2$. Prvky v jedné množině A_b nechť jsou uspořádány podle původního uspořádání množiny A. Lehko se zjistí, že toto uspořádání množiny (31) je opět dobré. Jako příklad vezměme si čísla 2 a ω. Abychom utvořili množinu o ordinálním čísle 2ω, vezmeme si za množinu typu 2 množinu $\{a, b\}$, kterou oindexujeme množinou o ordinálním čísle ω, např. množinou přirozených čísel. Dostaneme tak množinu o ordinálním čísle 2ω:

(32) $$a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots \quad .$$

Typ uspořádání této množiny je zřejmě ω. Platí tedy

$$2\omega = \omega$$

a podobně dostaneme pro jakékoli přirozené číslo n

$$n\omega = \omega .$$

Abychom utvořili součin $\omega 2$, musíme si vzít dva exempláře množiny s ordinálním číslem ω, na příklad množiny (27) a (29). $\omega 2$ je ordinální číslo, do jehož typu je uspořádána množina (30). Viděli jsme však, že tato množina má ordinální číslo $\omega + \omega$. Platí tedy

$$\omega 2 = \omega + \omega .$$

Podobně dostaneme pro libovolné přirozené číslo n

$$\omega n = \underbrace{\omega + \omega + \ldots + \omega}_{n \text{ kráte}} .$$

Všechna tato ordinální čísla jsou od sebe různá. *Násobení ordinálních čísel není komutativní. Je však asociativní.* Všimněme si ještě množiny (24). Podle definice sčítání ordinálních čísel má tato množina ordinální číslo $\omega + \omega + \omega + \ldots$. Podle definice násobení má ordinální číslo $\omega \,.\, \omega = \omega^2$. Platí tedy

$$\omega^2 = \omega + \omega + \omega + \ldots \quad .$$

Zde se sčítá napravo nekonečná posloupnost čísel ω. Podobně můžeme tvořit i vyšší mocniny čísla ω.[7])

Lze dále ukázat, že *pro sčítání a násobení ordinálních čísel platí oba zákony distributivní*:

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma ,$$

$$(\beta + \gamma)\,\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha .$$

Stejně jako to bylo u kardinálních čísel, lze i ordinální čísla uspořádat podle velikosti. To je založeno na pojmu úseku dobře uspořádané množiny. Mějme dobře uspořádanou množinu A. Její část U nazveme *úsekem množiny A*, když platí implikace

$$a_\sigma \in U \text{ ET } a_\varrho < a_\sigma \Rightarrow a_\varrho \in U ,$$

tj. úsek obsahuje s každým prvkem i všechny prvky z množiny A, které jsou menší. Jedním z úseků množiny A je celá množina A. Jako příklad si uveďme, že množina (27) je úsekem množiny (26), není však úsekem množiny (28), jejíž úsekem je za to množina $\{b\}$. Množina (27) je úsekem množiny (30) a není úsekem množiny (32). Množina $\{a_1, a_2, a_3 \ldots, b_1, b_2, \ldots b_n\}$ je však úsekem množiny (30). Definujme nyní pro dvě ordinální čísla α, β, která jsou pořádkovými typy množin A, B, vztah $<$ takto:

$$\alpha < \beta$$

značí, že se množina A dá podobně zobrazit *na vlastní úsek množiny B*, tj. úsek, který není celá množina B. Pro konečné množiny dostáváme tak obvyklé uspořádání přirozených čísel. Jako další příklady vztahu $<$ mezi ordinálními čísly uvádím vztahy

$$\omega < \omega + n < \omega + \omega = \omega 2 < \omega^2 ,$$

---

[7]) Definice sčítání a násobení neplatí vlastně jen pro ordinální čísla. Stejné definice lze zavést pro sčítání a násobení pořádkových typů úplně uspořádaných množin. Neučinil jsem to však, abych článek příliš nezvětšoval. Naproti tomu není možno uspořádat pořádkové typy uspořádaných množin podle velikosti, jak to učiníme pro ordinální čísla v příštích odstavcích.

o nichž se čtenář ihned přesvědčí z příkladů množin těchto typů, které jsem právě uvedl.

Je však takto definovaná binární relace mezi ordinálními čísly skutečně uspořádaním? Dají se dokázat tyto věci: Máme-li dvě dobře uspořádané množiny A a B o ordinálních číslech α, β, pak se aspoň jedna, řekněme A, dá podobně zobrazit na úsek druhé, tedy B. Nyní mohou nastat dva případy. Je-li A zobrazeno podobně na celé B, pak zřejmě $\alpha = \beta$. Je-li A zobrazeno na vlastní úsek B, pak se dá dokázat, že B nelze zobrazit na žádný úsek množiny A. Tedy platí trichotomie (17), tj. je správný vždy právě jeden ze vztahů

$$\alpha < \beta, \quad \alpha = \beta, \quad \beta < \alpha .$$

Tranzitivnost (18)

$$\alpha < \beta \text{ ET } \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$$

je nyní triviální. Toto uspořádání ordinálních čísel má ještě tu vlastnost, že je to dobré uspořádání. Máme-li tedy dobře uspořádanou množinu A o ordinálním čísle α, pak všechna ordinální čísla, která jsou menší než α, mají při tomto uspořádání právě pořádkový typ α. Odpovídají totiž vzájemně jednoznačně vlastním úsekům množiny A. Ve třídě dobře uspořádaných množin pořádkového typu α je i množina všech ordinálních čísel menších než α a právě tuto množinu je výhodné si vzít za reprezentanta tohoto pořádkového typu. Všimněme si této věci blíže.

Předně 0 nechť značí „pořádkový typ" prázdné množiny. Pak to vypadá takto:

	Ordinální číslo α	Množina všech ordinálních čísel $<\alpha$, uspořádaná podle velikosti do pořádkového typu α
	1	$\{0\}$
	2	$\{0, 1\}$
	3	$\{0, 1, 2\}$
	…	…
	ω	$\{0, 1, 2, \ldots\}$
	$\omega + 1$	$\{0, 1, 2, \ldots, \omega\}$
(33)	$\omega + 2$	$\{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1\}$
	…	…
	$\omega 2$	$\{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\}$
	$\omega 2 + 1$	$\{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega 2\}$
	$\omega 2 + 2$	$\{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega 2, \omega 2 + 1\}$
	…	…

Je vidět, že pořádkové typy některých ordinálních čísel nemají poslední prvek. V hořeních příkladech jsou to čísla ω a $\omega 2$. Dále jsou takovými čísly $\omega 3$, $\omega 4$, $\omega 5, \ldots,$ $\omega^2, \omega^2 + \omega, \omega^2 + \omega 2, \ldots$. *Tato ordinální čísla* nazýváme *limitní*, ostatní, v jejichž pořádkovém typu existuje poslední prvek, se nazývají *ordinální čísla nelimitní.*

Pro dobře uspořádané množiny platí **princip transfinitní indukce**, který je důležitý nástroj pro důkazy. Možno jej formulovat takto: Budiž dáno ordinální číslo α. *Budiž* $\mathsf{V}(\beta)$ *nějaký výrok o ordinálních číslech* $\beta < \alpha$. *Nechť platí*

1. $\mathsf{V}(1)$ *je pravdivý.*

2. *Z předpokladu, že* $\mathsf{V}(\gamma)$ *je pravdivý výrok pro každé ordinální číslo* $\gamma < \beta$, *plyne, že i* $\mathsf{V}(\beta)$ *je pravdivý.*

Pak $\mathsf{V}(\beta)$ *je pravdivý výrok pro každé ordinální číslo* $\beta < \alpha$.

Položíme-li $\alpha = \omega$, pak dostáváme jakožto speciální případ princip matematické indukce. Velmi často důkaz transfinitní indukcí se provádí takto: Nejdříve se ověří, že platí $\mathsf{V}(1)$. Za druhé pro každé ordinální číslo $\beta : 1 \leqq \beta < \alpha$ se ukáže, že z předpokladu, že platí $\mathsf{V}(\beta)$, (po případě, že platí $\mathsf{V}(\gamma)$, $\gamma \leqq \beta$) se dokáže, že platí $\mathsf{V}(\beta + 1)$. A konečně za třetí se dokáže pro každé limitní β, že z předpokladu, že platí $\mathsf{V}(\gamma)$ pro každé $\gamma < \beta$, plyne, že platí $\mathsf{V}(\beta)$. Třetí krok vyžaduje často jiné důkazové prostředky než krok druhý, proto často je výhodné provádět důkazy druhého a třetího kroku zvlášť.

Všimněme si nyní důsledků, které plynou z věty o dobrém uspořádání pro kardinální čísla. Mějme dvě libovolné množiny A, B. Obě se dají dobře uspořádat. Učiníme-li tak nějakým způsobem, dostaneme pro typy těchto dvou dobrých uspořádání dvě ordinální čísla α, β. Jsou-li množiny A a B ekvivalentní, pak lze zřejmě množiny A, B uspořádat dobře stejným způsobem, tj. obě jsou uspořádány podobně. V tomto případě platí $\alpha = \beta$. Nejsou-li A , B ekvivalentní, pak jistě $\alpha \neq \beta$. Předpokládejme bez újmy obecnosti, že $\alpha < \beta$. Pak A se dá podobně zobrazit na jistý úsek množiny všech ordinálních čísel menších než β, totiž na úsek všech ordinálních čísel menších než α. To však značí, že A se dá podobně zobrazit na vlastní úsek množiny B. Tedy v každém případě se dá jedna z množin A, B (zde A) zobrazit prostě do množiny druhé (zde B). Tím je dokázáno, že nemůže nastat případ IV, který jsme dostali logickou analýzou, když jsme pořádali kardinální čísla podle velikosti. Ze dvou různých mohutností musí být vždy jedna menší. Tím je dokázána i trichotomie pro nerovnost $<$ mezi kardinálními čísly, jak jsme ji definovali v kap. 2. Bylo k tomu ovšem zapotřebí axiomu výběru.

Ze vztahů mezi kardinálními a ordinálními čísly plynou ještě další zajímavé a důležité důsledky. Každé konečné množině mohutnosti n (tj. o n prvcích) odpovídá právě jeden úsek množiny všech konečných ordinálních čísel, tj. úsek $(0, 1, \ldots, n - 1)$, k němuž patří ordinální číslo n. Konečná kardinální a ordinální čísla odpovídají si vzájemně jednoznačně. Uspořádání i početní úkony s těmito oběma druhy konečných čísel jsou úplně stejné. Jiné je to však pro čísla nekonečná. Viděli jsme, že se spočetná množina dá dobře uspořádat různými způsoby, kterým odpovídají různá ordinální čísla, např. čísla ω, $\omega + n$, $\omega 2$, ω^2 mají spočetnou mohutnost. Pro stručnost budeme dále mluvit o mohutnosti ordinálního čísla α a budeme tím myslit mohutnost množiny všech ordinálních čísel menších než α. Mějme tedy tři ordinální čísla

$$\alpha < \beta < \gamma$$

a předpokládejme, že α a γ mají stejnou mohutnost. V tomto případě se dá lehko ukázat, že i číslo β má tuto mohutnost.[8]) Odtud ihned plyne, že ta nekonečná ordinální čísla, která mají stejnou mohutnost, tvoří celý interval ordinálních čísel. Tento interval nemá největší číslo. Kdyby např. δ bylo největší číslo tohoto intervalu, pak protože číslo $\delta + 1$ má zřejmě stejnou mohutnost jako δ, dostali bychom spor. Pro nekonečné mohutnosti μ platí dokonce ještě obecnější implikace

$$\nu \leqq \mu \Rightarrow \mu + \nu = \mu .$$

Naproti tomu celý interval nekonečných ordinálních čísel, které mají stejnou mohutnost, má nejmenší prvek α, neboť ordinální čísla jsou dobře uspořádána, tedy každá jejich část má nejmenší prvek. Toto α je nutně číslo limitní. Tím jsme rozdělili ordinální čísla na intervaly a každému takovému intervalu patří právě jedno kardinální číslo. Za reprezentanta příslušné mohutnosti můžeme si vzít právě toto nejmenší ordinální číslo příslušného intervalu.

Tato počáteční ordinální čísla jsou samozřejmě zase dobře uspořádána a toto uspořádání dává ihned jisté dobré uspořádání příslušných kardinálních čísel. Lehko zjistíme, že je to uspořádání kardinálních čísel, které jsme zavedli v kap. 2. *Uspořádáme-li tedy kardinální čísla podle velikosti, jak jsme to učinili v kap. 2, jsou tím již dobře uspořádána.* Nejmenší nekonečné kardinální číslo je kardinální číslo spočetných množin. Přísluší mu ordinální číslo ω. K označení kardinálních čísel užil Cantor prvního písmene hebrejské abecedy $\aleph$, které se jmenuje *alef.* Toto písmeno opatřoval ordinálními čísly jakožto indexy. Tak spočetnou mohutnost označil $\aleph_0$, další $\aleph_1$ atd. Tím dostal transfinitní posloupnost kardinálních čísel:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \ldots, \aleph_\alpha, \ldots .$$

Mezi těmito kardinálními čísly musí být někde číslo $2^{\aleph_0}$, což je podle (19) mohutnost kontinua. Cantor vyslovil domněnku, že platí

$$\aleph_1 = 2^{\aleph_0} . \tag{34}$$

To je proslulá *hypotéza kontinua.* Viděli jsme dříve, že pro libovolné kardinální číslo platí nerovnost (20) $\mu < 2^\mu$. Možno tedy sformulovat tak zvanou *obecnou hypotézu kontinua*, tj. vyslovit domněnku, že pro libovolné $\aleph_\alpha$ platí

$$\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha} . \tag{35}$$

O řešení obou těchto problémů a o dalším vývoji teorie množin v 20. století bude jednat kapitola další.

---

[8]) Buďtěž A, B, C tři dobře uspořádané množiny typu α, β, γ. B se dá podobně zobrazit na úsek množiny C $(\beta < \gamma)$, C se dá prostě (nikoli však podobně) zobrazit na A a A se dá podobně zobrazit na úsek množiny B. Tedy složeným zobrazením se dá C prostě (nikoli však podobně) zobrazit do B. Podle věty Cantor-Bernsteinovy jsou množiny B a C ekvivalentní.

4

Kolem rozhraní století byl stav abstraktní teorie množin přibližně asi tento: Byla vypracována již rozsáhlá teorie kardinálních čísel, teorie uspořádaných a dobře uspořádaných množin, zůstávaly však stále otevřeny dva problémy.

Mnozí matematikové vyslovovali pochybnosti o přípustnosti věty o dobrém uspořádání, která ještě r. 1900 byla založena na postupném výběru prvků z dané množiny, který byl nevyhovující. (Viz výklad za větou o dobrém uspořádání). Teprve roku 1904 E. ZERMELO v [19] formuloval axiom výběru a ukázal jeho ekvivalenci s větou o dobrém uspořádání. Zermelovo pojednání vzbudilo velký rozruch, mnoho úvah a polemik. Přes různé námitky tehdejších matematiků se dobré uspořádání poměrně velmi rychle prosadilo a velká většina matematiků první poloviny 20. století je bez rozpaků užívala. Další vývoj teorie reálných funkcí, algebry, topologie a funkcionální analýzy v této době by nebyl bez této věty vůbec možný. Matematici pracující v těchto oborech prováděli bez jakýchkoli pochybností důkazy i konstrukce pomocí transfinitní indukce a nikde v rámci discipliny, kterou studovali, nedošlo k jakýmkoli rozporům, takže před druhou světovou válkou se všeobecně pokládal axiom výběru za přípustný a transfinitní indukce za zcela oprávněnou matematickou metodu.

Úplně jinak bylo to však s hypotézou kontinua. Zde jsme do nedávna vůbec nevěděli, zda platí nebo neplatí rovnost (34) nebo při obecné hypotéze kontinua rovnost (35). Proto nebylo možno nikde v důkazech rovnosti (34) nebo (35) užít. Přitom postupem času byl nalezen značný počet tvrzení, o nichž se zjistilo, že jsou správná, platí-li hypotéza kontinua. Polský matematik W. SIERPIŃSKI dokonce napsal celou knihu [17], kde podrobně studuje matematické věty, které jsou logicky ekvivalentní hypotéze kontinua. Stručně řečeno u axiomu výběru jednalo se v podstatě jen o vyjasnění místa a úlohy, které tento axiom má v teorii množin, kdežto u hypotézy kontinua šlo o to, zda vůbec platí, a když neplatí, jaký vztah platí na jejím místě.

Cantor poprvé formuloval dobré uspořádání množin roku 1882. Tím mu bylo umožněno vyšetřovat kardinální čísla a formulovat hypotézu kontinua. Roku 1884 vynaložil Cantor nesmírné úsilí na to, aby hypotézu kontinua dokázal, avšak bez výsledku. Dnes víme, že rozřešit tento problém bylo daleko nad důkazové prostředky, které měl Cantor k dispozici. Tento neúspěch měl na Cantora neblahý vliv. Upadl do velké tvůrčí a osobní krize, přestal na několik let vůbec vědecky pracovat a pomýšlel dokonce na to zanechat matematiky. (Viz [16]). Krizi nevyvolal jen neúspěch v úsilí dokázat hypotézu kontinua, nýbrž i velmi odmítavý, ba přímo nepřátelský postoj některých matematiků k celé teorii množin. Byl to především Leopold KRONECKER (1823—1891), který uzavřel Cantorovi pro jeho práce úplně Crelleův Journal für reine und angewandte Mathematik. Je velkou slávou časopisu Mathematische Annalen, že v této době otiskuje řadu Cantorových velkých pojednání z teorie množin. (Viz [5] str. 139.) Vedle Kroneckera odmítali jeho teorii množin např. Hermann SCHWARZ (1843—1921) a Charles HERMITE (1822—1901). Příznivcem Cantorovým byl švédský matematik Gösta MITTAG-LEFFLER (1846—1927), který uveřejnil několik jeho prací ve skandinávském časopise Acta mathematica. Rovněž Karl WEIERSTRASS (1815—1897) byl na straně Cantorově, ačkoli někdy jen opatrně při prudkých útocích Cantorových protivníků. V devadesátých letech přijímali teorii množin Henri POINCARÉ, Adolf HURWITZ, David HILBERT, Hermann MINKOWSKI. Vůbec Göttingy, které se již v této době stávaly hlavním centrem německé matematiky, stály svými hlavními představiteli za teorií množin. Z francouzských matematiků byl to především Jacques HADAMARD (1865—1963). Světového uznání teorii množin se dostalo r. 1897 na prvním mezinárodním matematickém sjezdě v Curychu. Tam ve své přednášce A. Hurwitz vyzdvihl, jak Cantorovy myšlenky oplodnily teorii funkcí kompexní proměnné a vyvolaly nový její rozvoj. To potvrdily i práce H. Poincarého o automorfních funkcích, které jsou přímo založeny na Cantorově teorii bodových množin. Teorie funkcí komplexní proměnné byla asi první disciplina, v níž teorie množin byla ve velkém měřítku využita. Je to přirozené, uvědomíme-li si místo, které tato teorie zaujímala v matematickém bádání druhé poloviny 19. století. Teorie funkcí reálné proměnné teprve čekala na svůj veliký rozvoj.

Tím vším byl vzbuzen v matematickém světě velký zájem o teorii množin a i její odpůrci byli nuceni ji studovat. To došlo výrazu na matematickém sjezdě v Heidelbergu r. 1904, kde byla středem jednání abstraktní teorie množin a hypotéza kontinua.

Ačkoli hypotéza kontinua budila velkou pozornost matematiků tím, že nebylo známo místo mohutnosti kontinua v dobře uspořádané transfinitní posloupnosti kardinálních čísel, přece pro rozvoj matematiky mělo na začátku tohoto století daleko větší význam vedle teorie bodových množin dobré uspořádání a z něho plynoucí princip transfinitní indukce. Proto velkou pozornost vyvolala zmíněná práce [19] E. Zermela z roku 1904, v níž formuloval axiom výběru. Pro další vývoj matematiky bylo základní věcí, zda je transfinitní indukce přípustný důkazový a konstrukční prostředek či nikoli. Svědectvím toho, jak vážný to byl problém, je diskuse, která proběhla mezi francouzskými matematiky v roku 1905 o Zermelově práci (viz [1]). V této diskusi J. HADAMARD se staví plně za axiom výběru a transfinitní indukci a ukazuje, že E. BOREL v [2] nepochopil dobře význam toho faktu, že axiom výběru vybírá z jednotlivých množin prvky současně a nezávisle. E. Borel odmítal dobré uspořádání pro nespočetné množiny. R. BAIRE šel ve svém odmítání ještě dále. H. LEBESGUE je ve svém úsudku o Zermelově práci velmi opatrný, požaduje však, aby všechny úvahy i pojmy, které se při dobrém uspořádání vyskytují, byly podrobeny bedlivé logické analýze, a potvrzuje stanovisko J. Hadamarda proti mínění E. Borela, že je velký rozdíl po logické stránce mezi původním intuitivním postupem, jímž se množina dobře uspořádávala, a Zermelovým axiomem výběru.

Vylíčil jsem již, jak axiom výběru, transfinitní indukce a celá teorie množin pronikla postupně téměř celou matematiku. Celý rozvoj teorie reálných funkcí i topologie, funkcionální analýzy i algebry od začátku století až do dneška by nebyl bez teorie množin a speciálně bez transfinitní indukce možný. Toto pronikání teorie množin do ostatních odvětví matematiky se dělo i přes to, že kolem začátku století bylo objeveno několik tvrzení, o nichž lze dokázat z teorie množin, tak jak ji fundoval Cantor, že současně platí i že platí jejich opak. Těmto tvrzením se říká *antinomie teorie množin*. Uvedu zde z nich dvě, které jsou čistě matematického rázu.

Antinomie Burali-Fortiho. Pochází z roku 1897 a je to jedna z prvních objevených antinomií. Vezměme si množinu všech ordinálních čísel M. Protože ordinální čísla jsou dobře uspořádána, přísluší jí jisté ordinální číslo η, které však neleží v $M : \eta \notin M$. (Viz schéma ordinálních čísel (33).) A to je spor s definicí množiny M.

Antinomie G. Cantora. Pochází z roku 1899 (viz [5], str. 448). Označme si mohutnost množiny M znakem $|M|$. V úvaze za rovnicí (20) v kap. 2 jsme si ukázali, že množina $\mathscr{P}(M)$ všech částí množiny M má větší mohutnost než M

$$|M| < |\mathscr{P}(M)| . \tag{36}$$

Vezměme si nyní množinu M všech množin, tj. množinu, jejímiž prvky jsou všechny množiny. Pak zřejmě všechny části množiny M jsou prvky množiny $M : \mathscr{P}(M) \subseteqq M$. Odtud ihned plyne pro kardinální čísla

$$|\mathscr{P}(M)| \leqq |M|$$

a to je ve sporu s nerovností (36)[9]).

Ačkoli objevení antinomií teorie množin vzbudilo velký rozruch mezi matematiky a dalo odpůrcům teorie množin velkou zbraň do ruky, neodstrašilo většinu matematiků od aplikací teorie množin a jejích metod v nejrůznějších matematických disciplinách. Příčina spočívala v tom, že antinomie ležely všechny na periferii teorie množin a týkaly se objektů velmi zvláštních, jako je množina všech ordinálních čísel nebo množina všech množin. Tyto útvary se totiž při aplikacích teorie množin vůbec nevyskytovaly. Pracovalo-li se na příklad s množinami ordinálních čísel, byly to vždy množiny takových ordinálních čísel, která byla menší než jisté ordinální číslo. Proto spornost, kterou obsahovaly antinomie v hořeních formulacích, nemohla se vyskytnout při aplikacích teorie množin.

Na druhé straně stav, že zde existovala teorie, která měla tak rozsáhlé a významné použití v matematice a která obsahovala v sobě spory, byl jistě nesnesitelný. Proto bylo vyvinuto velké úsilí na prozkoumání tohoto jevu a na rozřešení vyskytujících se rozporů. Cesta, která se přímo nabízela, byla axiomatizace teorie množin, tj. přesné formulování základních vlastností množin v soustavě axiomů a deduktivní vybudování celé teorie z této soustavy. Přesné formulování axiomů ovšem mohlo zde znamenat jedině formulaci na jazyce matematické logiky. První axiomatizace teorie množin pochází od Ernesta ZERMELA. Tuto soustavu dále vybudoval Adolf FRAENKEL, takže se dnes nazývá soustava Zermelo-Fraenkelova. (Viz [8]). Další axiomatická soustava značně jiného druhu pochází od anglického matematika a filozofa Bertranda RUSSELA. (Viz [14] a [18]).

---

[9]) Logické formulace antinomií a úvahy o nich viz např. Stephen Cole KLEENE [12].

Ve dvacátých letech tohoto století zabýval se velmi intenzívně základy teorie množin v Göttingách David HILBERT (1862—1943). Popudem k tomu nebyly jen antinomie a některé nevyjasněné otázky z teorie množin, nýbrž i intuicionizmus holandského matematika L. E. J. BROUWERA, který se začal uplatňovat v některých matematických kruzích po první světové válce. Brouwer [4] zamítal nejen Cantorovu teorii množin, nýbrž omezil i velmi silně logické prostředky, kterých podle něho matematik smí používat. K tomu účelu vybudoval zvláštní vlastní intuicionistickou logiku, v níž na příklad při nekonečném množství matematických objektů zakazoval užívat princip o vyloučeném třetím. Podle Brouwera třeba zavrhnout nejen Cantorovu teorii množin, nýbrž i velkou část předcantorovské matematické analýzy. Přípustné jsou jen ty matematické objekty, které lze efektivně konstruovat. Brouwer sám byl velmi nesnášenlivý a přímo zakazoval jinou matematiku než intuicionistickou. Po této stránce je zajímavé, že byl před 2. světovou válkou stoupencem fašizmu. Něco jiného je ovšem zakazovat neintuicionistické úvahy v matematice a něco jiného opět zkoumat, co se takovými omezenými prostředky dá v matematice vybudovat. Takové zkoumání se ukázalo v pozdějším vývoji důležitým a vedlo k teorii rekurzívních funkcí a k teorii algoritmů, které mají značný význam v moderní numerické matematice.

David Hilbert poznal ve dvacátých letech tohoto století, že Brouwerovým ideím o redukování celé matematiky na intuicionistickou matematiku nutno čelit tím, že se základy celé matematiky bezvadně logicky vybudují. Tím se mimo jiné i teorie množin zbaví rozporů, které se projevily v antinomiích. Ačkoli se později ukázalo, že cesta, kterou nastoupil, totiž formalizace matematických důkazů pomocí matematické logiky, nevede k cíli, přece jeho úsilí bylo plodné v tom směru, že formuloval jisté otázky, jejichž negativní vyřešení (Hilbert doufal v řešení pozitivní) vedlo k vybudování axiomatické teorie množin, ve svých principech velmi jednoduché, v níž se dají řešit ty hlavní problémy, o nichž jsme se v tomto článku zmínili.

Bádání v tomto směru prováděl jednak Paul BERNAYS, který patřil k Hilbertovu kruhu v Göttingách, dále John von NEUMANN, především však Kurt Gödel, který vyšel z Vídně. Oba dva vybudovali axiomatickou teorii množin, která nejen odstraňuje antinomie velmi jednoduchým způsobem, nýbrž která vyjasnila základy teorie množin na tolik, že bylo možno určit přesně místo, které má v celé teorii dobré uspořádání, a rozřešit problém kontinua. Tak byla vybudována Bernays-Gödelova axiomatická teorie množin. K. Gödel za druhé světové války vyložil tuto teorii spolu se svými pronikavými výsledky v knize [10]. Vyložím zde stručně hlavní myšlenky, na nichž spočívá tato axiomatická teorie.

Gödel bere za základ své axiomatické soustavy dva primitivní a tedy nedefinované pojmy[10]). První z těchto pojmů je třída. Třídy rozděluje do dvou druhů, na množiny

[10]) Každá axiomatická teorie vychází z jistého počtu primitivních pojmů, které nejsou definovány. Předpisují se jen pro tyto pojmy jisté vlastnosti, které jsou formulovány v axiomech teorie. Tak např. v Hilbertově axiomatizaci geometrie tyto primitivní pojmy jsou: bod, přímka, rovina a vztah incidence těchto objektů.

a na třídy vlastní, které nejsou množinami. Druhým primitivním pojmem je binární relace $\in$ mezi třídami.

(37) $$A \in B$$

budeme čísti „třída A je prvkem třídy B". Pro třídy a relaci $\in$ zavádí celou řadu axiomů, které zde nemůžeme všechny uvádět. Velký význam má v teorii axiom, který Gödel označuje A2 a který říká: Na levé straně relace „býti prvkem" (37) může stát jen třída, která je množinou, nikoli vlastní třída. Na pravé straně (37) může stát i množina i vlastní třída[11]). V dalším budu označovat množiny malými a třídy velkými latinskými písmeny. Je jasné, že nyní vztah (1) budeme číst: „množina a je prvkem třídy A" (což ovšem může být opět množina) a vztah (2): „množina a není prvkem třídy A". Mezi třídami můžeme definovat inkluzi (3). $B \subseteqq A$ značí totiž tolik jako implikace (4), kde na levých stranách relace $\in$ stojí jen množiny. Můžeme tvořit sjednocení dvou tříd (5). To je třída $A \cup B$, která je definována logickou ekvivalencí (7). Podobně je to s průnikem (6), který je definován ekvivalencí (8). Odtud lze definovat sjednocení i průnik konečného počtu tříd. Nelze však tvořit sjednocení nebo průnik nekonečného počtu tříd, které nejsou množinami. Abychom totiž mohli utvořit výrazy (9), musili bychom nejdříve mít souhrn S všech těchto nekonečně mnoha tříd a při tvoření sjednocení nebo průniku v (9) nechat A probíhat celý souhrn S a to není přípustné, neboť vztah $A \in S$ nemá pro vlastní třídu smysl. Zato můžeme v libovolné třídě M tvořit komplement. Máme-li totiž třídu $A \subseteqq M$, pak *komplement* A' *k* A *v* M můžeme definovat pomocí logické ekvivalence (10). Odtud plyne, že se dá se třídami booleovsky počítat. Nyní můžeme beze všeho nebezpečí utvořit *univerzální třídu* U, která obsahuje jakožto prvky všechny množiny. Je to samozřejmě vlastní třída. Ve vlastní třídě U můžeme pak opět tvořit ke každé třídě její (univerzální) komplement.

Pro vlastní třídu A nemůžeme tvořit soustavu všech částí A, tj. souhrn všech tříd B, pro něž platí $B \subseteqq A$, neboť některé části, např. A samo, nejsou množinami. U vlastní třídy nemůžeme mluvit o mohutnosti. Rovněž ordinální číslo α přísluší jen množině, neboť představuje vlastně množinu všech ordinálních čísel menších než α, která je s danou množinou podobná. Viz (33).

Z algebry uveďme tyto příklady množin a tříd. Grupa je vždy množinou. To nutno zahrnout do definice grupy. Rovněž všechny konečné grupy tvoří množinu a všechny spočetné grupy též [12]). Všechny grupy vůbec tvoří však vlastní třídu. Toto rozlišování tříd a množin odstraňuje antinomie. V antinomii Cantorově nemůžeme mluvit o množině všech množin, nýbrž jen o univerzální třídě U, která není množinou.

[11]) Gödel zavádí na rozdíl od některých starších axiomatických teorií množin jen množiny jakožto prvky tříd, a tedy i množin. Je to tak jednodušší, neboť stejně nutno vyšetřovat množiny množin (tj. množiny, jejichž prvky jsou jiné množiny), a je to stejně obecné, neboť prvky intuitivní teorie množin můžeme v Gädelově teorii považovat za jednoprvkové množiny.

[12]) Musíme ovšem vzít vždy ze všech izomorfních grup jen jednu.

Proto nemá mohutnost a nelze tvořit třídu všech jejích částí. V antinomii Burali-Fortiho všechna ordinální čísla tvoří opět vlastní třídu, která tedy nemá žádné ordinální číslo.

Přesné axiomatické vybudování teorie množin umožnilo Gödelovi vyšetřovat axiom výběru i hypotézu kontinua. Učinil to v pojednání [10] nahoře uvedeném. Zde nutno něco předeslat. Máme-li nějakou soustavu axiomů, pak říkáme, že tato soustava je bezesporná, když v rámci teorie vyvozené z této soustavy není možno dokázat současně nějaké tvrzení A i jeho opak. K. Gödel dokázal toto: Je-li soustava všech axiomů Gödelovy axiomatiky teorie množin s vyloučením axiomu výběru bezesporná, pak je bezesporná i tato soustava, když jsme k ní připojili axiom výběru. Dále dokázal rovněž, že je bezesporná soustava, která vznikne, když ke Gödelově soustavě axiomů přidáme ještě hypotézu kontinua, tj. rovnost (34) jakožto další axiom. To znamená tedy stručně řečeno, že axiom výběru a hypotéza kontinua není ve sporu s ostatními axiomy Gödelovy teorie. To byl podstatný krok na cestě k řešení těchto dvou problémů teorie množin, nebylo to ovšem řešení úplné. Říkalo to jen tolik, že z Gödelovy soustavy axiomů bez axiomu výběru nelze dokázat, že existuje množina, která se nedá dobře uspořádat, a že z Gödelovy soustavy nelze dokázat nerovnost

$$\aleph_1 < 2^{\aleph_0}\,. \tag{38}$$

Objasnit úplně, jaké místo v celé teorii má axiom výběru a hypotéza kontinua podařilo se až americkému matematiku Paulu J. Cohenovi [6] roku 1963. Ten dokázal, že obě tvrzení jsou nezávislá na ostatních axiomech teorie množin. To znamená v podstatě toto: Připojíme-li k soustavě axiomů teorie množin bez axiomu výběru tvrzení „existují množiny, které se nedají dobře uspořádat“, nelze z takovéto soustavy odvodit spor. Dále ukázal Cohen ještě, že přidáme-li k soustavě axiomů teorie množin jakožto další axiom tvrzení (38), nemůžeme opět dostat spor.

Tím nastala v teorii množin situace úplně analogická té, která nastala v geometrii, když Lobačevskij dokázal nezávislost postulátu o rovnoběžkách na ostatních axiomech eukleidovské geometrie. Podle naší vůle můžeme připojit k soustavě axiomů teorie množin jakožto další axiom hypotézu kontinua, ale nemusíme to učinit. Totéž platí i o axiomu výběru. Jako dnes máme podle toho, jakou soustavu axiomů vezmeme za základ, buď eukleidovskou geometrii nebo geometrii Lobačevského nebo geometrii sférickou, máme stejně různé teorie množin podle toho, zda příslušná soustava axiomů obsahuje rovnost (34) nebo nějakou jinou rovnost. Tyto výsledky, hlavně výsledek o hypotéze kontinua, jsou jistě největší matematické objevy, které byly učiněny v posledních desítiletích, a budou mít velký význam pro budoucí vývoj matematiky. Cohen pracoval se Zermelo-Fraenkelovou axiomatickou teorií množin. Petr Vopěnka, použiv některé důkazové postupy Cohenovy, dokázal analogické výsledky i pro Gödelovu axiomatickou teorii množin.

Ihned jak vešly objevy Cohenovy ve známost, začali matematikové, zabývající se základy teorie množin, horečně vyšetřovat důsledky těchto objevů a dnes je již známa řada nových výsledků v tomto směru. U nás se práce účastní Petr Vopěnka a ještě několik mladých matematiků. Vopěnkovi se na příklad podařilo sestrojit některé jednoduché modely pro teorii množin bez axiomu výběru nebo s jinou rovností, než je rovnost (34) pro mohutnost kontinua.[13])

Každý velký matematický objev neuzavírá jen jednu etapu matematického bádání, nýbrž otvírá vždy pro toto bádání nová rozsáhlá pole. Také objevy Cohenovy jsou počátkem nového dalšího rozvoje teorie množin. Nutno nejdříve prozkoumat důsledky, které z nich plynou pro, abych tak řekl, klasickou teorii množin, tj. pro teorii množin s axiomem výběru a s rovností (34) pro mohutnost kontinua. Dále nutno vyřešit a utřídit neklasické teorie množin, v nichž mohutnost kontinua se rovná nějakému většímu kardinálnímu číslu, než je $\aleph_1$, a konečně bude třeba se podívat i na teorie množin, v nichž neplatí axiom výběru. Než to ještě není všechno. Bude nutno znova se podívat na některé staré problémy teorie množin, jejichž řešení dosud vzdorovalo úsilí matematiků, zda se ve světle těchto nových výzkumů nepodaří je přece řešit. Uvedu zde jen problém tak zvaných nepřístupných alefů a domněnku Suslinovu. Jak to s těmito problémy stojí v té nebo oné teorii množin, ukáže teprve budoucnost. Konečně je zde naděje, že se matematikům i logikům podaří daleko hlouběji proniknout do samých gnozeologických základů matematiky, než to bylo možno až dosud.

Literatura

citovaná v článku nebo použitá při jeho sepsání

1. R. Baire, E. Borel, J. Hadamard, H. Lebesgue: Cinq lettres sur la théorie des ensembles. Bull. de la Soc. Math. de France *33* (1905), 261—273.
2. Emile Borel: Quelques remarques sur les principes de la théorie des ensembles. Math. Ann. *60* (1905), 194—195.
3. Emile Borel: *Leçons sur la théorie des fonctions.* Paris 1898.
4. L. E. J. Brouwer: Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik. Math. Ann. I. *93* (1925), 244—257; II. *95* (1925), 453—472; III. *96* (1927), 451—488.
5. Georg Cantor: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts.* Herausgegeben von Ernst Zermelo nebst einem Lebenslauf Cantors von Adolf Fraenkel. Berlin 1932.
6. P. J. Cohen: The independence of the continuum hypothesis. Proc. of the National Academy of Sci., USA I. *50* (1963), 1143—1148, II. *51* (1964), 105—110.
7. Richard Dedekind: *Was sind und was sollen die Zahlen.* Brauenschweig 1888.
8. Adolf Fraenkel: *Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre.* Wissenschaft und Hypothese Nr. 31. Leipzig u. Berlin 1927.

---

[13]) Těm, kteří mají sklon prohlašovat za velký vědecký objev jen to, co má bezprostřední aplikace, bych rád připomněl, že když byla kolem roku 1900 budována teorie reprezentace grup, nikdo tehdy netušil, jaký význam bude mít později ve fyzice pro kvantovou teorii. A Booleovy algebry na začátku let třicátých vypadaly jen jako hra logiků, která nebude mít nikdy žádné praktické důsledky. A dnes velké počítací stroje bez Booleových početních postupů jsou nemyslitelné.

9. Adolf FRAENKEL: Georg Cantor. Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung *39* (1930), 189—266.
10. Kurt GÖDEL: The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory. Annals of Math. Studies Nr. 3, 1940.
11. Erich KAMKE: *Allgemeine Mengenlehre.* Enz. der Math. Wiss. 2. Auflage, Band I. Teil 1. Heft 2. Aufsatz 5, 1—56. Leipzig u. Berlin 1939.
12. Stephen Cole KLEENE: *Introduction to metamathematics.* New York 1952. Ruský překlad. Стефен К. Клини: *Введене в метаматематику.* Москва 1957.
13. Vladimír KOŘÍNEK: *Základy algebry.* 2. vyd. ČSAV 1956.
14. Bertrand RUSSEL: *Introduction to mathematical philosophy.* 3 ed. London and New York, 1924.
15. Artur SCHOENFLIES: Zur Erinnerung an Georg Cantor. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung *31* (1922), 97—106.
16. Artur SCHOENFLIES: Die Krisis in Cantor's mathematischem Schaffen. Acta math. *50* (1927), 1—23.
17. Wacław SIERPIŃSKI: *Hypothèse du continu.* Monografje matematyczne, Nr. 4., Warszawa 1934.
18. A. N. WHITEHEAD and Bertrand RUSSEL: Principia Mathematica. 1910 až 1913.
19. Ernst ZERMELO: Bewies, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann. Math. Ann. *59* (1904), 514—516.

Knihy o abstraktní teorii množin hodící se k počátečnímu studiu

Vojtěch JARNÍK: *Úvod do teorie množství.* Dodatek ke knize Karel PETR: *Počet integrální.* 2. vydání 1931.

Eduard ČECH: *Bodové množiny.* 1936. Kniha sice jedná o bodových množinách, avšak §§ 1—4 jsou věnovány abstraktní teorii množin. Velmi pěkné, ale značně zhuštěné.

Bedřich POSPÍŠL: *Nekonečno v matematice.* Cesta k vědění, sv. 48. 1949.

Vojtěch JARNÍK: *Diferenciální počet.* (Pokračování Úvodu do počtu diferenciálního) 1953. Abstraktní teorii množin jsou věnovány kap. I, §§ 1—9.

Eduard ČECH: *Topologické prostory.* 1959. Abstraktní teorii množin jsou věnovány §§ 1—3.

O JEDNOTKÁCH DÁVKY IONIZUJÍCÍHO ZÁŘENÍ

VÁCLAV HUŠÁK, Olomouc

Vznik dozimetrie ionizačního záření jako vědeckého odvětví souvisí s praktickým využitím rentgenového záření v lékařství ke konci 19. stol. Od té doby fyzikové a radiologové vynakládají nemálo úsilí na objasnění pojmu dávka záření, na stanovení vhodných jednotek dávky a vhodných měřicích metod. Během posledních čtyř desetiletí byla stanovena řada definic a jednotek, z nichž mnohé se neosvědčily a zanikly, mnohé pak prošly častými změnami a úpravami. V posledních letech, kdy použití rentgenového záření i záření radioaktivních izotopů se značně rozšířilo v nejrůznějších oborech lidské činnosti, bylo třeba znovu zhodnotit dosavadní definice a jed-