

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Blanka Vojtášková

Projekt CSMP [Dokončení]

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 22 (1977), No. 3, 164--168

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/138226>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1977

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

vyučování

tiky. Dieudonné to vítá. Píše: *Tak se lze nadít, že jednou budou dokončeny rozumné osnovy matematiky od mateřské školy po vysokou školu.* Mohli bychom být hrdi, kdyby budoucí pokolení považovala za charakteristický rys současné matematiky, že se významní tvůrčí matematici zabývali problémy matematického vzdělání a považovali takový zájem za nedílnou část své odborné odpovědnosti. Tak se může stát, že bude do matematické výchovy přenesena neobyčejná vitalita, jakou jeví moderní výzkumná práce. Myslím si, že taková angažovanost je nutnou (ne však postačující) podmínkou pro zdravý vývoj matematického vzdělání, a doufám, že vřelý zájem takových odborníků, jako je René Thom a Jean Dieudonné povzbudí další, aby se zúčastnili tohoto vzrušujícího životaplného díla.

Přeložil Přemysl Vihan

Argument o užitečnosti učiva zařazeného do osnov není patrně rozhodující. Stále se v té či oné podobě udržuje názor, že jedním z úkolů vyučování je výběr, tj. vymezení vloh každého studenta, a jejich maximální rozvíjení se zvláštním důrazem na nadané studenty. Já prohlašuji, že je nemožné zvládnout tento úkol v rámci předmětu, který nezahrnuje aspoň některé zbytečné a neužitečné aspekty. Abychom plně posoudili schopnosti studenta, musíme ho vpravit do aktivní role a dovolávat se jeho vlastní iniciativy a podnikavosti. Nic z toho nelze dosáhnout v rámci „užitečného“ studia, kde se všemu, co je zařazeno pro svou technickou užitečnost, vyučuje dogmaticky a kde se školní excelování definuje jako přesné a rychlé reprodukování dané látky. Jedině ta témata, která jsou „hrou“, mají výchovnou hodnotu, a ze všech takových her je eukleidovská geometrie nejméně zbytečná a nejbohatší stálými odkazy na intuitivně srozumitelné základy.

René Thom

Projekt CSMP*)

Blanka Kussová

Program zvaný *Elements of Mathematics* (krátce jen EMP) je druhou částí výzkumného projektu CSMP, zabývajícího se modernizací výuky matematice na všeobecných středních školách v USA. Je určen pro nejnadanější studenty sedmých až dvanáctých tříd střední školy, tj. jen pro 10–15% žáků těchto tříd. Program je zajímavý svým náročným obsahem, způsobem práce se žáky i vysokými cíli, jež si klade.

Cíle programu lze formulovat takto:

1. Studenti by se měli seznámit se základními idejemi a *metodami práce v matematice* a naučit se efektivně je používat; měli by si osvojit několik základních jazyků a systémů matematiky.
2. Studenti by měli být schopni rozumět *způsobům dokazování* v matematice, měli by mít dostatek vlastních zkušeností s vytvářením důkazů.
3. Studenti by měli být obeznámeni s *axiomatickou metodou* při výstavbě matematických teorií; měli by znát, co tato metoda může poskytovat a v čem spočívá její omezení.
4. Studenti by si měli osvojit *abstrahování* jako jednu z důležitých metod matematiky, měli by si být vědomi účinnosti vhodně zvolené abstrakce a znát řadu příkladů, kdy byla s úspěchem využita při budování nové matematické teorie.

*) První část tohoto článku jsme uveřejnili v minulém čísle.

5. Studenti by měli mít dostatek zkušeností s netriviálními důležitými *aplikacemi matematiky*, měli by být dobře obeznámeni s pojmem modelu a s vytvářením matematických modelů reálných situací.

Pro výuku podle EMP bylo napsáno 13 základních učebnic a 3 učebnice doplňující. Z jejich názvů je patrné, jaké učivo je do programu zahrnuto:

- Kniha 0 – Intuitivní základ
- 1 – Úvod do logiky
- 2 – Logika a množiny
- 3 – Úvod do teorie pole
- 4 – Relace
- 5 – Funkce
- 6 – Číselné systémy
- 7 – Reálná analýza (funkce jedné reálné proměnné)
- 8 – Základy geometrie
- 9 – Lineární algebra, geometrie, trigonometrie
- 10 – Grupy a okruhy
- 11 – Konečné pravděpodobnostní prostory
- 12 – Teorie míry
- Kniha A – Úvod do matematizace reálných situací:
Teorie hlasovacích skupin
- Kniha B – EM Kniha problémů
- Kniha C – Matematika zaměřená k počítačům

Kniha 0 (krátce jen K 0) má v programu zvláštní postavení tím, že každý žák sedmé třídy učící se podle EMP začíná s K 0. Na rozdíl od ostatních učebnic (s výjimkou ještě doplňkové knihy A) je tato kniha psána formou vyžadující *doprovodný výklad učitele*; to znamená, že třída pracuje při jejím studiu pohromadě. Učebnice K 1 až K 12, stejně jako knihy B a C, jsou určeny pro *individuální studium* žáků, resp. pro seminární práci v malých skupinách.

Jak sám název K 0 říká, je cílem tohoto

učebního textu seznámit studenty – na intuitivní bázi – s co nejširší škálou matematických poznatků, a tak jim poskytnout bohatý základ pro další již přesné studium matematických teorií v knihách 4–12. Vzhledem k tomu, že K 0 je úvodní učebnicí programu, je psána jazykem přesným, ale přesto blízkým žákům sedmých tříd. Užívá se zde deduktivního zdůvodňování, avšak bez jakýchkoliv pokusů o čistě formální důkaz. Látka je vyložena na empirickém základě, na praktických problémech, na situacích z reálného světa. Používá se her, hádanek a jednoduchých příběhů, které nabízejí nové cesty k osvojení poznatků a jsou pro žáky atraktivní. Bohatě se využívá šipkových diagramů, tabulek operací, Vennových diagramů, kartézských grafů apod.

Učebnice K 0 se skládá ze 16 kapitol; každá kapitola obsahuje vysvětlující text, cvičení (převážně drilové povahy) a problémové úlohy (pro samostatnou domácí práci), které pokrývají větší úsek učiva. Abychom blíže poznali charakter EMP, v němž K 0 hraje stěžejní roli, uvedme *názvy jednotlivých kapitol knihy K 0*:

- 1 – Operační systémy
- 2 – Celá čísla
- 3 – Množiny, podmnožiny, operace s množinami
- 4 – Uspořádané n -tice
- 5 – Zobrazení
- 6 – Racionální čísla
- 7 – Desetinná čísla
- 8 – Úvod do pravděpodobnosti
- 9 – Úvod do teorie čísel
- 10 – Algebra v operačních systémech
- 11 – Geometrie: Incidence a izometrie
- 12 – Některá témata z pravděpodobnosti a statistiky
- 13 – Algebra reálných funkcí
- 14 – Geometrie: Podobnost, souřadnice, trigonometrie

15 – Některá témata z teorie čísel

16 – Úvod do programování

Z uvedeného seznamu vyplývá, že K 0 skutečně pokrývá nejrozmanitější oblasti matematiky. Poznamenejme ještě jednou, že se v ní nepoužívá žádného formálního jazyka, že se vychází z konkrétních situací a z každodenní zkušenosti žáků. Pozorování, experimentování, intuice, představy a elementární zdůvodňování – to jsou prostředky k seznámení žáků se „světem matematiky“. Ukazuje se totiž, že studenti – i ti nejlepší – mají značné obtíže se skutečným osvojením abstraktních pojmů bez předchozích heuristických zkušeností. Před studiem abstraktních struktur, jako jsou grupy, okruhy, tělesa, vektorové a metrické prostory, potřebují žáci nabyt velkého množství poznatků o modelech těchto struktur v reálném světě. A to je právě cíl úvodní učebnice – ne tedy osvojit si danou problematiku co nejhluběji, ale poznávat a přemýšlet o matematice z nejrůznějších hledisek. V průběhu výuky podle K 0 si studenti zopakují a rozšíří své znalosti o počítání se zlomky, s desetinnými čísly a s procenty. Získají zručnost v užívání jazyků teorie množin, funkcí a relací, setkají se s mnoha problémy z pravděpodobnosti a teorie čísel. Na intuitivním základě (přes řadu praktických zkušeností) poznají mnoho důležitých pojmů z vyšší algebry i geometrie a konečně se naučí základním principům programování na počítačích.

Knihu 0 nemohou žáci studovat samostatně, protože logika a používaný jazyk jsou podrobně zavedeny až v knihách 1–3. Proto výuku podle K 0 řídí učitel. Z toho však nijak nevyplývá, že vyučování má mít klasický ráz. Jednotlivé kapitoly úvodní učebnice jsou koncipovány tak, aby vyvolávaly ve třídě diskuse, které učitel vhodným způsobem usměrňuje. Kromě

toho jsou mnohé celky K 0 psány způsobem, který umožňuje, aby je studenti mohli číst individuálně. Vzhledem k tomu, že jedním z hlavních cílů kladených na výuku podle K 0 je naučit žáky samostatné práci s matematickým textem, jsou studenti k takové práci v co největší míře vedeni. Experimenty ukazují, že optimálních výsledků se dosahuje, když každý student si přečte každou stránku K 0 i několikrát, zejména když se k pasážím, jimž neporozuměl při prvním čtení, znovu vrací po učitelské výkladu.

Druhá a vlastně poslední učebnice EMP, jež se studuje za přímého vedení učitele, je doplňující kniha A – Teorie hlasovacích skupin. Jejím úkolem je seznámit žáky s procesem matematizace a umožnit jim přímou účast na vytváření matematického modelu dané reálné situace. Vychází se z konkrétní problematiky skupiny lidí, která musí na základě hlasování přijmout jistá rozhodnutí. Žáci jsou vedeni k definování potřebných pojmů, např. diktátor, vítězná koalice, právo veta apod. a ke stanovení vhodných axiomů. V rámci modelu se činí závěry a zkoumá se, zda vytvořená teorie plně pokrývá danou problematiku; v případě potřeby se teorie rozšiřuje. Poslední fází je „učesání“ teorie, kdy se studenti snaží dát vybudované teorii přesnou formu axiomatické matematické teorie. Kniha A doplňuje úvodní učebnici v tom smyslu, že žákům ukáže charakteristické etapy procesu matematizace a axiomatizace a že jim usnadní studium dalších knih na axiomatickém základě.

Souběžně s knihou 0 studenti pracují individuálně, bez přímého výkladu učitele, postupně s učebnicemi K 1 až K 3. První čtyři knihy EMP nedávají žákům vyčerpávající obraz o povaze matematiky; jsou to vlastně jakési „protomatematické“ knihy. Intuitivní základy v K 0 na jedné straně

a formální logická výstavba K 1 až K 3 na straně druhé tvoří však dostatečně pevný základ pro další knihy série.

Učebnice K 1 až K 3 jsou zpracovány tak, aby po jejich prostudování žáci rozuměli pojmům formální důkaz a deduktivní výstavba matematiky. Autoři se domnívají, že *hluboké studium logiky na samém začátku programu* – tj. již v sedmé třídě – *usnadňuje pochopení matematických teorií uvedených dále v K 4 až K 12.* Matematické logice je věnována kniha 1 a převážná část knihy 2, zatímco v K 3 se poznatky zde osvojené aplikují na deduktivní výstavbu algebry. Experimentální vyučování prokázalo, že studenti nemají problémy s vytvářením formálních důkazů, že je umějí převést do běžné „koncentrované“ formy a že je dovedou bez obtíží „odzkratkovat“ a pak provést ověření správnosti.

Nezávislé studium podle EMP začíná učebnicí 1, psanou již přesným formálním jazykem, který snižuje na minimum nebezpečí z nedorozumění. Žáci pracují s učebnicemi samostatně, každý svým tempem. Po prostudování jednotlivých partií řeší cvičení a problémové úlohy, jež odevzdávají ke kontrole vyučujícímu. Funkce učitele však není omezena jen na prověřování znalostí žáků, učitel je především „poradním orgánem“. Vztah student-učitel musí být v projektu takový, aby student neměl žádné zábrany žádat učitele o pomoc (např. při studiu některé obtížné pasáže) či radu (při řešení problémových úloh), aby mohl s učitelem volně diskutovat o zobecnění nebo aplikaci toho, co právě studuje. *Studenti se učí nejen matematice, ale též „umění“ o matematice diskutovat* – nejprve s učitelem, později ve skupinách, resp. v celé třídě.

V případech, že se výuka koná podle úplného šestiletého programu (je možné

i zkrácené 2–3leté studium podle EMP), doporučuje se toto rozvržení učiva – při 5 hodinách matematiky týdně:

- 7.–9. tř. – 3 dny výuka podle K 0, 2 dny individuální studium podle K 1 až K 3.
10. tř. – 1 den výuka podle K A, zbývající dny seminární formou K 4
- 11.–12. tř. – seminární, popř. individuální studium podle K 5 a K 6, popř. dalších učebnic série.

Všichni studenti, kteří se učí podle EMP po dobu 6 let, by měli prostudovat alespoň šest prvních knih (kromě K 0). Velké procento je však schopno obsáhnout více. Poněvadž další učebnice jsou v podstatě nezávislé (s výjimkou K 7, jež je nezbytná pro K 12), mohou se studenti rozhodnout podle vlastního zájmu, které oblasti matematiky se chtějí dále věnovat. Doplnující knihu problémů lze používat průběžně po celou dobu studia, knihu C kdykoliv po ukončení základní učebnice K 0.

Dříve než si všimneme *přípravy učitelů pro EMP*, uveďme ještě kritéria, podle nichž se vybírá oněch 10–15% žáků vhodných ke studiu podle tohoto projektu. Lze říci, že rozhodují tyto tři složky:

- a) zájem o matematiku, obecně kladný přístup ke studiu, inteligence;
- b) schopnosti číst (podle standartizovaných testů);
- c) přání žáka učit se podle programu.

Je zřejmé, že *vysoká náročnost programu po stránce matematické i metodické vyžaduje náročně připravené učitele.* Poněvadž se pracuje s nadanými žáky, kteří mají zájem o matematiku, je nezbytné, aby vyučující splňovali stejná kritéria. Učitel, který se má podílet na výuce podle EMP, musí mít dobré matematické znalosti, velký zájem o matematiku (posuzuje se podle dalšího soukromého vzdělávání, publikační činnosti, zapojení do jiných experimentů) a bohaté pedagogické zkušenosti.

Vlastní příprava učitelů pro EMP se uskutečňuje formou *tří letních škol* – každá v délce 7 týdnů. Začíná se studiem osnov a učebních materiálů, přičemž se výuka řídí stylem, který bude učitel sám ve třídě používat (tj. studium K 0 a K A je řízeno přednášejícími, se zbývajícími učebnicemi se učitelé seznamují individuálním studiem, popř. seminární formou). Příprava pokračuje speciálními přednáškami z matematiky, v nichž se rozšiřuje a zobecňuje učivo zahrnuté do programu. V rámci letních škol absolvují učitelé též řadu přednášek z pedagogiky, psychologie a z metodiky výuky podle EMP.

O výzkumném projektu EMP byly vydány dvě studie porovnávací výsledky žáků experimentálních tříd a nadaných žáků, kteří se učí podle klasických osnov. Ukazuje se, že v úlohách týkajících se běžného učiva byli studenti experimentálních tříd pouze o trochu lepší, zatímco v učivu, jež je explicitě zahrnuto do EMP, byli nesrovnatelně úspěšnější. V roce 1975 prošlo experimentální výukou 1250 žáků v 50 třídách; připravuje se další rozšíření experimentu.

Teorie množin je hlavní litanií, kterou intonují všichni obhájci tzv. moderní matematiky. Někteří tvrdí, že užití teorie množin dovoluje úplnou renovaci matematického vyučování a že díky této změně bude průměrný student schopen ovládnout učivo. Není třeba říkat, že je to čistá iluze. Pokud jde o zacházení se zřejmými fakty naivní teorie množin, to ovládne každý. To ale není matematika a dokonce ani logika. Jakmile se student setká se skutečnou matematikou (tj. s reálnými čísly, geometrií, funkcemi), pozná opět, že neexistuje královská cesta a že látce je schopna porozumět jen menšina studentů.

René Thom

Proč vyučovat astronomii?*)

Lucienne Gouguenheimová

Astronomie zaujímá uvnitř fyziky privilegiované místo, protože studuje různá tělesa ve vesmíru, na kterých existují velmi rozmanité fyzikální podmínky: situace astronomie se podobá křižovatce velmi odlišných odvětví fyziky.

Neobyčejná rozmanitost fyzikálních podmínek ve vesmíru vede k tomu, aby se vesmír využíval jako rozšířená pozemská laboratoř. To umožnilo nejen vymezit platnost fyzikálních zákonů, ale ukázat také jejich univerzálnost a všeobecně upřesnit určité fyzikální pojmy. Kromě toho dlouhá historie astronomie vede k tomu, že její studium je zajímavé z hlediska historie idejí a filozofie přírodních věd. Z těchto důvodů má vyučování astronomii veliký vzdělávací a výchovný význam. V dalším chci vymezit některé oblasti, ve kterých se tato úloha astronomie uplatňuje jako hlavní. Tento výčet však nelze považovat za vyčerpávající.

Vesmír — fyzikální laboratoř

Velmi rozmanité a často extrémní fyzikální podmínky ve vesmíru vedou fyziky k využití vesmíru jako výběrové laboratoře. Tato laboratoř umožňuje cenné rozšíření pozemské laboratoře, ve které je rozsah možných změn fyzikálních parametrů mnohem omezenější.

Hmota uvnitř různých objektů, které tvoří vesmír, se vyskytuje ve stavu od kraj-

*) Z časopisu *Bulletin de l'Union des Physiciens* 70 (1976), 584, přeložila MARTA CHYTILOVÁ.