Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jiří Souček; Vladimír Souček; Jana Stará
O 19. a 20. Hilbertově problému

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 22 (1977), No. 3, 139--150

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138224

LIVŠIC I. M.: *Kvazičasticy v sovremennoj fizike*. Priroda 1958, No. 5.
NOKS P.: *Teorija eksitonov*. Mir, Moskva 1966.
SARANCEV V. P.: *Novyj metod uskorenija jadernych častic*. Priroda 1970, No. 6.
SEREBRJAKOV A. V., REDKOVA T. M., LOBANOV V. L.: phys. stat. sol. (a) *14* (1972).
BOGOLJUBOV N. N., TOLMAČEV V. V., ŠIRKOV D. V.: *Novyj metod v teorii sverchprovodimosti*. AN SSSR, Moskva 1958.
LANDAU L. D.: *Sobranie trudov*, t. 1—2. Nauka, Moskva 1969.
PEIERLS R.: *Kvantovaja teorija tverdych tel*. I L, Moskva 1956.
ŠRIFFER DŽ.: *Teorija sverchprovodimosti*. Nauka, Moskva 1970.

Hilbertovy problémy

O devatenáctém a dvacátém Hilbertově problému

Jiří Souček, Vladimír Souček, Jana Stará, Praha

Devatenáctý z Hilbertových problémů se týká vlastností řešení regulárních variačních úloh. Pod regulární variační úlohou se zde rozumí úloha o nalezení minima funkcionálu

$$I(z) = \int F(x, y, z, p, q)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

ve vhodné třídě funkcí, přičemž F je analytická funkce, která na celém definičním oboru splňuje nerovnost

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p\, \partial q}\right)^2 > 0\,. \tag{1}$$

Jestliže body x, y leží v oblasti $\Omega \subset \mathrm{R}_2$, pak minimum je možné hledat ve třídách funkcí z definovaných na Ω; symboly p, q potom značí derivace funkce z podle proměnných x a y. D. HILBERT v zadání problému neomezuje volbu takové třídy funkcí žádnými podmínkami, můžeme však předpokládat, že derivace p a q, které se v definici funkcionálu I vyskytují, byly klasické spojité derivace. Budeme v této souvislosti mluvit o klasickém řešení.

Volba třídy funkcí, v níž hledáme minimum a kterou budeme značit M, je ovlivněna okrajovými podmínkami, které by hledané řešení mělo splňovat na hranici oblasti Ω.

D. Hilbert poukazuje na společný rys několika v té době vyřešených problémů, mezi něž patří rovnice

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\,, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathrm{e}^f\,, \tag{3}$$

které mají analytická řešení, a to i v případě, kdy okrajová podmínka na hranici oblasti je dána pouze spojitou funkcí. Uvádí, že ve všech těchto případech jde o Eulerovy-Lagrangeovy rovnice, které odpovídají regulární variační úloze. K řešení regulárních variačních úloh vedou často i problémy vyskytující se v mechanice, geometrii nebo matematické fyzice. Hilbert klade otázku, zda všechna řešení obecné regulární variační úlohy jsou nutně analytická. Připomeňme krátce, jak souvisí Eulerova-Lagrangeova rovnice s problémem hledání minima funkcionálu I.

Předpokládejme, že hledáme minimum funkcionálu I na množině M, která je částí lineárního prostoru X. Definujeme-li derivaci $\partial I(z, u)$ funkcionálu I v bodě $z \in M$ a ve směru $u \in X$ jako derivaci reálné funkce

$$\varphi : t \in \mathrm{R}_1 \to I(z + tu)$$

v bodě $t = 0$, dá se snadno dokázat analogie známé věty o funkcích jedné reálné proměnné:

Buď X normovaný lineární prostor a buď I funkcionál definovaný na otevřené množině $M \subset X$, který nabývá minima v bodě $z \in M$. Nechť pro $u \in X$ existuje derivace $\partial I(z, u)$ funkcionálu I v bodě z a ve směru u. Potom je tato derivace rovná nule.

Úpravami vztahu $\partial I(z, u) = 0$ dostaneme rovnici

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right), \tag{4}$$

která se obvykle nazývá Eulerova-Lagrangeova rovnice funkcionálu I. Je to parciální diferenciální rovnice druhého řádu; podmínka (1) zaručuje, že jde o rovnici eliptického typu.

Pro rovnici (2) je zřejmě

$$F(x, y, z, p, q) = \tfrac{1}{2}(p^2 + q^2)$$

a pro rovnici (3) je

$$F(x, y, z, p, q) = \tfrac{1}{2}(p^2 + q^2) + \mathrm{e}^z\,.$$

Již za čtyři roky po uveřejnění Hilbertových problémů se objevily práce S. N. Bernsteina [4], [5], v nichž byl 19. problém téměř vyřešen. Bernsteinovi se podařilo podstatně zobecnit metodu postupných aproximací, s jejíž pomocí dokazoval r. 1890 Picard analytičnost řešení rovnice (2), a přenést ji na obecný případ Eulerovy-Lagrangeovy rovnice za předpokladu, že řešení z je třikrát spojitě diferencovatelné. Tento předpoklad se v řadě dalších článků L. LICHTENSTEINA [25], A. HAARA [19], E. HOPFA [20] podařilo zeslabit na předpoklad, že první derivace řešení z jsou α-hölderovské funkce.

Významný krok kupředu znamenaly práce I. G. PETROVSKÉHO [36], [37], kterému se podařilo charakterizovat systémy rovnic libovolného řádu v prostoru libovolné dimenze, které mají tu vlastnost, že každé dostatečně hladké řešení je už analytické. Uvažoval systémy rovnic tvaru

$$F_i(x, \{D^\alpha u\}_{|\alpha| \leq n_i}) = 0\,, \quad i = 1, \ldots, N\,, \tag{5}$$

kde $x \in \Omega \subset R_n$, u je zobrazení z Ω do R_N a je-li $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ n-tice celých nezáporných čísel, značí symbol

$$D^\alpha u_j = \frac{\partial^{|\alpha|} u_j}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\,.$$

(Číslo $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ je řád parciální derivace α.) I. G. Petrovský předpokládal, že funkce F_i jsou analytické a splňují podmínku eliptičnosti ve tvaru

$$\det \left| \sum_{|\alpha| = n_j} \frac{\partial F_i}{\partial \xi_j^\alpha} \eta_1^{\alpha_1} \ldots \eta_n^{\alpha_n} \right| \neq 0 \tag{6}$$

pro každý reálný nenulový vektor $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Dokázal, že je-li splněna podmínka (6), jsou všechna dostatečně hladká řešení soustavy (5) analytická a ukázal na řadě příkladů, že je-li platnost podmínky (6) porušena, existují řešení soustavy (5), která jsou libovolně spojitě diferencovatelná, ale nejsou analytická. Podmínka (6) tak přirozeným způsobem zobecňuje podmínku (1) a pro $N = 1$, $n = 2$, $n_i = 2$ pro $i = 1, 2$ s ní splývá.

I nadále ovšem zůstal otevřený problém, které regulární variační úlohy mají klasické řešení. Bylo například známo, že řešíme-li úlohu o minimální ploše ($F = \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$) na nekonvexní oblasti, může se stát, že řešení neexistuje i pro velmi hladké okrajové podmínky. Ve dvacátém problému klade Hilbert otázku, zda každá regulární variační úloha má pro vhodné okrajové podmínky řešení. Hilbert věří, že tato otázka bude kladně zodpověděna, ale připouští, že k platnosti podobné věty bude možná nutné pojem řešení vhodně zobecnit. Nabízejí se dvě možnosti zobecnění: definovat řešení, které by bylo méně hladké, tj. zobecnit pojem derivace nebo uvažovat řešení úlohy ne jako funkci definovanou na podmnožině v R_n, ale jako plochu v prostoru R_{n+1}.

1. Existence řešení

Vraťme se nyní k prvnímu zobecnění pojmu řešení. Tato myšlenka není nová a od RIEMANNA (r. 1835) se jí zabývala řada matematiků – jmenujme alespoň L. TONELLIHO, B. LEVIHO, J. HADAMARDA – až k současníkům S. L. SOBOLEVOVI a L. SCHWARTZOVI. Velmi zjednodušeně by se dalo říci, že vychází z poznatku, že v řadě fyzikálních úloh potřebujeme o derivaci funkce znát spíše její integrál přes libovolný objem než bodové hodnoty (za příklad můžeme volit hustotu elektrického náboje). Z početního hlediska je pak důležité, aby pro tyto integrály platila Greenova věta. Téměř současně dospěli k velmi podobné definici zobecněné derivace S. L. Sobolev a L. Schwartz.

Označme $L_p(\Omega)$ prostor všech měřitelných funkcí na Ω, pro něž je $\int_\Omega |f|^p$ konečný. Řekneme, že funkce $f \in L_p(\Omega)$ má zobecněnou derivaci $g \in L_p(\Omega)$, jestliže pro každou nekonečně diferencovatelnou funkci φ s kompaktním nosičem v Ω platí

$$\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_\Omega \varphi g \, .$$

Analogicky je možné definovat derivace vyšších řádů. Roli prostorů spojitě diferencovatelných funkcí převezme Sobolevův prostor $W_p^k(\Omega)$, což je množina všech funkcí $f \in$ $\in L_p(\Omega)$, pro něž existují všechny zobecněné derivace v prostoru $L_p(\Omega)$ až do řádu k včetně. Ukazuje se, že výsledky se podstatně liší v závislosti na indexu p Sobolevova prostoru W_p^k, v němž hledáme řešení. Zabývejme se nyní případem, kdy $p > 1$.

Zvolíme-li podle okrajové úlohy, kterou je třeba řešit podmnožinu M v Sobolevově prostoru, nazveme slabým nebo zobecněným řešením regulární variační úlohy minimum funkcionálu I na množině M.

Metod k důkazu existence slabého řešení je velmi mnoho. Jedna z nejpřirozenějších je metoda variační. Opět velmi zjednodušeně lze říci, že zobecňuje známou větu o reálných funkcích a to větu: Každá spojitá funkce na kompaktní množině nabývá svého minima. Ovšem zatímco v prostorech konečné dimenze je každá omezená a uzavřená množina kompaktní, je kompaktních množin v nekonečně dimenzionálních prostorech velmi málo, lépe řečeno nejsou příliš zajímavé. Jedním řešením je uvažovat na normovaném prostoru X kromě topologie dané normou ještě tak zvanou slabou topologii, tj. topologii, ve které posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k prvku x, právě když pro každý spojitý lineární funkcionál h na prostoru X platí $h(x_n) \to h(x)$. V této topologii je třída kompaktních množin v Sobolevově prostoru dostatečně široká a rovněž dosti široká třída funkcí F splňuje předpoklady, postačující k existenci minima. Velmi pěkný výklad této metody je v knize M. M. Vajnberga [47].

Označíme-li T zobrazení, které funkci $f \in M$ přiřadí

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\right) - \frac{\partial F}{\partial z},$$

vidíme, že z je řešením rovnice (4), právě když $T(z) = 0$ nebo z je pevným bodem zobrazení $1 - T$ (1 je identické zobrazení na M). (Řekneme, že z je pevným bodem zobrazení $1 - T$, jestliže $(1 - T)(z) = z$.) Řešitelnost rovnice (4) lze dokazovat použitím vět o pevném bodu — ať klasické věty Banachovy, nebo jejího zobecnění na zobrazení spojitá ve slabé topologii (J. Schauder [42]).

Jinou metodu k řešení rovnice $T(z) = 0$ použil J. Schauder v článku [41]. Sestrojíme množinu zobrazení $\{T_t\}_{t \in \langle 0,1 \rangle}$ tak, aby spojitě závisela na parametru t, T_1 bylo rovno původnímu T a rovnice $T_0(z) = 0$ byla jednoduše řešitelná. Označíme τ množinu všech $t \in \langle 0, 1 \rangle$, pro něž je rovnice $T_t(z) = 0$ řešitelná a chceme dokázat, že $1 \in \tau$. Je jasné, že $0 \in \tau$, stačí tedy dokázat, že τ je současně otevřená i uzavřená v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Protože interval $\langle 0, 1\rangle$ je souvislý, je pak nutně $\tau = \langle 0, 1\rangle$. Tvrzení, že τ je otevřená lze zpravidla dokázat použitím vět o pevném bodu; k důkazu, že τ je uzavřená, je zpravidla zapotřebí tak zvaný apriorní odhad řešení. Tento apriorní odhad ukazuje, že je-li z řešením rovnice (4) a leží ve vhodně zvoleném prostoru X, pak jeho normu v X je možné odhadnout číslem, které závisí pouze na Ω, okrajových podmínkách a funkci F z rovnice (4). Jestliže potom $t_j \in \tau$ a $t_j \to t_0$, existují podle předpokladu řešení z_j rovnic $T_{t_j}(z_j) = 0$. Apriorní odhad pro z_j ukazuje, že $\{z_j\}$ tvoří kompaktní množinu v prostoru X a limita vhodně vybrané posloupnosti je potom řešením rovnice $T_{t_0}(z) = 0$.

Jiná existenční metoda je založena na zobecnění Brouwerovy věty o pevném bodu na prostory nekonečné dimenze. Předpokládejme, že zobrazení $K = 1 - T$ je spojité a zobrazuje každou omezenou množinu v X do kompaktní množiny. (Taková zobrazení se nazývají totálně spojitá nebo kompaktní.) Je-li ω omezená oblast v X, T je definováno na uzávěru množiny ω a různé od nuly na hranici ω, definují J. Leray a J. Schauder [24] stupeň d zobrazení T vzhledem k množině ω. (Stupeň d je, intuitivně řečeno, počet kořenů zobrazení T v množině ω.) Podstatné je, že je-li stupeň $d(T, \omega) \neq 0$, pak T má v oblasti ω alespoň jeden kořen. Důležitá vlastnost stupně je invariance: stupeň se nemění, jestliže se T spojitě transformuje tak, že žádné kořeny zobrazení T v průběhu transformace neleží na hranici $\partial\omega$. Můžeme dokazovat existenci řešení tak, že zobrazení T spojitě deformujeme na zobrazení T_0 tak, aby se na hranici nevyskytly žádné kořeny a aby stupeň $d(T_0, \omega) \neq 0$.

Každá z těchto metod klade nějaké požadavky na hladkost slabého řešení úlohy. Je to předpoklad o slabé spojitosti zobrazení T v Schauderově větě o pevném bodu, apriorní odhad nebo totální omezenost v definici stupně zobrazení. Dostáváme se takto k širšímu pojetí problému regularity: Do jaké míry diferenciální vlastnosti řešení uvnitř oblasti Ω (případně na uzávěru $\bar{\Omega}$) závisí pouze na funkci F (případně na hranici oblasti a okrajových podmínkách) a nezávisí na výběru prostoru, v němž dokazujeme existenci řešení?

2. Regularita řešení

V plné obecnosti je odpověď na otázku regularity řešení negativní. V r. 1968 sestrojili E. Giusti a M. Miranda [17] příklad, v němž $\Omega = \{x \in R_n; |x| < 1\}$ $(n \geqq 3)$, funkcionál I je definován pomocí funkce

$$F(\{z_i\}_{i=1}^n, \{p_{ij}\}_{i,j=1}^n) = \sum_{i,j=1}^n p_{ij}^2 + \left(\sum_{i,j=1}^n \left(\delta_{ij} + \frac{4}{n-2}\,\frac{z_i z_j}{1 + (|z|)^2}\right) p_{ij}\right)^2,$$

která je analytická, a slabým řešením Dirichletovy okrajové úlohy je funkce

$$z(x) = \frac{x}{|x|},$$

která není ani spojitá uvnitř oblasti Ω. Eulerova-Lagrangeova rovnice tohoto funkcionálu v bodě z přitom splňuje podmínku (6) z článků I. G. Petrovského, ovšem derivace $\partial I(u, v)$ funkcionálu I neexistuje v žádném bodě u Sobolevova prostoru $W_2^1(\Omega)$. Pro malé dimenze $(n < 30)$ se ovšem nepodařilo dokázat, že funkce z je jediným řešením variační úlohy a není jasné, zda úloha kromě tohoto nespojitého řešení nemá ještě jiné, klasické. Mnohé další protipříklady sestrojili V. G. MAZJA [26] a I. V. SKRYPNIK [44]. V současné době je známý protipříklad (viz J. NEČAS [33]), který má pouze neregulární řešení už pro dimenze $n \geqq 5$ a je diferencovatelný na celém prostoru ($n \geqq 5$).

Ve všech těchto příkladech je množina bodů, v nichž řešení není hladké, jednobodová. Snadno se sestrojí příklad, v němž tato množina je konečná nebo spočetná. Vznikla tak otázka, jak velká může být množina neregulárních bodů. V r. 1968 dokázal CH. B. MORREY, že za jistých předpokladů na funkci F existuje uzavřená množina $S \subset \Omega$ tak, že řešení má spojité derivace na množině $\Omega \setminus S$ a Lebesgueova n-dimenzionální míra množiny S je nulová. Tento výsledek zlepšili E. Giusti a M. Miranda [18], kteří dokázali, že dokonce jemnější Hausdorffova míra H_{n-1} množiny S je rovná nule.

Chceme-li v obecném případě dokázat, že řešení regulární variační úlohy je analytické, je třeba podobně jako v původní Bernsteinově práci předpokládat nějakou dodatečnou diferencovatelnost tohoto řešení. Tyto postačující podmínky se podařilo podstatně zeslabit: od článku Ch. B. Morreye [27], který předpokládal, že z je funkce splňující Lipschitzovu podmínku, přes práce O. A. LADYŽENSKÉ a N. N. URALCEVY [22], [23], kde se předpokládá, že funkce z je omezená a jde o jednu rovnici, až ke knize I. V. SKRYPNIKA [44], kde za předpokladu, že funkce z leží v Sobolevově prostoru $W_p^m(\Omega)$ a $\Omega \subset \mathrm{R}_n$, přičemž indexy m, n, p splňují rovnost $mp = n$, se dokáže, že funkce z je spojitá.

Obraťme se nyní ke speciálním případům, pro něž věty o regularitě platí bez jakýchkoli dodatečných podmínek na řešení z. Důkazové metody se dají – opět velmi zhruba – rozdělit na dvě skupiny.

V první z těchto metod se dokazuje, že řeší-li funkce z regulární variační úlohu, pak diferenční podíl

$$\Delta_h z(x) = \frac{z(x+h) - z(x)}{|h|}$$

řeší jistou lineární diferenciální rovnici, která má velmi špatné koeficienty. Obecně můžeme říci jenom, že to jsou omezené měřitelné funkce a i to jen v případě, že růst funkce F v proměnných p a q je kvadratický. Tím je problém regularity řešení nelineární Eulerovy--Lagrangeovy rovnice s analytickými koeficienty převeden na problém regularity řešení lineární rovnice s omezenými měřitelnými koeficienty. V r. 1957 dokázali nezávisle na sobě E. DE GIORGI [12] a J. NASH [32], že je-li funkce $z \in W_2^1(\Omega)$ řešením rovnice

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\,\frac{\partial z}{\partial x_j}\right) = f$$

s omezenými měřitelnými koeficienty a_{ij}, které splňují podmínku stejnoměrné eliptičnosti (tj. existuje $\varkappa > 0$ tak, že pro všechna $\eta \in \mathrm{R}_n$ je

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\eta_i\eta_j \geqq \varkappa|\eta|^2\,),$$

pak první derivace funkce z jsou α-hölderovské. Použitím tohoto výsledku se dokáže, že $\Delta_h z$ řeší lineární rovnici s hölderovskými koeficienty a dalším užitím hlubokých vět o regularitě řešení lineárních rovnic s hladkými koeficienty (viz S. AGMON, A.DOUGLIS, L. NIRENBERG [2]) se dostane analytičnost slabého řešení. Není-li růst rovnice kvadratický, jde-li o systémy nebo o vyšší řád rovnice, dají se vzniklé problémy překonat, je-li oblast Ω rovinná (viz J. NEČAS [34], J. STARÁ [46]).

Druhá metoda využívá vhodné volby funkcí u přímo v rovnosti $\partial I(z, u) = 0$; čtenář se o ní může poučit v pracích Ch. B. Morreye [27], [28], [29], E. De Giorgiho [12].

Závěrem můžeme shrnout, že věty o regularitě slabých řešení platí buď pro jednu rovnici druhého řádu na oblasti $\Omega \subset R_n$ s libovolně velkým n, nebo pro systém rovnic libovolného řádu, ale pouze na oblasti $\Omega \subset R_2$. Pro variační úlohy vyššího řádu na oblastech $\Omega \subset R_n$ s $n \geqq 5$ věty o regularitě v plné obecnosti neplatí. V případě $n = 3, 4$ zůstává problém nadále otevřený.

3. Minimální plochy

Obraťme se nyní k jednomu speciálnímu regulárnímu (ve smyslu Hilbertově) variačnímu problému. Právě tak jak Laplaceova rovnice (2) reprezentuje celou třídu rovnic s podobnými vlastnostmi, je rovnice minimální plochy

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)}}\right)=0 \tag{7}$$

prototyp jiné třídy diferenciálních rovnic, jejichž řešení mají vlastnosti odlišné od vlastností řešení rovnic typu (2). Rovnice (7) je Eulerova-Lagrangeova rovnice funkcionálu

$$I(f)=\int_\Omega\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \tag{8}$$

kde $f \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ (tj. funkce f má spojité první parciální derivace v Ω a sama je spojitá v $\bar{\Omega}$). Číslo $I(f)$ má význam povrchu plochy, dané grafem funkce $z = f(x, y)$, kde $(x, y) \in \Omega$.

Důvod jiného chování řešení rovnice (7) je ve zvláštní nelinearitě rovnice minimální plochy (7). Přesněji, budeme-li uvažovat kvazilineární eliptickou rovnici

$$a\left(x, y, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2b\left(x, y, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+c\left(x, y, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0\,, \tag{9}$$

kde $ac - b^2 > 0$, $a > 0$, pak podstatná vlastnost koeficientů a, b, c, podle níž se řídí chování řešení rovnice (9), je růst kvadratických forem

$$F_1(x, y, p, q) = ap^2 + 2bpq + cq^2\,,$$

$$F_2(x, y, p, q) = (a + c)(p^2 + q^2)$$

pro p, q jdoucí do nekonečna. Řekneme, že růst kvadratické formy je v bodě (x, y) roven číslu α, jestliže existují konstanty $m \in \langle 1, \infty)$, $\varrho > 0$ tak, že

$$(1/m)(p^2 + q^2)^{\alpha/2} \leqq F(x, y, p, q) \leqq m(p^2 + q^2)^{\alpha/2}$$

pro všechna p, q; $p^2 + q^2 \geqq \varrho$. Jestliže kvadratické formy F_1 (resp. F_2) mají růst α_1 (resp. α_2) stejný pro všechna (x, y) z uvažované oblasti, pak charakter řešení rovnice (9) je určen číslem $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$. Pro Laplaceovu rovnici je $\alpha = 0$, pro rovnici minimální plochy je $\alpha = 2$. Dá se říci, že předěl rozdělující rovnice (9) na dvě skupiny je číslo $\alpha = 1$.

Je zajímavé si uvědomit některé podstatně odlišné vlastnosti řešení rovnic (2) a (7), které reprezentují tyto skupiny.

1. Odstranitelné singularity

Existuje řešení $f(x, y)$ rovnice (2) na jednotkovém kruhu K v R_2 s vyňatým počátkem, které nelze prodloužit do počátku (tj. neexistuje řešení $\tilde{f}$ rovnice (2) na celém K takové, že $\tilde{f} = f$ na $K \setminus \{(0, 0)\}$). Je možné vzít $f(x, y) = \log (x^2 + y^2)^{1/2}$. Naopak každé řešení rovnice (7) na $K \setminus \{(0, 0)\}$ je restrikcí nějakého řešení rovnice (7) na celém K (viz [8]).

2. Konečnost odpovídajícího funkcionálu

Existuje řešení $f(x, y) \in C^2(K) \cap C(\bar{K})$ (tj. dvakrát spojitě diferencovatelná funkce uvnitř jednotkového kruhu, kterou lze spojitě prodloužit na uzávěr $\bar{K}$), pro které je (viz [21])

$$\int_K \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = +\infty\,.$$

Zřejmě toto řešení rovnice (2) nelze získat pomocí variační metody. Naopak graf každého řešení $f(x, y) \in C^2(K) \cap C(\bar{K})$ rovnice (7) má konečný povrch, tj.

$$\int_K \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y < \infty$$

(viz J. C. C. Nitsche [35]).

3. Bernsteinova věta

Zřejmě existuje funkce $f(x, y)$ řešící rovnici (2) v celé rovině, která není lineární (např. $f(x, y) = xy$). Pro řešení rovnice (7) platí Bernsteinova věta: Každé řešení $f \in C^2(R_2)$ rovnice (7) na celém R_2 je nutně lineární (viz [7]).

Konečně další podstatná odlišnost řešení rovnic (7) a (2) je řešitelnost Dirichletova problému. Vzhledem k tomu, že to je vlastně obsah 20. Hilbertova problému, věnujeme této otázce více místa.

4. Řešitelnost Dirichletova problému

Otázky existence řešení rovnic typu (2) byly už podrobně rozebrány; pro širokou třídu rovnic, oblastí a okrajových podmínek je dokázána existence (případně slabého) řešení s tím, že hladkost řešení je dokázána až na jistou malou množinu neregulárních bodů. Pro třídu rovnic typu (7) je situace jiná. Budeme-li Hilbertův problém brát doslovně, pak Eulerova-Lagrangeova rovnice (7) funkcionálu (8) pro některé oblasti Ω a jisté okrajové podmínky nemá ani klasické ani slabé řešení a je to příklad ukazující, že řešení tohoto Hilbertova problému je v tomto smyslu negativní. V širším smyslu, nahradíme-li funkcionál (8) funkcionálem (10) definovaným pro parametrické plochy, lze dokázat existenci řešení v zobecněné třídě ploch. Rozebereme nyní tyto otázky podrobněji.

První příklad oblasti a okrajové podmínky, pro niž (7) nemá řešení (klasické), byl uveřejněn již v r. 1912 Bernsteinem [6]. Základní myšlenka protipříkladu je tato: Označme

$$\psi(x, y) = -\operatorname{arc\,cosh} \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

funkci definovanou vně jednotkového kruhu. Funkce ψ řeší rovnici (7) a má tu zvláštnost, že jednostranné derivace podle normály v bodech jednotkové kružnice jsou rovny $+\infty$. Princip maxima, platící obvykle pro řešení regulárních variačních úloh, se podařilo Bernsteinovi pomocí funkce ψ zobecnit takto:

Nechť pro jednoduchost $\Omega = \{(x, y) \in R_2;\ x > 0, y > 0, 1 < x^2 + y^2 < 2\}$. Označme T tu část $\partial\Omega$, která leží na jednotkové kružnici. Pak platí:

Je-li $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ řešení rovnice (7) na Ω, pro které platí $u(x, y) \leqq \psi(x, y)$ na $\partial\Omega \setminus T$, pak už tato nerovnost platí na celé $\partial\Omega$, a tedy i na $\bar{\Omega}$.

Tím už je konstrukce hledané okrajové podmínky jasná. Zřejmě existuje spojitá funkce f na $\partial\Omega$ taková, že $f = \psi$ na $\partial\Omega \setminus T$ a že $f(x, y) > 0$ alespoň v jednom bodě $(x, y) \in T$. Existence řešení rovnice (7) s okrajovou podmínkou f by byla ve sporu s výše uvedeným principem maxima, neboť $\psi = 0$ na T. Stejná situace je i pro slabé řešení; přirozeným prostorem, kde je třeba hledat slabá řešení, je Sobolevův prostor $W_1^1(\Omega)$; ukazuje se však, že pro výše uvedenou okrajovou podmínku f neexistuje ani slabé řešení rovnice (7) (viz V. Souček [45]). Později se ukázalo (M. Giaquinta, J. Souček [16]), že mechanismus Bernsteinova protipříkladu (tj. princip maxima pro speciální řešení) je jedinou příčinou neexistence slabého řešení.

Obecně se dá ukázat, že pro každou nekonvexní oblast v rovině s rozumnou hranicí lze najít spojitou okrajovou podmínku, pro niž klasické řešení Dirichletova problému neexistuje (viz [35], str. 203). Naopak pro spojité okrajové podmínky na konvexní oblasti byla existence klasického řešení dokázána nedlouho po uveřejnění Hilbertových problémů (viz T. Radó [38]).

Funkcionál (8) má přirozené zobecnění i pro R_n s $n > 2$. V tomto případě lze existenci klasického řešení dokázat pro oblasti, jejichž hranice má kladnou střední křivost (viz H. Jenkins, J. Serrin [40]). Podmínka nezáporné střední křivosti zobecňuje pro $n > 2$ podmínku konvexity oblasti, pro $n = 2$ s ní splývá. Problém regularity řešení rovnice (7) byl řešen kladně v tomto smyslu: Jestliže existuje pro příslušnou okrajovou podmínku řešení rovnice (7) ať slabé nebo klasické, pak je nutně analytické v Ω.

Úloha najít minimum funkcionálu (8) se zadanou okrajovou podmínkou má svůj konkrétní fyzikální obsah. Jestliže křivku (graf funkce zadávající okrajovou podmínku) v R_3 skutečně vyrobíme z drátu a ponoříme do roztoku glycerínu, vytvoří se na drátu po vytažení plocha, která je právě plocha s nejmenším povrchem. V tomto fyzikálním smyslu je ovšem nepřirozená podmínka, že plocha musí být grafem funkce $z = f(x, y)$. Fyzikální úloze odpovídá spíše tzv. Plateaův problém:

Nechť S je parametricky zadaná plocha, tj. nechť S je obraz oblasti $\Omega \subset R_2$ při zobrazení $s : \Omega \to R_3$

$$(u, v) \to (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) ,$$

kde x, y, z jsou spojitě diferencovatelné funkce proměnných u, v. Povrch plochy je potom dán číslem

$$(10) \qquad I(S) = \int_\Omega \left\{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right] - \right.$$
$$\left. - \left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right]\right\} \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, .$$

Plateaův problém je úloha najít parametricky zadanou plochu S, jejíž povrch je nejmenší mezi všemi parametrickými plochami s toutéž okrajovou podmínkou (tj. pro něž $s(\partial\Omega)$ je zadaná křivka v R_3). Plateaův problém byl v R_3 vyřešen J. Douglasem [13] pro okrajovou podmínku zadanou libovolnou Jordanovou křivkou v R_3 a později (viz J. Douglas [14]) i pro okrajovou podmínku tvořenou více křivkami s restrikcemi topologického typu na hledané řešení. Zvolíme-li křivku v R_3 zadanou okrajovou podmínkou, pro niž úloha (7) nemá klasické ani slabé řešení, má Plateaův problém řešení ve třídě parametrických ploch.

Obdobná úloha v R_n s $n > 3$ se ukázala být mnohem obtížnější a její řešení bylo dramatické a překvapující. V rámci klasické teorie se tento problém nepodařilo vyřešit. Teprve podstatné zobecnění pojmu plochy umožnilo dokázat existenci jistého zobecněného parametrického řešení. Byli to Federer a Fleming [15], De Giorgi [10] a Reifenberg [39], kteří v roce 1960 nezávisle na sobě a různým způsobem dokázali takovouto existenční větu. Kterékoliv z těchto zobecněných řešení ovšem zdaleka nebylo hladkou plochou a dalších devět let se práce v této oblasti soustředila na důkaz regularity řešení. Přesněji bylo třeba dokázat, že každá $(n - 1)$-rozměrná zobecněná minimální plocha je analytická v každém svém bodě. Toto tvrzení bylo dokázáno pro $n = 4$ v roce 1966 (Almgren [3]) a pro $n = 5, 6, 7$ v roce 1968 (Simons [43]). Další postup v řešení problému byl spojen s Bernsteinovou větou: Funkce $f(x_1, \ldots, x_{n-1})$ definovaná na R_{n-1}, jejíž graf je minimální plocha, je už nutně lineární. Nejpřesněji byla tato souvislost ukázána v [11] v roce 1965: Platí-li tvrzení o regularitě pro $(n - 2)$-dimenzionální plochy v R_{n-1}, pak Bernsteinova věta platí v R_n (tj. pro funkce $(n - 1)$ proměnných). Z výsledků Almgrena a Simonse tedy plyne platnost Bernsteinovy věty pro $n \leqq 8$. V té době už asi všichni věřili, že je jen otázka času, kdy tvrzení o regularitě a Bernsteinova věta budou dokázány pro libovolné n. Překvapující bylo, když v roce 1969 Bombieri, De Giorgi a Giusti [9] dokázali, že Bernsteinova věta neplatí pro $n = 9$ a tvrzení o regularitě neplatí pro $n = 8$! Tento důkaz (velice hluboký a pěkný) definitivně uzavřel problém regularity minimálních ploch a tím zároveň i problém existence klasického řešení ve vyšších dimenzích. Obecně nalezené řešení není klasické, dá se pouze dokázat, že množina singularit není v jistém smyslu příliš veliká.

Literatura

[1] *Problemy Hilberta*. Nauka, Moskva 1969.

[2] Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.: *Estimates near boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I, II*. Comm. Pure Appl. Math. *12* (1959), 623/727 *17* (1964), 35—92.

[3] Almgren F. J.: *Some interior regularity theorems for minial surfaces and an extension of Bernstein Theorem*. Ann. of Math. *85* (1965), 277—292.

[4] Bernstein S. N.: *Sur la nature analytique des solutions de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre*. CR Acad. Sci *137* (1903), 778—781.

[5] Bernstein S. N.: *Sur la nature analytique des solutions de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre*. Math. Ann. *59* (1904), 20—76.

[6] Bernstein S. N.: *Sur les équations du calcul des variations*. Ann. Sci. École Normal Sup., *29* (1912), 431—485.

[7] Bernstein S. N.: *Über ein geometrisches Theorem und seine Anwendung auf die partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus*. Math. Zeit, *26* (1927), 551—558.

[8] Bers L.: *Isolated singularities of minimal surfaces*. Ann. of Math. *53*, (1951), 364—386.

[9] Bombieri E., De Giorgi E., Giusti E.: *Minimal cones and the Bernstein theorem*. Invent. Math. *7*, (1969), 243—269.

[10] De Giorgi E.: *Frontiere orientate di misura minima*. Seminario di Matematica, Scuola Norm. Sup. di Pisa 1960—61, 1—56.

[11] De Giorgi E.: *Una estensione del teorema di Bernstein*. Ynn. Scuola Norm. Sup. di Pisa, *19* (1965), 79—85.

[12] De Giorgi E.: *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari*. Mem. Acad. Sci. Torino *3* (1957), 25—43, Matematika *4* (1960), 25—38.

[13] Douglas J.: *Solution of the problem of Plateau*. Trans. Amer. Math. Soc. *33*, (1931), 263—321.

[14] Douglas J.: *Minimal surfaces of higher topological structure*. Ann. of Math. *40* (1939), 205—298.

[15] Federer, Fleming: *Normal and integral currents*. Ann. of Math. *72* (1960), 458—520.

[16] Giaquinta M., Souček J.: *Esistenza per il problema dell'area e controesempio di Bernstein*. Boll. Un. Mat. Ital. *9* (1974), 807—817.

[17] Giusti E., Miranda M.: *Un esempio di soluzioni discontinue per un problema di minimo relativo ad un integrale regolare del calcolo delle variazioni*. Boll. Un. Mat. Ital. (4) 1, 1968, 219—227.

[18] Giusti E., Miranda M.: *Sulla regolarità delle soluzioni di una classe di sistemi ellittici quasi linneari*. Archive of Rat. Mech. and Anal. *31* (1968).

[19] Haar A.: Math. Ann. *97* (1926), 124—158.

[20] Hopf E.: *Zum analytischen charakter der Lösungen regulärer zweidimensionaler Variationsprobleme*. Math. Zeit. (30), 404—413.

[21] Kurant: *Princip Dirichle, konformnyje otobraženija i minimal'nyje pověrchnosti*. Moskva 1953.

[22] Ladyženskaja O. A., Uralceva N. N.: *Linějnyje i kvazilinějnyje eliptičeskije uravněnija*.Nauka, Moskva 1964.

[23] Ladyženskaja O. A., Uralceva N. N.: *On the smoothness of weak solutions of quasi linear equations in several variables and of variational problem*. Comm. Pure Appl. Math. *14* (1961), 481—495.

[24] Leray J., Schauder J.: *Topologie et équations fonctionelles*. Ann. Sci. École Norm. Sup. *51* (1934), 45—78.

[25] LICHTENSTEIN L.: Bull. de l'Acad. de Sc. de Cracovie (A) 1912, 915—941.
[26] MAZJA V. G.: *Primeri neregularnych rešenij kvazilinějnych eliptičeskich uravněnij s analitičeskimi koeficientami.* Funkc. Analiz i jego pril. *2* (1968), 53—57.
[27] MORREY CH. B.: *On the solutions of quasi linear elliptic partial differential equations.* Trans. Amer. Math. Soc. *43* (1938), 127—166.
[28] MORREY CH. B.: *Multiple integral problems in the calculus of variations.* Univ. Calif. Publ. 1943, Springer Verlag 1966.
[29] MORREY CH. B.: *On the analyticity of the solutions of analytic nonlinear elliptic systems of partial differential equations.* Amer. J. Math. *80* (1958), 198—237.
[30] MORREY CH. B.: *Partial regulatity results for nonlinear elliptic systems.* J. Math. Mech. *17* (1968), 649—670.
[31] MOSER J.: *A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equation.* Comm. Pure Appl. Math *13* (1960), 457—468.
[32] NASH J.: *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations.* Amer. J. Math. *80* (1958), 931—954.
[33] NEČAS J.: *Example of an irregular solution to a nonlinear elliptic system with analytic coefficients and conditions for regularity.* Proc. Summer School on Nonlinear Analysis, Berlin, 1975.
[34] NEČAS J.: *Sur la méthode variationnelle pour les équations aux dérivées partielles non linéaires du type elliptique; l'éxistence et la régularité des solutions.* Com. Math. Univ. Carolinae 7 (1966), 301—317.
[35] NITSCHE J. C. C.: *On new results in the theory of minimal surfaces.* Bull. Amer. Math. Soc. *71*, (1965), 195—270.
[36] PETROVSKÝ I. G.: *O sistemach diferencialnych uravnenij vse rešenija kotorych analitičny.* DAN SSSR *17* (1937), 339—342.
[37] PETROVSKÝ I. G.: *Sur l'analyticité des solutions des systémes d'équations différentielles.* Matem. Sb. *47* (1939), 3—68.
[38] RADÓ T.: *The problem of the least area and the problem of Plateau.* Math. Z. *32* (1930), 763—796.
[39] REIFENBERG E. R.: *Solution of the Plateau problem for m-dimensional surfaces of varying topological type.* Acta Math. *104*, (1960), 1—92.
[40] H. JENKINS, J. SERRIN: *Minimal surface equation in higher dimension.* Jour. für die Reine und Ang. Math. *229* (1968), 170—187.
[41] SCHAUDER J.: *Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung.* Math. Z. *38* (1934), 257—282.
[42] SCHAUDER J.: *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen.* Studia Math. *2* (1930), 171—180.
[43] SIMONS J.: *Minimal varieties in riemanian manifolds.* Ann. of Math. *88* (1968), 62—105.
[44] SKRYPNIK I. V.: *Nělinějnyje eliptičeskije uravněnija vysševo porjadka.* Kijev, 1973.
[45] SOUČEK V.: *The nonexistence of a weak solution of Dirichlet's problem for the functional of minimal surface on nonconvex domains.* Com. Math. Univ. Carolinae *12* (1971), 723—726.
[46] STARÁ J.: *Regularity results for non-linear elliptic systems in two dimensions.* Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa *25* (1971), 163—190.
[47] VAJNBERG M. M.: *Variacionnyje metody issledovanija nělinějnych operatorov.* Moskva 1956.