Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Peter Hilton

Co je moderní matematika?

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 22 (1977), No. 3, 151--164

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138223

Co je moderní matematika?*)

Peter Hilton, Seattle

1. Úvod

Sledujeme-li soudobé vyučování matematice, zjistíme, že jeho nejvýraznějším rysem je všeobecný ústup od reforem. *Studijní skupina pro školskou matematiku* (School Mathematics Study Group) v Americe již neexistuje a od reforem, které má na svědomí, se upouští na všech stranách. Optimismus čišící z doporučení *Cambridžské konference o školské matematice* (Cambridge Conference on School Mathematics), uveřejněných pod názvem *Cíle školské matematiky* (Goals for School Mathematics), postupně vymizel a doporučení sama již nepřipadají vůbec jako utopická, ale mnohým se zdají být nemožná. Útoky proti tak zvané *nové* nebo *moderní matematice* jsou vedeny ze všech stran. Objevují se všemožné námitky. Kritérium, které je v nich obsaženo, totiž dosažení určité vyspělosti matematického myšlení u většiny studentů, je jistě v pořádku. To však neznamená, že jsou v pořádku i námitky. Víme například, že podle tohoto kritéria byla dosud matematická výchova bezúspěšná, z toho však neplyne, jak si leckdo myslí, že na tom má vinu reforma osnov. Navíc přicházejí námitky většinou od osob (hlavně rodičů), kterým je nemilé, že nerozumějí ani jazyku moderní elementární matematiky. Tito lidé podléhají přirozené snaze zbavit se všeho neznámého, co je znepokojuje, všeho, co jim odhaluje jejich nedostatky a chyby a co jim kazí náladu.

Dnes existuje skutečné nebezpečí hromadné protireformace v matematické výchově. Jak jsem již řekl, pohnutky protireformátorů nejsou vždy čisté. Avšak i při ryzí snaze o zvýšení úrovně vyučování mohou předsudky a zaujatost vést snadno k znetvoření osnov i ve jménu tak závažných hesel jako *školou ke skutečnosti* nebo *škola pro život.*

Mnoho těchto předsudků pramení z obrazu, jaký si kdo o nové matematice utvořil podle své předchozí výchovy a podle svých představ o funkci výchovy. Zdá se mi, že není možno pečlivě rozebrat sporné otázky vyvolané existencí moderní matematiky a nevšimnout si blíže moderní matematiky samé. Jaké jsou významné rysy moderní matematiky? Kolik z toho, co se probírá ve škole jako moderní matematika, připadá na vrub tvůrcům osnov a kolik z toho lze připsat nedorozumění mezi nimi a učiteli, kterým ji připadlo (avšak bez přiměřené přípravy) učit? Tento článek je míněn jako příspěvek k porozumění tomuto problému. Domnívám se, že by bylo užitečné pro vážné nejasnosti v pojmech *nová matematika, moderní matematika* pokusit se o jejich dostatečně přesné definice a hlavně rozlišovat mezi teorií a současnou praxí.

Budeme postupovat v tomto článku tak, že probereme názory tří vedoucích pracovníků, kteří se vážně zabývají problémy moderní matematiky, a to jak problémy vědecké tak pedagogické práce na všech úrovních. V druhé části rozebereme názory Morrise Klina vyjádřené v jeho knize

*) Text přednášky prof. P. Hiltona, kterou proslovil na Univerzitě Karlově v Praze dne 6. 12. 1975.

Proč neumí Honzík počítat. Je to soustředěný útok na moderní matematiku pro široký okruh čtenářů. Svízel je v tom, že Kline pomíchal některé otázky a zaměnil příčiny s důsledky, kterých si jistě vnímavě všiml, ale především je odpudivě popsal. V třetí části uvedeme názory RENÉ THOMA a JEANA DIEUDONNÉ zachycené ve dvou článcích v časopise *American Scientist* (1971 a 1973). Oba články byly přetištěny ve sbírce *Mathematiker über Mathematik* (Springer, 1974). Diskuse v nich je určena zcela jinému posluchačstvu: matematikům a teoretikům, kteří mají slušné znalosti pokročilé matematiky. Thom však často přechází na hluboké filozofické otázky, které ztěžují čtenáři porozumění. Ačkoliv argumentace je pochopitelně jiná než v Klinově knize, shodují se v zásadě oba ve svých útocích proti moderní matematice. Odpověď J. Dieudonné měla sice zavrhnout názory René Thoma, přejala však mnoho z ostré kritiky především praxe moderní matematiky.

V tomto článku předkládám komentář k těmto příspěvkům a pokouším se postavit do ostrého světla skutečné problémy a rozlišovat mezi tím, co bylo cílem nové matematiky, co mělo být jejím cílem a jak to ve skutečnosti dopadlo. Je nesporné, že se tvůrci nové matematiky dopustili vážných omylů. Nelze však ani v nejmenším dopustit, aby se tyto omyly staly záminkou k popření a opuštění významného pokroku, kterého se v tvorbě osnov za posledních dvacet let dosáhlo. Sdílím Dieudonnův názor, že nic, co se událo od vzniku nových osnov, nemůže být záminkou k úplnému návratu ke starým poměrům.

Chci-li objasnit významné otázky moderní matematiky komentováním spisů M. Klina, R. Thoma a J. Dieudonné, znamená to, že tyto spisy stojí za to, aby se s nimi seznámili všichni, kdo se zajímají o matematiku a její vyučování. To je ovšem můj názor; současně si však nemyslím, že by se čtenář měl seznámit s názory těchto matematiků jen z citátů v mém článku. Neměla by to být náhrada za studium původních pramenů.

Poněvadž články Thomovy a Dieudonného a možná i tento článek budou číst matematici zvyklí na zcela jiný druh publikací, musím upozornit, že se v nich nechtějí řešit problémy. Ani já se nepokouším o nic více než přispět k diskusi a podnítit diskusi novou. Chtěl bych zburcovat celou matematickou obec proti nebezpečí hrozícímu ze současné protireformace. Právě nyní je toto hnutí – alespoň ve Spojených státech – kontrolováno lidmi, kteří vůbec nejsou odborníky v matematice. Je třeba, aby se problémy matematické výchovy zabývali matematici, má-li matematická výchova, jak my jí rozumíme, přežít.

2. Úpadek nové matematiky — kritika Morrise Klina

Patrně nejbřitší a zcela jistě nejznámější kritikou moderní matematiky je kniha *Proč neumí Honzík počítat* od Morrise Klina. Tato kniha zasáhla mnohem širší okruh čtenářů než nejzávažnější studie o matematické výchově; byla podrobně recenzována v mnoha proslulých denících jako jsou New York Times a Wall Street Journal. Morris Kline, profesor matematiky na newyorské univerzitě, podal v ní zdrcující kritiku nové matematiky (a podtitulkem jeho knihy je právě název této kapitoly). Morris Kline odhalil bezpochyby mnoho závad v současných osnovách, o kterých se říká, že jsou inspirovány moderní matematikou. Diagnóza příčin tohoto úpadku je však falešná a poněkud subjektivní. Je ovšem pravda, že Morris Kline upozornil na existenci velmi vážného problému a podnítil k přemýšlení o kořenech jeho příčin i možných řešeních. Naneštěstí zároveň oživil předsudky těch, kteří by rádi vrátili vývoj zpět ke starému způsobu vyučování. Mnozí z nich se ve svém matematickém chápání nedostali dál než za elementární algoritmy aritmetiky přirozených čísel.

Morris Kline užívá termínů *nová matematika a moderní matematika* jako synonym; na obálce se mluví o *Hlubších důvodech pro moderní matematiku* a v textu příslušné kapitoly o *Hlubších důvodech pro novou matematiku.* Tam rozvíjí Kline hlavní osten svého argumentu a tím se budeme nyní zabývat. Kline charakterizuje novou matematiku termíny jako *abstrakce, struktura, přesnost, axiomatika.* Staví proti sobě novou matematiku založenou na abstraktní teorii a cíle staré matematiky: rozvinout technické schopnosti studentů, vyzdvihnout výlučně praktickou povahu matematiky a naučit studenta chápat aplikace matematiky ve všech oblastech přírodních věd a především ve fyzice. Prohlašuje, že nová matematika znamená úpadek a cituje působivě Goetha

Je to život, ptám se, má to vůbec smysl nudit sebe a nudit studenty?

Tím myslí Kline současné matematiky. Kline rozvíjí myšlenku, že v 19. století byli matematikové vědci. Byli šťastni a byli na toto označení hrdi; nechávali se inspirovat problémy, kterými se zaměstnávali. Dnes, stěžuje si Kline, většina moderních profesorů matematiky neví nic o přírodních vědách. Matematika se obrátila do sebe. Inspirace pro dnešní matematiky přichází většinou z nitra samotné matematiky a je nejvýš nepravděpodobné, že by většina moderního matematického výzkumu vůbec kdy přispěla k vývoji přírodních věd. Vstoupili jsme do období úzké specializace, takže i uvnitř matematiky máme specialisty v teorii grup, kteří neznají analýzu, topology, kteří neznají teorii čísel, logiky, kteří neznají topologii, a co je ze všeho nejhorší, čisté matematiky, kteří neznají aplikace. Dnešní matematici, píše Kline, nejsou již široce vzděláni v matematice, nemluvě o přírodních vědách. Většina z nich se obrátila k čistě matematickým problémům a k formalizaci, axiomizaci a zobecňování toho, co již bylo známo. To vše je mnohem snazší, než dělat aplikace.

Probereme tuto námitku krok za krokem. Obvinění, že většina moderních matematiků není dost důkladně vzdělána, je možno potvrdit. Postupy, kterými se nám podařilo ve Spojených státech vyrábět zhruba tisíc nových Ph. D. ročně, mají sotva co společného s obecným vzděláním v matematice, natož v přírodních vědách; snažíme se totiž rozvíjet schopnosti k výzkumu ve zcela úzkém výseku matematiky. Protože však bylo už o tom mnoho řečeno a napsáno*), nemá smyslu o tom více mluvit. Avšak námitka, že většina matematiků není dost zběhlá ani v matematice ani v aplikacích, je něco jiného než analýza současné tvůrčí práce v matematice. Je jistě pravda, že pokrok v matematice pramení opět z pokroku v matematice. Tato stránka matematické tvůrčí práce by neměla být posuzována jako kritika současných matematických metod, je to totiž

*) Viz např. PETER HILTON, *The Training of Mathematicians Today* (Současná výchova matematiků), přeloženo do němčiny v *Mathematiker über Mathematik* pod redakcí MICHAELA OTTA, Springer 1974. Nebo také I. N. HERSTEIN, *On the Ph. D. in Mathematics*, Am. Mat. Monthly *76* (1969), str. 818—823.

v povaze matematiky samé. Pokrok tkví ve vytváření sjednocujících pojmů, v dosažení větší jemnosti v zacházení s těmito pojmy a v uplatnění výsledků těchto matematických a logických úvah na zvláštní případy. Tak vyjdou najevo skryté cesty myšlení a mohou být explicitně zformulovány; jsou rozpoznány a využity skryté souvislosti mezi zdánlivě neslučitelnými matematickými oblastmi. To je odedávna v povaze matematiky, ať již se matematikům vnucovaly jednotlivé problémy svým praktickým významem nebo myšlenkovou naléhavostí. Nelze kritizovat matematiky za to, že dělají matematiku.

Je nedorozumění, jestliže zaměňujeme, jak to dělá Kline, tvrzení o povaze matematiky s tvrzeními statistické povahy. Má-li Kline za krajně nepravděpodobné, že by většina moderního matematického výzkumu vůbec kdy přispěla k pokroku přírodních věd, má bezpochyby pravdu. Je však také krajně nepravděpodobné, že by většina moderního matematického výzkumu vůbec kdy přispěla k pokroku matematiky. Současný matematický výzkum je tak rozsáhlý, že většina prací má nevyhnutelně velmi pochybnou cenu. Myslím si však, že vrcholný matematický výzkum přispívá k pokroku matematiky i přírodních věd, zvláště chápeme-li přírodní vědy šíře než Kline; zahrnují totiž všechny obory, na něž lze použít matematických metod. Z poslední doby lze vzít spoustu příkladů ze společenských věd a biologie, v nichž se používá složitých matematických metod vyvinutých často jen pro jejich matematickou přitažlivost. Rozsah matematických aplikací v tomto století jistě neklesl. Ubylo však matematické činnosti podnícené vědomým přáním rozřešit nějaký problém stojící mimo matematiku. Myslím si, že Kline je přecitlivělý na ústup matematické fyziky z jejího výsadního postavení mezi obory, v nichž se uplatňuje matematika.

Podobně stěžuje-li si Kline, že matematici již nejsou tak důkladně vzděláni v matematice jako za starých časů (nemluvě již o přírodních vědách), jde o statistické tvrzení, které je bezpochyby správné*), nedáváme-li příliš velký důraz na *již ne tak*. Dosud nebývalý počet mladých lidí si volí zaměstnání matematika. Lze tedy očekávat, že nebudou dosahovat v průměru úrovně matematiků z dob, kdy si mladý, inteligentní a schopný člověk velice zřídka vybral matematiku za své životní povolání. Většina dnešních matematiků je v plné míře hodna povolání vědce a učitele. Mnozí z nich ovšem žijí pod neustálým tlakem *publikovat nebo zahynout*, který na ně doléhá jako hrozba. Později si ještě všimneme vlivu překotného růstu počtu nových matematiků na matematickou výchovu; souvislost je však úplně jiná, než jak ji vidí Kline.

Klinův popis matematické tvůrčí práce je posměšný. Samozřejmě že činnost, o které mluví, totiž formalizace, axiomizace a zobecňování již známých skutečností, je mnohem snazší než aplikace. A samy o sobě nezakládají pokrok v matematice. Je také jisté, že Klinův popis se hodí na některé doktorské disertace a dokonce i na některé články publikované v matematických časopisech. Ale Kline by měl vědět, že se nehodí na tvůrčí práci tisíce ryzích matematiků, kteří rozšiřují naše poznání a naše chápání.

Klinův popis současného matematického výzkumu pozoruhodně připomíná obvině-

*) Zdá se, že polovzdělanost je na postupu. Ovšem čím většímu počtu se dostává vzdělání, tím je také více nezdarů; a společenské důsledky polovzdělanosti jsou dnes mnohem vážnější než dříve. Lze proto usoudit, že mladí lidé *již nejsou tak vzděláni*?

ní proti matematikům, která vznesl nositel Nobelovy ceny fyzik RICHARD FEYNMAN ve svých přednáškách o poslání fyziky na cornellské univerzitě v roce 1964. V těchto přednáškách rozebíral Feynman povahu fyziky a v jedné z nich se snažil popsat podstatný rozdíl mezi matematikou a fyzikou. Avšak jeho popis matematické práce byl nepochopitelný a nepřijatelný pro tvůrčí matematiky, kteří ho poslouchali; jeho popis charakteristických postupů tvůrčího fyzika se výtečně hodil na práci matematika — po záměně fyzikálního nádobí matematickým. Avšak podle Feynmana fyzik se ve své představivosti nedopouští skoků, ani nevázaně nespekuluje o nepoznaném, zatímco matematik ve skutečnosti nemá, co by řešil, nemá otázky, na které by hledal odpověď. Feynman kreslí posměšný obraz práce matematiků, jako by si položili zcela nevázaně soustavu axiómů a potom zvolna, s rozmyslem a bez citu omílali její logické důsledky. Působilo povzbudivě, když bylo možné ukázat Feynmanovi některé otevřené problémy v matematice (např. Poincarovu domněnku, že každá uzavřená jednoduše souvislá trojrozměrná varieta je koule) a pozorovat, jak si pohotově uvědomuje jejich význam a jak je okouzlen metodami vyvinutými k jejich zvládnutí.*) Domnívám se, že se Feynman dal svést dvěma okolnostmi: především surovým znetvořením nové matematiky lidmi, kteří nepochopili nic z jejího smyslu, ale chtějí se přiživit na její popularitě, a potom formální definicí (jakých užíval BERTRAND RUSSEL) matematiky jako formálního deduktivního systému. Ani oportunický propagátor nové matematiky ani filozof nebyl s to popsat skutečnou povahu matematické práce. Je myslím přirozené domnívat se, že i Morris Kline byl oklamán úplně stejně.

Uznat, že axiomizace a zobecňování jsou jen částí tvůrčí matematické práce, neznamená snižovat jejich významnou úlohu v matematice. Objevování nových pojmů a použití výsledků formálního myšlení na zvláštní případy tvoří velmi podstatné složky pokroku v matematice. Teď je myslím vhodná příležitost pranýřovat hloupou a povrchní pověru, že matematik má na vybranou: buď řešit problémy nebo tvořit struktury. S nebezpečnou a klamnou průvodní pověrou, že bychom měli u studentů rozvíjet spíše schopnost řešit problémy než schopnost vytvářet struktury. V období, kterému se eufemicky říká druhá vlna reformy (těmi, kdo se drží na jejím vrcholu), matematické vzdělání ve Spojených státech žije ve znamení dvou hesel; jedním z nich je důraz na aplikace a druhým důraz na řešení problémů. Máme-li být schopni aplikovat matematiku, musí nějaká matematika, kterou bychom aplikovali, existovat. První heslo nás nutí položit si otázku, jak vykládat matematiku, aby studenti pochopili její smysl a dokázali ji aplikovat — to je ústřední problém celé matematické výchovy, kterému se nelze vyhnout. Avšak druhé heslo, stavějící do protikladu řešení problémů a tvorbu struktur, je stejně záludné. Neboť pro řešení problému je třeba poznat jeho strukturu a povahu a umět jej pevně včlenit do jeho analytické souvislosti. Všichni velcí matematici úspěšně řešili problémy - pomocí vhodné teorie. Tuto teorii musili však často teprve vytvořit. Dobrou teorii poznáte (a na tom se asi všichni shodneme) podle její schopnosti řešit významné problémy. Tvorba struktur v matematice a ostatně i jinde se stává svévolnou, není-li pro tyto struktury žádné uplatnění; pak může jít i o špatnou

*) Feynman se na začátku své další přednášky za svůj utrhačný výpad proti současné matematice velkoryse omluvil.

matematiku. Kdyby ti, kteří se stavějí proti strukturám, útočili na špatnou matematiku, nebylo by co namítat, ale oni tak nečiní.

Nesprávnost protikladu (tvorba struktur – řešení problémů) lze prokázat na životě a díle kteréhokoliv matematického velikána; myslím si, že právě tak je tomu s názorem, že matematik se musí rozhodnout mezi čistou a aplikovanou matematikou. Nechce se mi o tom mluvit do omrzení. Snad by nebylo marné připomenout slova velkého matematika aplikací RICHARDA COURANTA. MARSHALL STONE v jednom svém článku (*Revoluce v matematice*, American Mathematical Monthly 1961) prohlásil, že je zásadní protiklad mezi strukturálním a ryze početním pojetím matematiky. Šel ještě dále a tvrdil, že není ani přímé souvislosti mezi matematickými systémy a fyzickým světem. Není mi jasné, zda základní protiklad, o kterém mluvil Marshall Stone, vskutku existuje. Je ovšem mezi tímto dvojím pojetím zásadní rozdíl, ale nazývat tento rozdíl protikladem znamená zacházet příliš daleko za pouhou rozdílnost. Mohli bychom vyjádřit tato dvě hlediska jako uvažování a počítání; tím by se naznačilo, že se nejedná o protiklad, ale spíše o doplněk. Chtěl jsem však původně upozornit na Courantovu odpověď na Stonův článek. Ve své odpovědi Courant zdůrazňoval, že kořeny naší vědy sahají v nekonečném větvení hluboko do skutečnosti, ať již se skutečností rozumí mechanika, fyzika, biologie, národní hospodářství, zeměpis nebo *jiná matematická látka, s kterou jsme důvěrně seznámeni*. Zde si Courant všiml význačné vlastnosti matematického poznání, že totiž buduje na poznaném a nové pojmy jedné generace se stávají běžným nástrojem generace následující. Matematika staví na myšlenkách přicházejících z přírodních věd anebo z matematiky samé. A podobně aplikujeme-li matematiku, aplikujeme ji na přírodní vědy nebo zase na matematiku. Morris Kline tvrdí poněkud překvapivě, že všechny aplikace matematiky na přírodní vědy se opírají o myšlenky, které byly samy podníceny přírodními vědami. Je samozřejmě možné, že v nějakém hlubokém metafyzickém smyslu jsou všechny matematické myšlenky podníceny přírodními vědami;*) v tom případě je jeho tvrzení banální. Avšak myslí-li Kline, že všechny aplikace matematiky na přírodní vědy jsou aplikacemi myšlenek, které vznikly při řešení nějakého přírodovědného problému, pak je to prostě nepravda. Co společného měli italští geometři a jejich předchůdci s přírodními vědami, když vyvíjeli absolutní diferenciální počet? Nebo moderní aplikace teorie polynomů nad konečnými tělesy? Nebo moderní aplikace lineární a abstraktní algebry v teorii kódování a hromadné obsluhy? Nebo aplikace, které přenesli RENÉ THOM, CHRISTOPHER ZEEMAN, STEPHEN SMALE a jiní z teorie singularit hladkých funkcí na hladkých varietách do biologie a ekonomiky?

Poněkud se však vzdalujeme od našich obvinění. Vraťme se k argumentům Morrise Klina a připusťme na okamžik, že nová matematika vznikla dík tomu, že se profesionální matematici pustili do reformy osnov a dopadlo to tak dík jejich zálibám a zájmům, jak to popisuje Kline. Vtírá se otázka, jak a proč matematici začali uplatňovat svůj vliv. Kline tvrdí, že v šedesátých letech tohoto století byli

*) Thom píše: ... nejmocnější matematické struktury (algebraické, topologické) se jeví jako základní data určená fyzickým světem a jejich nesrovnatelná různorodost má své jediné oprávnění ve skutečnosti. To je, zdá se, filozofické tvrzení nejvšeobecnější povahy, na které se Kline odvolává.

matematici tradiční (tj. aplikované) školy nesmírně zaměstnáni problémy rychle se rozvíjejících přírodních věd. A tak cítili profesoři čisté matematiky, že mají volné pole působnosti v reformním hnutí. Nezdá se mi podle počtu publikací z tohoto období, že by aplikovaní matematici byli nuceni více se věnovat výzkumu než čistí matematici. Statistika svědčí spíš o opaku. Kline, jak se zdá, věří, že čistí matematici, majíce spoustu volného času, hledali, kde by uplatnili svůj vliv; povzbuzeni povolností učitelů základních a středních škol ve Spojených státech dali se do reformy osnov. V minulosti sice těmito zájmy opovrhovali, ale pokušení bylo příliš silné.

Takové vysvětlení při pečlivém zkoumání neobstojí. Proč by se matematici starali o školské osnovy? Odkud by se bral jejich náhlý zájem? Má vůbec smysl myslit si, že je tomu tak, jak líčí Morris Kline, Alvin Weinberg, Richard Feynman a jiní? Šedesátá léta ve Spojených státech byla dobou, kdy každý matematik, který se chtěl věnovat výzkumu, mohl pro to získat finanční zajištění. *Národní vědecká nadace* (National Science Foundation) projevovala pozoruhodnou a dosud nevídanou velkorysost při rozdělování stipendií čistým matematikům. Pracovat na reformě bez ekonomických a odborných podnětů, proč by to dělali? Dalo by se očekávat, že Morris Kline bude tvrdit, že je k tomu vedlo povolání učitele navzdory tomu, že činný zájem o vyučování matematice zvláště na preduniverzitní úrovni nemůže univerzitnímu učiteli získat ani věhlas ani zlepšit postavení. To však stále nevysvětluje, proč se tak nedělo již dříve; ale Kline to netvrdí, neboť Kline ve skutečnosti, musím to říci, neloajálně napadá učitelskou pověst svých kolegů. Píše: profesionální matematici jsou nejvážnější hrozbou pro matematiku, alespoň pro její vyučování – a později – jeden ze základních důvodů, proč matematici selhávají jako učitelé, vězí v samé povaze matematického myšlení.

Vůbec nesouhlasím s tak břitkou kritikou svých kolegů. Nechci tvrdit, že každý profesionální matematik je skvělým učitelem, ani že jeho zaujetí spolu s nadáním jsou již zárukou jasného výkladu nebo umožňují vniknout do problémů tvorby osnov na všech stupních. Avšak domnívám se, že účast matematiků z povolání při tvorbě osnov ve Spojených státech byla vždy silnou stránkou věci. Že se vyskytly nedostatky, je zřejmé, a asi bychom se měli poohlédnout po jejich příčinách.

Jedna příčina těchto nedostatků tkví asi v situaci, kterou jsem již popsal a která hovoří zcela proti Klinově rozboru. Hovořil jsem již o pozoruhodné a přímo bezuzdné prosperitě tvůrčích matematiků v době, kdy bylo reformní hnutí na vrcholu. Tím se přímo povzbuzovali k účasti na reformním hnutí matematici, kteří se nevěnovali výzkumu. Dnes trpíme ve Spojených státech důsledky (i když nechtěnými) tohoto stavu, živeného velkorysým způsobem, kterým rozdělovala stipendia *Národní vědecká nadace*. Tato politika totiž podněcuje názor, že mírou matematického věhlasu je schopnost vyhýbat se pedagogické práci. Nejlepší z graduovaných studentů se například stali výzkumnými asistenty na základě stipendia *Národní vědecké nadace*, méně schopní šli učit.

Lze tedy docela dobře tvrdit, že hnutí za reformu osnov nebylo vůbec v rukou tvůrčích matematiků. (Situace byla poněkud jiná v západní i východní Evropě.) Lze také tvrdit, že reformní hnutí nebylo nikdy schopno vyřešit problém úrovně a školení učitelů matematiky. A nebude-li vyřešen tento základní problém, nemůže uspět žádná reforma ve vyučování. Ve skutečnosti je možné jít ještě dále a tvrdit, že nová matematika byla méně úspěšná než stará právě proto, že je lepší. Tím že je lepší, vyžaduje od učitelů mnohem hlubšího porozumění své povaze a smyslu, než to požadovala stará matematika při svém pěstování cviku a dovednosti. Stará matematika byla prostě hrubší. Máloco bylo možno na ní zkazit. Nová matematika je mnohem jemnější a důsledky jejího zkomolení ať učiteli nebo autory učebnic, kteří neporozuměli jejímu smyslu, jsou katastrofální. Nelze však popřít, že v praxi znamená nahrazení (v základní škole) staré matematiky novou, nahrazení hloupého a užitečného cviku hloupým a neužitečným cvikem. Nebylo nikdy v úmyslech reformátorů, aby se na školách pěstoval jazyk teorie množin jako tupý dril, přesto se to dnes děje.*)

Dnes existují ve Spojených státech dobré reformní pokusy, i když na nižší úrovni než v době rozkvětu reformního hnutí. V těchto programech na elementární úrovni (např. programu *Comprehensive School Mathematics Project* a programu vyvinutém *Open Court Publishing Company*) není rozporů mezi požadavky početní sběhlosti, zdůraznění souvislosti matematiky a přírodních věd, aplikace matematických myšlenek na reálný život a nakonec vytvoření povědomí síly a obecnosti matematických struktur a metod. Jsem přesvědčen, že jenom ti, kteří si tady přihřívají svou polévku, trvají na stanovisku *buď anebo*, zdali se má vyučování ubírat ve stopách matematiky teoretické nebo praktické. Takové hledisko je nejen nesmyslné; přistoupíme-li na ně, spácháme neodčinitelné škody na celé budoucí matematické výchově.

*) Ti z nás, kteří učí v prvním ročníku na univerzitách, si stěžují, že studenti přicházejí ze středních škol špatně připraveni: neznají geometrii, nedovedou počítat, přicházejí se špatně zažitými znalostmi diferenciálního počtu, což je horší než žádné znalosti. Nelze diskutovat o tom, že něco z toho připadá na vrub moderních matematických osnov na prvním a druhém stupni. Ono učení je mučení, ale odnaučit se zlozvykům je těžší.

3. Spor René Thoma s Jeanem Dieudonné

V *American Scientist*, svazek *59* (1971) str. 695 – 699 se objevil článek René Thoma nazvaný *Moderní matematika: výchovný a filozofický omyl*? Jean Dieudonné odpověděl na Thomův článek v *American Scientist*, svazek *61*, 1973, str. 16 – 19; jeho článek byl nazván *Máme učit moderní matematice*? Oba tyto články byly přeloženy do sbírky *Mathematiker über Mathematik*, která vyšla v roce 1974 pod redakcí Michaela Otta u Springra. V této části uvedeme hlavní myšlenky Thomova útoku a v hlavních rysech i Dieudonnovu obranu moderní matematiky. Je třeba zdůraznit, že Dieudonnův článek není jen pouhým vyvrácením Thomových názorů. Dieudonné souhlasí s mnohým, co Thom říká, zvláště mluví-li se o významu geometrie (právě tak jako autor) a navíc se věnuje úvahám o matematické výchově, zatímco Thom nikoliv.

Thom vznáší tři základní obvinění proti moderní matematice.**) První, že se geometrie nahrazuje algebrou; druhé, že se klade nepatřičný důraz na přesnost; třetí, že se zavádí teorie množin do moderních osnov matematiky. Thom sám klade největší důraz na třetí z nich; v překladu jeho článku v *Mathematiker über Mathematik* je dodatek vysvětlující zajímavým způsobem sémantickou povahu spojek ***a*** a ***nebo***

**) Pronáší také významné názory, které nejsou obsaženy v těchto obviněních. Pochybuje např. o tom, zda vůbec mají být zařazovány do osnov všechny poslední výkřiky vědy.

v souvislosti s teorií matematické morfologie vyvinuté v Thomově knize *Stabilité Structurelle et Morphogénèse.*

Rozeberme tyto tři námitky v pořadí, jak jsme je uvedli. Thom obviňuje ctitele moderní matematiky, že *nahradili* geometrii algebrou. Tvrdí, že je to záměna přirozená pro matematika trénovaného v Bourbakiho tradici; a to není ještě zdaleka jeho nejtrpčí výrok o Bourbakiho vlivu na moderní matematiku. Thomovo hledisko je vyjádřeno větou, že zajisté existují geometrické problémy, ale nikoliv algebraické. Myslí tím, že algebraický problém je pouhým cvičením v slepém uplatňování aritmetických pravidel podle známého návodu. Thom dále tvrdí, že je nerozumné chtít na studentovi důkaz nějakého algebraického výsledku. Buď je to trivialita, nebo je k tomu třeba abstraktních úvah ležících mimo dosah průměrného studenta. Z Thomových vývodů je vidět, že mluví-li o geometrii, má na mysli především euklidovskou geometrii. A jistě ji nedoporučuje pro její axiomatické základy. Spíše uznává *Euklidovy Základy* za první úspěšný pokus vyjádřit svět zkušeností ve dvou a třech rozměrech psaným slovem v jednom rozměru. Thom se domnívá, že geometrie je prvním krokem ze všedního jazyka k formalizované řeči matematiky. Považuje geometrické myšlení za neodmyslitelný stupeň normálního vývoje lidské rozumové činnosti. Geometrické kontinuum je snazší k pochopení než přirozená čísla a z psychologických důvodů se staví proti vytváření kontinua Dedekindovou metodou řezů z přirozených čísel. Působivě prohlašuje, že KRONECKEROVA známá věta ***Bůh stvořil přirozená čísla**; vše ostatní je dílem lidským* svědčí spíše o jeho předchozí kariéře bankéře zbohatlého burzovními spekulacemi než o jeho filozofické intuici. Geometrické kontinuum je prvotní.

Axiomizace je pro Thoma duší algebry a právě proti axiomizaci v matematické výchově a dokonce v matematice samé Thom bojuje ve svém útoku proti algebře. Prohlašuje, že axiomizace je výhodná pro systemizaci a kodifikaci poznatků, ale nevhodná pro nalézání nových výsledků. Navíc má její předčasné zavedení neblahý vliv na studenty, kteří nemají dost zkušeností s méně obecnými matematickými systémy a se situacemi reálného světa, které se podvolují matematickému zpracování. S tím posledním musí jistě každý souhlasit a mají to na svědomí různé zkomoleniny osnov v minulosti. Thom však popírá i význam axiomatiky pro tvůrčí práci. Tady je však na vratké půdě, neboť Dieudonné argumentuje ve své odpovědi velmi přesvědčivě. Je mnoho příkladů o významu axiomizace nejen pro systemizaci, ale i pro řešení problémů. Dieudonné uvádí dílo Dedekindovo, Hilbertovo, Kroneckerovo, Chevalleyovo a mnoha jiných; je možno dodat, že existuje mnoho příkladů v topologii na úspěšnou úlohu axiomizace při řešení problémů. Thom sám přispěl široce do této oblasti.

Thom napadá Bourbakiho, že se v jeho svazcích neobjevil žádný nový výsledek; dodává, že se více látky najde ve cvičeních než v deduktivní části díla.*) To však není vada textu, myslím si, obsahují-li cvičení nejcennější látku. Mají totiž podněcovat čtenáře; jestliže tak činí, čtenář v matematice pracuje, jinak se jí jen učí. Nejhorším rysem *posledního* výkřiku pedagogiky ve Spojených státech je, že se klade tak velký důraz na vyučování matematice a tak nepatrný na práci v matematice. To je asi

*) Thom dále tvrdí, že stará víra bourbakistů v možnost převedení matematických struktur na hierarchii množin, podmnožin a jejich kombinací je iluze. Viz další argument o úloze teorie množin.

ze všech výchovných a pedagogických omylů ten nejhorší. Obvinění, že Bourbaki neuvedl žádný nový výsledek, připomíná mi poznámku, kterou před mnoha léty, ještě v dávnověku éry počítačů učinil ALAN TURING. Byl kritizován pro svůj způsob vyjadřování, mluvil-li o počítači, jako by ten myslil nebo rozhodoval, neboť počítač prý se nemůže chovat nepředvídavě. Turingova odpověď byla prostá a jasná. Jeho úkolem bylo vytvořit počítač, který by vykonával jisté úkony podle pevných pravidel, a to se stalo. Kdyby byl požádán, aby vytvořil počítač chovající se nepředvídavě, nebylo by nic snazšího než zavedením náhodných prvků dosáhnout u počítače náhodných obratů volního jednání. Počítači se tedy vyčítalo, že není schopen provádět úkony, k nimž nebyl stvořen. Tvrdí-li Thom, že sjednocení a uspořádání matematiky, kterého dosáhl Bourbaki, ve skutečnosti nepřineslo nic nového, lze namítnout, že to bourbakisté neměli ani v úmyslu. Tvrdí-li však, že Bourbaki nepodnítil nic nového, je to nepravda. Bylo jím bezpochyby ovlivněno podnětné dílo SERROVO v teorii homotopií, abych uvedl pouze jediný významný příklad. Samozřejmě že ne každý může dospět k tvůrčí zralosti cestou bourbakistů; to je důvod pro různorodost cest poznání, nikoliv důvod pro předpis sice jiný, ale stejně omezující jako dieta bourbakistů.

Ovšem kde se nahrazuje geometrie algebrou, tam jsou pedagogové na omylu. Tady se Dieudonné zcela shoduje s Thomem a zřejmě se všemi, kterým záleží na úrovni matematické výchovy. Dieudonné však tvrdí, že se máme pokoušet řešit geometrické problémy algebraickými metodami; a mnohde se skutečně spojuje algebra s geometrií. Dieudonné jde ještě dále a požaduje, aby se algebraické problémy hned od začátku uváděly v geometrické souvislosti. Thom se mýlí, říká Dieudonné, domnívá-li se, že obhájci moderní matematiky chtějí vyškrtnout z osnov euklidovskou geometrii; nikoliv, chtějí (nebo by měli chtít) změnit způsob jejího vyučování. Navíc z prosazování dedukce neplyne nutnost axiomizace a vůbec ne nutnost předčasné axiomizace. O tom však později při diskusi druhé Thomovy námitky.

Moderní matematika vyžaduje *sjednocení* geometrie a algebry; nesmíme je považovat za vzájemné protiklady, ale za vzájemné doplňky; vždy máme trvat na geometrickém výkladu algebraických pojmů. Domnívám se, že Thom má pravdu, když zdůrazňuje význam přechodu od dvourozměrné nebo trojrozměrné zkušenosti k jednorozměrnému vyjádření; pak je ovšem přirozené, že k tomu užíváme algebraických pojmů.

Dieudonné si všiml, že Thom straní staré matematice, když vyslovuje tento hlavní cíl matematické výchovy: ukázat, jak se surová časoprostorová zkušenost převádí do logické struktury. Dnes s tímto požadavkem všichni souhlasíme; uznáváme příbuznost matematiky s fyzikou, biologií, a tím i nutnost vytvářet pevné vztahy mezi těmito vědami. Avšak starý způsob vyučování takové vztahy neznal. Matematice se učilo, jako by to byl soubor více či méně zkostnatělých do sebe uzavřených disciplín.

Dieudonné také oponuje Thomově námitce, že spojitost předchází diskrétnosti v normálním duševním vývoji dítěte, a namítá, že Thom je asi právě tak zaujatý jako Kronecker. Zdůrazňuje, že povědomí souborů různých věcí je jedna z nejranějších zkušeností dítěte. Přirozená čísla tvoří zcela nevyhnutelně prvotní model, když se dítě pokouší uspořádat své předchozí zkušenosti. Tady se Dieudonné opět rozhoduje pro širší, eklektičtější hledisko.

Uznává životní důležitost geometrického kontinua a jeho hluboký význam pro dětskou zkušenost, ale není ochoten snižovat význam přirozených čísel. Bylo by na místě ukázat, že Thomovo tvrzení, že topologické invarianty jsou obtížněji pochopitelné než metrické, je v rozporu se zkušenostmi Piagetovými a jiných psychologů. Nemohu to zaručit, ale řekl bych, že otázka, zda je nějaké seskupení souvislé či ne, je zřejmá tak brzy, (ne-li dříve) jako otázka, zda je nějaký mnohoúhelník čtverec. Je-li zaručeno, že děti rozpoznávají jak diskrétnost, tak spojitost, je Dieudonnův názor nevyvratitelný. Algebra činí geometrii diskrétní, geometrie číselnou soustavu spojitou. A ve vzájemném působení obou je síla matematiky. Naštěstí reformní programy, o kterých jsem se zmínil, pojímají za svůj výchozí bod jednotu aritmetiky a geometrie. S čísly se počítá a měří. Spisek pro další vzdělání učitelů vydávaný *Comittee on the Undergraduate Program in Mathematics* Americké matematické společnosti (Mathematical Association of America) ve svém posledním vydání zdůrazňuje nutnost časného zavedení číselné osy. A tak lze vyvíjet dvojí stránku číselné soustavy souběžně hned od počátku.

Než opustíme první Thomovo obvinění moderní matematiky, je třeba uvést dva podstatné úspěchy algebraizace geometrie, jak je cituje Dieudonné. První je symetrizace uplatněná při přechodu od pologrupy ke Grothendieckově grupě. Tento čistě algebraický postup je nevyhnutelný při studiu fibrovaných prostorů (v topologické K-teorii). Druhý příklad, který Dieudonné cituje, je metoda zúplnění inspirovaná čistě geometricky nebo spíš topologicky, při níž postup je však algebraický. Tato metoda vede například k zavedení p-adických čísel. Dieudonné jistě mohl uvést víc příkladů, avšak tyto dva jsou myslím dost přesvědčující, aby zviklaly Thomův skepticismus o využití axiomatické metody v tvůrčí matematice.

Obraťme se teď k Thomově názoru na *přesnost*. Zde se jako obvykle Thomova analýza noří hluboko do filozofické stránky věci. Rozlišuje trojí smysl, v němž lze chápat matematickou přesnost. První je *formální smysl*, kdy se stanoví formální systém S a potom se definuje, co se rozumí důkazem P teorému T. Druhý smysl je *realistický* (*platónský*): předpokládá se, že matematické pojmy skutečně existují a teorémy vyjadřují skutečné vztahy mezi nimi. Třetí je *empirický smysl*, v němž důkaz platí za správný, uznají-li tak vedoucí specialisté v tomto oboru. Obhajuje-li někdo přesnost v matematice nebo v matematické výchově, sotva má na mysli první smysl. Potom Thom pokračuje v zjištění, že žádný ze zbývajících významů přesnosti neopravňuje pedantství zavedené ve jménu přesnosti v některých osnovách. Thom s lítostí zjišťuje, že neexistuje přesná definice přesnosti. Nemůžeme tedy vytvořit kritérium přesnosti jako měřítko pro zjišťování platnosti našich matematických výtvorů, i kdybychom si tak přáli.

Thomův rozbor této stránky matematiky a matematické výchovy napovídá, že má v této diskusi na mysli empirickou přesnost a že tedy úlohu slova *přesnost* v matematice máme pojímat podobně jako úlohu slova *abstraktní*. Nelze o nějakém důkazu tvrdit, že je přesný o nic více, než že některá část matematiky je abstraktní. Existuje však velmi reálný smysl, v němž jedna část matematiky se může považovat za abstraktnější než druhá, jeden pojem za abstraktnější než druhý. Pojem přirozených čísel je abstraktnější než pojem souhrnu věcí; pojem grupy je abstraktnější než pojem přirozených čísel; pojem kategorie je abstraktnější než pojem grupy. Tato stupnice abstraktnosti je zřejmě odrazem historického vývoje matematiky a bylo by asi obtížné, ne-li nemožné stanovit ji v absolutních termínech. Přesto má dobrý smysl. Právě tak můžeme dobře říci, že jeden důkaz je přesnější než druhý. Co by však bylo radno ponechat z požadavku přesnosti pro výchovu? Správnost uváděných tvrzení. Je nesmyslné trvat v daném okamžiku na zcela přesných důkazech všech tvrzení; rozebíráme například vlastnosti reálných čísel a spojitých funkcí dříve, než jsou studenti schopni pochopit důkaz Bolzanovy věty. Není však dobře, dovolujeme-li si z pouhé pohodlnosti nesmysly, např. že každá diferencovatelná funkce může být lokálně vyjádřena Taylorovou řadou, což je běžné nedorozumění rozšířené mezi fyziky. Thom zdůrazňuje lokální formulaci jako návod, jak si poradit s tímto problémem. Má tu opět na mysli morfologii pojmů a jeho myšlenky na toto téma zaslouží pozornosti všech, kteří se zajímají o pojem přesnosti v matematice.

Dieudonné souhlasí s Thomem, že přesnost sama o sobě nemůže být konečným cílem ani v matematice ani v matematické výchově; a nemůže být ani absolutním kritériem. Avšak důležitá je správnost ochraňující nás před nedorozuměním, falešnými závěry nebo dokonce omyly. To bylo, říká Dieudonné, skromným cílem matematiků, jako Dedekind, Hilbert, Bourbaki při určování stylu jejich řeči. Avšak Dieudonné učinil ještě jednu neobyčejně důležitou poznámku. Tvrdí, že jistá dávka přesnosti a formálnosti má význam pro obohacení intuice. Snažíme se o opravdové porozumění matematické situaci nebo modelu situace reálného světa. První stupeň je formální a povrchní porozumění, které se teprve postupně prohlubuje. Neměli bychom proto snižovat lokální porozumění. Je nedokonalé a dočasné na cestě za ryzím obsahem. Všichni jsme musili projít zkušeností, že nás logika důkazu donutila uznat jeho závěr, i když jsme nebyli plně přesvědčeni, že je tomu tak. Avšak tato situace je psychologicky i intelektuálně významná pro přechod k hlubšímu porozumění.

Thomův nejprudší výpad míří na *současnou* úlohu *teorie množin* v moderním elementárním vyučování. Jeho útok je podložen hlubokými úvahami a myslím si, že je to rozhodný úder. Lze předpokládat, že Dieudonné také souhlasí, neboť mlčí. Thom cituje dojemnou a naivní víru, že teorie množin je královskou cestou k úspěchu v matematice nebo alespoň k porozumění matematice. Tvrdí dále, že elementární fakta teorie množin vlastně ani do matematiky ani do logiky nepatří. Jakmile jsou po ruce matematické myšlenky (např. reálná čísla, geometrie, funkce), není elementární teorie množin již k ničemu. Thom vidí pramen falešného optimismu ve filozofickém omylu, který připisuje Georgeovi Boolovi, jehož dílo *An Investigation into the Laws of Thought* (Vyšetřování zákonů myšlení) vnuká víru, že každá dedukce může být modelována v teorii množin. Thom říká, že aristotelovská logika má složité ontologické kořeny a nemůže být formalizována v tak zjednodušeném systému. Thom pokračuje na příkladě, v němž zajímavým způsobem rozebírá spojky *nebo* a *a*. Jak již jsem se zmínil, věnuje morfologickému studiu těchto pojmů dodatek v Mathematiker über Mathematik.

Všimněme si docela zběžně Thomových vývodů, neboť ukazují jasně nevhodnost běžné množinové interpretace, v níž se *nebo* vykládá jako sjednocení a *a* jako průnik. Thom nejdříve rozebírá věty

Petr nebo Jan přichází

Petr a Jan přicházejí

Poznamenává, že první říká, že přichází Petr nebo že přichází Jan. To lze vykládat jako sjednocení dvou událostí. *Petr nebo Jan* nepřipouští v této větě sémantický výklad. Druhá věta je zase víceznačná. Může vyjadřovat, že přichází Petr a že přichází Jan anebo že Petr a Jan přicházejí spolu. V tomto druhém smyslu a jen v tom lze dát sémantický výklad výrazu *Petr a Jan.*

Kde se však používá těchto dvou spojek v doplňku, je situace ještě složitější. Thom rozebírá tyto čtyři věty

Petr je malý nebo inteligentní
Petr je malý a inteligentní
Petrovy vlasy jsou šedé nebo hnědé
Petrovy vlasy jsou šedé a hnědé

Podle Thoma je druhá a třetí věta sémanticky přijatelná a první a čtvrtá nikoliv. Důvody pro to rozebírá v termínech sémantických polí. Vyvozuje vylučovací princip, podle kterého je ze dvou tvrzení

A je X nebo Y
A je X a Y

nejvýš jedno sémanticky přijatelné. Z toho X nebo Y je přijatelné, právě když X a Y náležejí ke stejné sémantické oblasti. Toto kritérium je velice jemné, obsahuje totiž požadavek, aby X a Y bylo odděleno prahem mezi sousedními oblastmi morfologického modelu. Míšení různých sémantických oblastí, říká Thom, má své jméno, říká se mu šílenství. Thom upozorňuje, že existuje výjimka z vylučovacího principu, vyjadřuje-li totiž spojka *a* prostorovou blízkost, nikoliv logický průnik.*) Například

Tato vlajka je bílá a modrá.

Je zřejmé, že tato věta popírá tvrzení *Tato vlajka je bílá.* Thomův rozbor zachází však ještě dále, nemůžeme jej však tady vykládat. Ukazuje nevhodnost a nevýstižnost, s jakou elementární teorie množin odráží tvrzení obecného jazyka. Například myšlení v analogiích nemůže být převedeno na množinové operace, ale obsahuje pojem pořádajícího izomorfismu mezi sémantickými oblastmi. Thom uzavírá, že doménou boolovského schématu je univerzální množina se svými podmnožinami a inkluzí, tj. Vennovy diagramy. Matematika potřebuje $\in$, $\cap$, $\cup$, $\subseteqq$ a konečně kvantifikaci – a to je vše.

Chtěl bych k Thomově zdrcujícímu rozboru dodat několik slov: Čím může a mělo by být ospravedlněno zavedení teorie množin do elementárních osnov? Jistě to není všelék na všechny neduhy matematické výchovy. Avšak jazyk teorie množin má svou úlohu. Chyba je v mylném domnění, proč byla teorie množin zavedena do osnov. Proto, aby umožnila rozhovor o matematice a ne třeba o fotbale nebo jízdě na kole. Nápadný nedostatek staré matematiky záležel v tom, že neumožňovala rozhovor o matematice. Děti sice volně mluvily o svých různých zkušenostech, ale nebyly schopny mluvit o matematice. Nebyla řeč. Budou-li mít jazyk, budou ho používat. Avšak jazyk ještě nenahradí myšlení. Jazyk elementární teorie množin nemůže nahradit ani obecnou řeč ani matematické myšlení. Naneštěstí se pěstuje v mnohých osnovách jako dril zcela podle tradičního drilu s algoritmy přirozených čísel. Již jsem tento nedostatek kritizoval v předchozí části i jinde. Šíření těchto nesmyslů o úloze teorie množin zdůrazňuje nutnost požadavku, aby matematice na elementární úrovni učili lidé, kteří rozumějí její povaze a smyslu.

Musíme končit, neboť i Dieudonné končí svůj článek. Bez nářku, jako Kline naříká, že se do osnov pletou učitelé matema-

*) Větu *Petrovy vlasy jsou hnědé a šedé* lze také tak vykládat.

tiky. Dieudonné to vítá. Píše: *Tak se lze nadít, že jednou budou dokončeny rozumné osnovy matematiky od mateřské školy po vysokou školu.* Mohli bychom být hrdi, kdyby budoucí pokolení považovala za charakteristický rys současné matematiky, že se významní tvůrčí matematici zabývali problémy matematického vzdělání a považovali takový zájem za nedílnou část své odborné odpovědnosti. Tak se může stát, že bude do matematické výchovy přenesena neobyčejná vitalita, jakou jeví moderní výzkumná práce. Myslím si, že taková angažovanost je nutnou (ne však postačující) podmínkou pro zdravý vývoj matematického vzdělání, a doufám, že vřelý zájem takových odborníků, jako je René Thom a Jean Dieudonné povzbudí další, aby se zúčastnili tohoto vzrušujícího životaplného díla.

Přeložil Přemysl Vihan

Argument o užitečnosti učiva zařazeného do osnov není patrně rozhodující. Stále se v té či oné podobě udržuje názor, že jedním z úkolů vyučování je výběr, tj. vymezení vloh každého studenta, a jejich maximální rozvíjení se zvláštním důrazem na nadané studenty. Já prohlašuji, že je nemožné zvládnout tento úkol v rámci předmětu, který nezahrnuje aspoň některé zbytečné a neužitečné aspekty. Abychom plně posoudili schopnosti studenta, musíme ho vpravit do aktivní role a dovolávat se jeho vlastní iniciativy a podnikavosti. Nic z toho nelze dosáhnout v rámci „užitečného" studia, kde se všemu, co je zařazeno pro svou technickou užitečnost, vyučuje dogmaticky a kde se školní excelování definuje jako přesné a rychlé reprodukování dané látky. Jedině ta témata, která jsou „hrou", mají výchovnou hodnotu, a ze všech takových her je eukleidovská geometrie nejméně zbytečná a nejbohatší stálými odkazy na intuitivně srozumitelné základy.

René Thom

vyučování

Projekt CSMP*)

Blanka Kussová

Program zvaný *Elements of Mathematics* (krátce jen EMP) je druhou částí výzkumného projektu CSMP, zabývajícího se modernizací výuky matematice na všeobecných středních školách v USA. Je určen pro nejnadanější studenty sedmých až dvanáctých tříd střední školy, tj. jen pro 10 – 15% žáků těchto tříd. Program je zajímavý svým náročným obsahem, způsobem práce se žáky i vysokými cíli, jež si klade.

Cíle programu lze formulovat takto:

1. Studenti by se měli seznámit se základními idejemi a *metodami práce v matematice* a naučit se efektivně je používat; měli by si osvojit několik základních jazyků a systémů matematiky.
2. Studenti by měli být schopni rozumět *způsobům dokazování* v matematice, měli by mít dostatek vlastních zkušeností s vytvářením důkazů.
3. Studenti by měli být obeznámeni s *axiomatickou metodou* při výstavbě matematických teorií; měli by znát, co tato metoda může poskytovat a v čem spočívá její omezení.
4. Studenti by si měli osvojit *abstrahování* jako jednu z důležitých metod matematiky, měli by si být vědomi účinnosti vhodně zvolené abstrakce a znát řadu příkladů, kdy byla s úspěchem využita při budování nové matematické teorie.

---

*) První část tohoto článku jsme uveřejnili v minulém čísle.