Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Victor F. Weisskopf

Supravodivost a kvantování magnetického toku

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 22 (1977), No. 3, 121--135

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138221

Supravodivost a kvantování magnetického toku*)

Victor F. Weisskopf, Cambridge (Mass.)

Úvod

V tomto článku předkládáme některé základní myšlenky, které pomáhají pochopit jev supravodivosti. Článek neobsahuje nějaké nové nebo originální myšlenky, naopak, používá představ vyslovených LONDONEM [1] již dávno. Tyto představy připravily logickou strukturu nedávné teorie BARDEENA, COOPERA a SCHRIEFFERA [2]. Byla to práce těchto autorů, která poprvé podala teoretické vysvětlení supravodivosti na základě vzájemné interakce mezi elektrony.

V našem článku budeme tuto interakci chápat pouze fenomenologicky, tj. asi stejně, jako bychom chápali mezimolekulární interakci molekul v kapalině, když bychom chtěli hovořit o některých zvláštnostech kapalného stavu.

Naším cílem je objasnit hlavně rozdíl mezi supravodivým proudem a normálním proudem a vztah supravodivého proudu k magnetickému poli. Ukáže se pak zcela přirozeně, že hodnota magnetického toku pronikajícího plochou obemknutou supravodivým prstencem musí být celistvým násobkem veličiny $hc/2e$**), a že stabilita proudů v supravodivém prstenci je velmi úzce spojena s tímto kvantováním magnetického toku.

I. Vedení proudu v kovech

Kov je charakterizován volným pohybem vodivostních elektronů uvnitř svého objemu. To je také důvod, proč mnoho elektrických jevů v kovech může být dobře vysvětleno extrémním předpokladem, že vodivostní elektrony uvnitř kovu tvoří plyn volných částic. Tento plyn je vysoce degenerován při teplotách, za nichž existují pevné kovy. Energetické rozdělení elektronů má charakteristický tvar Fermiho rozdělení: při nulové abso-

*) Překladem článku *Super-conductivity and the quantization of magnetic flux*, který vyšel jako publikace CERN 62—30, Geneva 1962, chce redakce připomenout, že před dvaceti lety byla odhalena fyzikální podstata supravodivosti. Překlad pořídil MILAN ODEHNAL.

**) Předkládané úvahy jsou značně zjednodušené představy poprvé uveřejněné v práci [3].

lutní teplotě elektrony obsazují kompaktně (hustě)*) všechny energetické hladiny dovolené pro volné částice až do maximální energie E_F, tzv. Fermiho energie; při poněkud vyšší teplotě je obsazení kompaktní pouze pro energetické hladiny, jejichž energie je menší než E_F o mnohem více než je energie kT. Rozdělení je „neostré" kolem Fermiho energie v oblasti energií řádově rovných energii kT.

Vzhledem k velkým elektrickým silám, jimiž působí na elektrony ionty kovu, se však zdá být volný pohyb elektronů uvnitř kovu jevem spíše paradoxním. Ale v kvantové mechanice je pohyb částice v potenciálu s dokonalou periodicitou téměř identický s pohybem ve vakuu kromě případu, kdy vlnová délka splňuje Braggovu podmínku, což není případ vodivostních elektronů v kovu. Aby se elektrony mohly pohybovat volně, musí tedy být mřížka ideální. Tepelný pohyb mřížky a nečistoty v mřížce narušují tuto ideálnost a jsou zdrojem rozptylu elektronů. Vložíme-li kov do elektrického pole, nebudou elektrony urychlovány neomezeně, jako by tomu bylo v ideálním případě jejich volného pohybu. Rozptyl elektronů působí na pohyb elektronů jako tření, což objasňuje elektrický odpor kovů. Jeden jev však zůstává nevysvětlen: jev supravodivosti při velmi nízkých teplotách.

Vysvětlení supravodivosti bylo nalezeno zcela nedávno Bardeenem, Cooperem a Schriefferem, ačkoliv mnoho ze zvláštností tohoto jevu bylo analyzováno již mnohem dříve. Zatímco normální elektrický odpor kovu je způsoben interakcí elektronů s ionty, je supravodivost spojena se vzájemnou interakcí elektronů mezi sebou. Existují dva druhy této interakce: jedním z nich je známé coulombovské odpuzování a druhým je přitahování. Toto přitahování je důsledkem následujícího jevu: elektron pohybující se v krystalové mříži deformuje tuto mříž ve svém nejbližším okolí. Další elektron přibližující se k prvnímu se bude již nacházet v deformované oblasti a jeho potenciální energie se bude snižovat. Tato skutečnost způsobuje vzájemné přitahování mezi elektrony. V některých kovech je toto přitahování tak silné, že může překonat coulombovské odpuzování, zvláště když toto odpuzování je efektivně zeslabeno dielektrickými jevy. Takové kovy pak přejdou do supravodivého stavu.

II. Kompaktní rozdělení

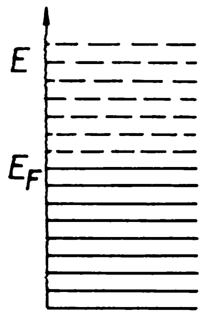
Nebudeme vysvětlovat podrobně jevy, které toto přitahování mezi elektrony vytvářejí. Popíšeme pouze jeho hlavní důsledky a pak ukážeme, jak toto přitahování vytváří supravodivost.

Vraťme se znova k plynu volných elektronů. Na obr. 1 jsou schematicky znázorněny jednoelektronové hladiny v kovu. Označuje-li N počet vodivostních elektronů, pak N-tá hladina od nejnižší hladiny je nejvyšší obsazenou hladinou při teplotě $T = 0\,K$ a má excitační energii rovnou energii E_F. Energetický rozdíl, např. mezi N-tou a N plus prvou hladinou, je nepřímo úměrný objemu, v němž je elektronový plyn uzavřen. Tento rozdíl

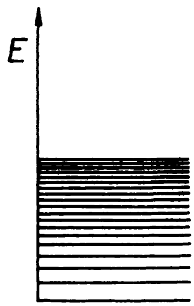
*) Pozn. překl.: Autor používá pro úplné obsazení nejnižších elektronových hladin termín kompaktní rozdělení (compact distribution), který není běžný. V dalším textu budeme však tento termím používat. Jeho přesná definice je uvedena v druhé kapitole.

je „mikroskopicky" malý, čímž budeme rozumět, že je menší než libovolná tepelná energie kT pro teploty pod teplotou přechodu.

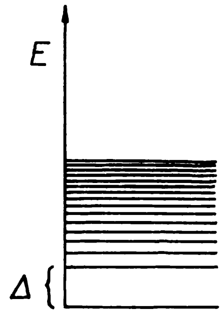
Podívejme se nyní na spektrum kvantových stavů volného elektronového plynu jako na celek (obr. 2). Nejnižší stav je stav, v němž elektrony obsazují kompaktně všechny hladiny až po Fermiho energii*). Nejbližší vyšší stav elektronového plynu jako celku je stav, v němž jeden elektron je vyzvednut na první hladinu nad Fermiho energií, atd. Tedy první excitovaný stav elektronového plynu má pouze „mikroskopicky" vyšší energii než základní stav. Hustota stavů elektronového plynu při poněkud vyšších excitačních energiích je ovšem mnohem větší než hustota jednoelektronových hladin. Taková je situace pro plyn neinteragujících částic.



Obr. 1.



Obr. 2.



Obr. 3.

Obr. 1. Schematické znázornění jednoelektronových kvantových hladin. Vzdálenost mezi hladinami je mikroskopicky malá.

Obr. 2. Schematické znázornění kvantových stavů volného elektronového plynu jako celku. Vzdálenost mezi hladinami je mikroskopicky malá.

Obr. 3. Schematické znázornění kvantových stavů elektronového plynu s přitažlivou interakcí. Energetická mezera Δ je makroskopická.

Nejdůležitějším projevem přitahování mezi elektrony je, že zvyšuje energetický rozdíl Δ mezi základním stavem elektronového plynu a prvním vzbuzeným stavem natolik, že Δ přestává být mikroskopicky malou veličinou (viz obr. 3). Toto zvětšení energetického rozdílu mezi základním stavem a prvním excitovaným stavem je důsledkem zvláštní stability rozdělení, které budeme nazývat „kompaktním rozdělením" elektronů. Kompaktní rozdělení definujeme jako rozdělení, v němž M elektronů obsazuje všechny jednočásticové hladiny od nejnižší až po M-tou hladinu, takže neexistuje žádná neobsazená hladina pod obsazenou hladinou. Číslo M může být libovolný (sudý) počet vodivostních elektronů. M může být rovno N nebo být menší než N. Takové kompaktní rozdělení elektronů je zvláště stabilní. K přechodu jednoho elektronu na vyšší neobsazenou hladinu je zapotřebí určité makroskopické energie Δ. Tento energetický rozdíl se také nazývá „energetickou mezerou".

*) Termín hladina se používá pro kvantové stavy jediného elektronu, zatímco termín stav se vztahuje výlučně na kvantové stavy elektronového plynu jako celku.

Existence této energetické mezery nám nabízí analogii mezi kompaktním rozdělením a kondenzovanou fází. Energie Δ hraje roli vazebné energie. K přechodu elektronu z kondenzované fáze do plynné fáze je zapotřebí energie Δ. Ale v našem případě nejde o přechod v prostoru souřadnic, jako je tomu při přechodu atomu z kapaliny do plynné fáze, ale o přechod v prostoru hybností z kompaktního rozdělení do stavů s vyšší hybností nebo energií. Tato analogie nás přivádí k tomu, že očekáváme existenci teploty přechodu T_c, pod níž kondenzovaná (kompaktní) fáze je v rovnováze s plynnou fází. Zvýšíme-li teplotu nad T_c, pak se kompaktní rozdělení „vypaří" a přejde do normální fáze. Je jasné, že T_c bude spojena s energetickou mezerou Δ vztahem $kT_c \sim \Delta$.

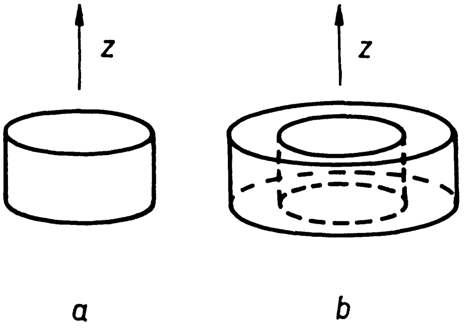
Musíme však udělat další předpoklady o vlastnostech kompaktního rozdělení. Předpokládáme, že přitažlivé síly jsou tak slabé, že elektrony se pohybují téměř volně i v kondenzované fázi. Tato interakce bude pouze měnit energetické vztahy v elektronovém rozdělení tím, že vytváří energetickou mezeru Δ. Takové dynamické vztahy, jako jsou kvantování hybnosti a vztah mezi hybností a rychlostí, zůstávají v podstatných rysech stejné jako pro volné elektrony.

Nebudeme objasňovat proč a jak přitažlivá interakce mezi elektrony vytváří tuto kondenzaci elektronů do kompaktního rozdělení, ačkoliv je pravděpodobné, že takový jev může být způsoben přitažlivými silami. Připomeňme si, že detaily kondenzace plynů do kapalné fáze také nejsou zdaleka pochopeny a známy. Budeme tedy předpokládat, že „energetická mezera" prostě existuje a budeme diskutovat jevy, které její existence vyvolává.

III. Magnetické pole a proud

Za normálních okolností bez magnetického a elektrického pole nevytváří kompaktní a ani jiné elektronové rozdělení žádný proud. Pro každý elektron, který se pohybuje v určitém směru, např. s hybností $\boldsymbol{p}$, existuje totiž v elektronovém rozdělení elektron o stejné energii, ale s hybností $-\boldsymbol{p}$. Je-li obsazen jeden stav, je obsazen i druhý, a jimi vytvářené proudy se navzájem vyruší.

Představme si elektronové hladiny v kovu tímto zjednodušeným způsobem. Předpokládejme, že kovový materiál má válcovou symetrii, tj., že má tvar buď plného, nebo

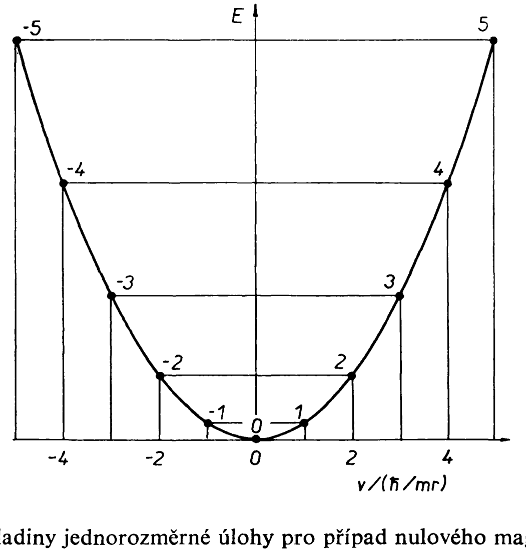


Obr. 4a, b. Dvě formy vodičů (válec a prstenec), jejichž vlastnosti jsou rozebírány v článku.

dutého válce (obr. 4a, b). Zaveďme válcové souřadnice z, r, φ a zajímejme se hlavně o proudy tekoucí ve směru souřadnice φ. Pro jednoduchost zanedbáme tedy změny proudů v souřadnicích z i r a budeme považovat za proměnnou pouze souřadnici φ, na určitém poloměru r. Tím je úloha převedena na jednorozměrný problém a stacionární stavy elektronů obíhajících po obvodu válce musí splňovat podmínku, aby na obvodu $2\pi r$ byl uložen celistvý počet vlnových délek. Elektrony na stacionárních elektronových hladinách mají hybnost $p_n = n\hbar/r$, kde n je celé číslo. Energie těchto stavů a rychlost elektronů v těchto stavech jsou dány vztahy

$$E_n = n^2 \frac{\hbar^2}{2mr^2}, \quad v_n = n \frac{\hbar}{mr}. \tag{1}$$

Dostáváme tak diagram znázorněný na obr. 5 s parabolickou závislostí energie na rychlosti. Na tomto grafu odpovídají kvantovým hladinám ty body, v nichž rychlost v_n je celistvým násobkem hodnoty $\hbar/mr$. V této zjednodušené reprezentaci bude kompaktní rozdělení takovým rozdělením, v němž všechny stavy s $|n| < (N - 1)/2$ budou plně obsazeny pro kladná i záporná n (zanedbáváme zde i v dalších úvahách existenci elektronového spinu, který by nám jen zdvojnásobil počet všech stavů). Nekompaktní (normální) „plynné" rozdělení elektronů v tepelné rovnováze je rozdělení, v němž jsou některé hladiny pod Fermiho energií neobsazeny a některé hladiny nad ní obsazeny. Situace pro kladné a pro záporné hodnoty n je v obou případech symetrická. Pro každé kladné n existuje hladina se stejnou energií se záporným n a s antiparalelním vektorem rychlosti. V tepelné rovnováze je výsledný proud nulový, ať již elektrony mají kompaktní nebo jiné rozdělení.



Obr. 5. Elektronové hladiny jednorozměrné úlohy pro případ nulového magnetického toku. Energie je vynesena v závislosti na rychlosti v jednotkách $\hbar/mr$. Body na parabolické křivce označují dovolené hladiny. Čísla u bodů jsou kvantová čísla n.

Jakým způsobem však za těchto podmínek vytváří elektrické pole proud? Elektrony jsou urychlovány ve směru tohoto pole. V jazyku kvantové mechaniky to znamená, že elektrony pod vlivem pole vykonávají přechody na sousední hladiny. Tato změna v obsazení hladin narušuje symetrii rozdělení a vytváří proud. Když pole zmizí, rozptyl elektronů znovu obnoví původní rozdělení. Takové přechody jsou však možné pouze v nekompaktním (normálním) rozdělení. Je-li rozdělení kompaktní, vyžaduje libovolný přechod minimálně energii Δ a to představuje mnohem větší hodnotu energie, než jakou mohou poskytnout obvyklá elektrická pole. Tedy proudy vznikající v případě kompaktního rozdělení mají úplně jinou podstatu.

Zaveďme nyní konstantní magnetické pole $\boldsymbol{H}$ paralelně s osou z (podélná osa našeho válce). Toto pole může být popsáno vektorovým potenciálem $\boldsymbol{A}$ tak, že jeho složky ve válcových souřadnicích jsou $A_r = A_z = 0$ a $A_\varphi = |\boldsymbol{r}| \cdot |\boldsymbol{H}|/2$. V přítomnosti magnetického pole je vztah mezi hybností a rychlostí změněn. Dostáváme nyní

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right). \tag{2}$$

V klasické fyzice nemá tato změna žádný význam. Pouze rychlost je fyzikální veličinou a rovnice (2) je jen jinou definicí hybnosti. V kvantové fyzice má však hybnost mnohem větší fyzikální význam – je nepřímo úměrná vlnové délce, a tedy určuje kvantové stavy, protože na kruhové dráze musí ležet vždy celistvý počet vlnových délek. Abychom se zbavili zdánlivé libovůle v kalibraci vektoru $\boldsymbol{A}$, můžeme zavést magnetický tok přes smyčku o poloměru r: $\Phi = 2\pi r A_\varphi$ a dostaneme z rovnice (1) a (2) výraz pro rychlost na kvantových drahách

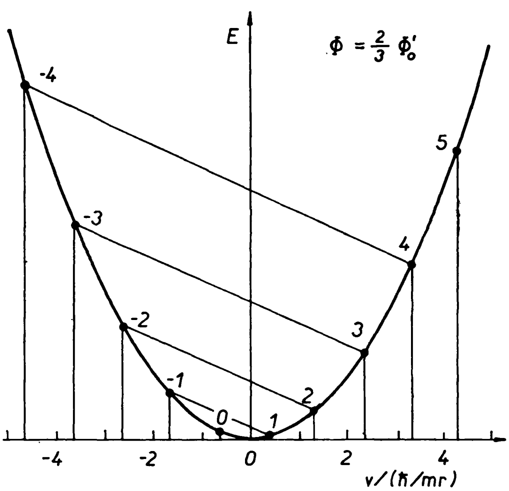
$$v_n = \frac{1}{m}\left(p_n - \frac{e}{2\pi rc}\,\Phi\right) = \frac{\hbar}{mr}\left(n - \frac{e}{2\pi\hbar c}\,\Phi\right). \tag{3}$$

Zapnutí magnetického pole změní rychlosti elektronů na všech kvantových drahách. To je ovšem přesně změna, kterou podle klasické elektrodynamiky očekáváme v důsledku naindukovaných proudů způsobených zapnutím magnetického pole. V souhlasu s Ehrenfestovým adiabatickým principem je změna na kvantových orbitách stejná jako na odpovídajících klasických drahách.

Co se stane s rozdělením na obr. 5 v přítomnosti magnetického pole? Elektronové hladiny již nebudou odpovídat hodnotám $v_n = n(\hbar/mr)$. Dovolené hodnoty v_n jsou nyní posunuty o Φ/Φ_0', jak je naznačeno na obr. 6 pro $\Phi/\Phi_0' \sim 2/3$, kde $\Phi_0' = 2\pi\hbar c/e$.

Můžeme nyní snadno vidět, že kompaktní rozdělení elektronů již nemůže mít v tomto případě nulový proud – kladné a záporné hodnoty v_n se již nekompenzují. Proud, který takovým způsobem dostáváme, má úplně jinou podstatu než proud vytvořený elektrickým polem. Tento proud není vyvolán přechody elektronů na hladiny o jiné rychlosti elektronů. Elektrony zůstávají na svých původních hladinách, ale rychlost na každé hladině je změněna přítomností magnetického pole.

Není-li rozdělení kompaktní, je možné vždycky dosáhnout nulového proudu tím, že část elektronů na té straně rozdělení, kde hodnoty v_n jsou větší (levá strana na obr. 6), bude rozptýlena do „děr" na vrcholu té strany rozdělení, kde jsou hodnoty v_n nižší (pravá strana na obr. 6), a tím vykompenzovat vzniklou asymetrii v rozdělení. Tento děj nastává u kovů s normální vodivostí, když zapneme magnetické pole. V kovu se indukuje proud, který pak klesá k nule v důsledku nenulového elektrického odporu kovu. Tento pokles je způsoben rozptylem popsaným nahoře. K žádnému takovému poklesu proudu však nedochází v supravodiči v důsledku kompaktního rozdělení elektronů. Elektron nacházející se na straně rozdělení s vyšší hodnotou v_n nemůže být rozptýlen na stranu rozdělení s nižší hodnotou v_n, protože by musel být vytrhnut z tohoto rozdělení. K tomu je však zapotřebí energie Δ, která je mnohem větší než energie, kterou by elektrony získaly přechodem na energeticky nižší stranu rozdělení*).



Obr. 6. Stejné hladiny jako na obr. 5, nyní však za přítomnosti magnetického toku $\Phi = (2/3)\,\Phi_0'$. Hladiny s kvantovými čísly n a $-n$ nemají již stejnou energii.

IV. Válec z normálního kovu v magnetickém poli

Podívejme se nyní podrobně, co se stane v kovovém válci (obr. 4a), když zapneme magnetické pole paralelně s jeho osou z. Je-li teplota vyšší než kritická teplota, zapnutí pole vytvoří cirkulační proudy ve válci, které jsou však rychle utlumeny. Konečný stav je tedy stav bez proudu a s konstantním magnetickým polem pronikajícím přes celý

*) Zdá se, že v tomto výkladu je logická chyba. Mohli bychom totiž argumentovat tím, že elektrony s nejvyšší energií na vysokoenergetické straně rozdělení by mohly být rozptýleny do nižších neobsazených stavů na nízkoenergetické straně a vytvořit znovu kompaktní rozdělení, takže v konečném stavu bychom získali energii Δ. Ale tak tomu není. V kompaktním rozdělení interagují elektronové páry mezi sebou, speciálně páry s kvantovými čísly $\pm n$. Kdyby byl např. elektron převeden z vrcholu rozdělení na levé straně na vrchol rozdělení na pravé straně, nenašel by na druhé straně rozdělení žádného partnera, s nímž by interagoval, a nemohl by se tedy včlenit do nového kompaktního rozdělení kromě případu, kdy by u všech elektronů došlo ke vzájemné výměně svých partnerů. Taková kompletní reorganizace kompaktního rozdělení má však velmi malou pravděpodobnost (malý integrál překrytí).

průřez kovového válce, ale je to stav s jiným elektronovým rozdělením než před zapnutím magnetického pole.

Je-li teplota nižší než kritická teplota, kompaktní rozdělení elektronů se nemůže změnit a udržuje trvalý cirkulační proud v přítomnosti magnetického pole. Tento indukovaný proud, vzniklý zapnutím magnetického pole, vytváří vlastní magnetické pole, které má uvnitř válce opačný směr než vnější pole. Jak za okamžik ukážeme, proud indukovaný na povrchu válce je dostatečně veliký, aby vyrušil téměř v celém objemu vodiče vnější pole. Vně válce se magnetické pole vytvářené tímto proudem sčítá s vnějším polem. V závislosti na poloměru r dostaneme kvalitativně takové rozdělení proudu i magnetického pole, jak je znázorněno na obr. 7.

Udělejme však nyní poněkud kvantitativnější úvahy. V souhlasu s rovnicí (2) získá každý elektron v přítomnosti magnetického pole dodatečnou rychlost $e\mathbf{A}/mc$. Celková proudová hustota naindukovaná ve válci je pak dána vztahem $\mathbf{j} = -\nu e^2\mathbf{A}/mc$, kde ν je hustota elektronů v kompaktním rozdělení. Vezmeme-li rotaci této proudové hustoty, dostaneme Londonovu rovnici:

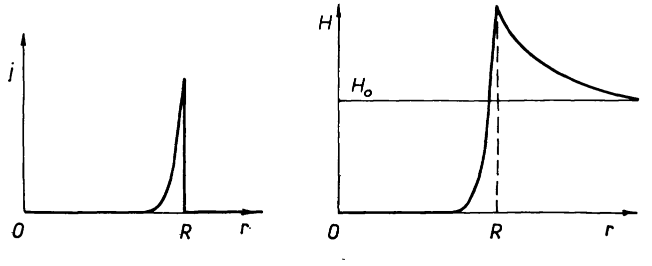
$$\text{rot}\,\mathbf{j} = -\nu\frac{e^2}{mc}\mathbf{H} = -\frac{c}{l^2}\mathbf{H}\,. \tag{4}$$

Další operace rot nám dá (připomeňme si, že rot rot $\mathbf{j} = -\nabla^2\mathbf{j}$, protože $\nabla\mathbf{j} = 0$ a rot $\mathbf{H} = \mathbf{j}/c$)

$$\nabla^2\mathbf{j} = \nu\frac{e^2}{mc^2}\mathbf{j}\,. \tag{5}$$

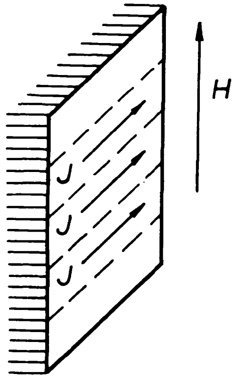
Odtud dostáváme pro případ, že $\mathbf{j}$ závisí pouze na jediné souřadnici, např. na vzdálenosti x od povrchu válce, výraz $|\mathbf{j}| \sim \exp(\pm x/l)$, kde $l = (mc^2/e^2\nu)^{1/2}$. Tedy na libovolném povrchu supravodiče musí proud exponenciálně klesat směrem do vnitřku supravodiče (nemůže dost dobře růst do nekonečna) s hloubkou vniku $l = d(d/r_0)^{1/2}$, kde $d = \nu^{-1/3}$ je střední vzdálenost mezi vodivostními elektrony a r_0 je klasický poloměr elektronu. Protože d je řádově rovno Bohrovu poloměru, je l přibližně rovno $137d$. Ve skutečnosti je však l poněkud větší než tato hodnota.

Supravodivý proud teče pouze ve velmi tenké vrstvě po povrchu supravodiče. Proto mluvíme o proudové vrstvě, jejíž intenzita je určena proudem na 1 cm označovaným J (je to proud v této vrstvě v pásku paralelním se směrem proudu a majícím šířku 1 cm).



Obr. 7. Proudová hustota $\mathbf{j}$ a magnetické pole $\mathbf{H}$ jako funkce radiální vzdálenosti r pro supravodivý válec ve vnějším magnetickém poli H_0. Poloměr válce je R.

Je-li j proudová hustota ve vrstvě o tloušťce l, pak je $J = lj$. Z Londonovy rovnice (4) plyne*) pak jednoduše, že kdykoli existuje magnetické pole $\boldsymbol{H}$ podél povrchu (ne kolmo na povrch) supravodiče, musí existovat na tomto povrchu proudová vrstva, v níž teče proud kolmo na $\boldsymbol{H}$ s hodnotou proudu na 1 cm rovnou hodnotě $J = c|\boldsymbol{H}|$. To je tzv. diferenciální zákon supravodivosti. Proud je právě tak veliký, že vyruší magnetické pole uvnitř supravodiče v hloubce větší, než je tloušťka povrchové proudové vrstvy l (obr. 8).



Obr. 8. Povrch supravodiče. Magnetické pole $\boldsymbol{H}$ leží v naznačeném směru a vytváří proudovou vrstvu, jak je znázorněno na obrázku. Velikostí proudové vrstvy J rozumíme proud tekoucí v pásku o šířce 1 cm. Tento pásek je ohraničen dvěma přerušovanými čarami.

Situace supravodivého válce na obr. 4a v magnetickém poli paralelním s jeho osou je tedy následující: magnetické pole vytvoří proudovou vrstvu na povrchu válce, která zvětšuje původní pole v těsném okolí válce a ruší magnetické pole uvnitř válce. Nezapomínejme, že tento proud *není* vytvářen změnou v elektronovém rozdělení v kovu jako v případě normálních proudů. Je to stále totéž nezměněné kompaktní rozdělení, které *v přítomnosti magnetického pole* tento proud vytváří**). Tento proud musí téci v povrchové vrstvě kovu, protože on sám zabraňuje vniknutí magnetického pole dovnitř.

*) Odvození: Vypočítáme plošný integrál rovnice (4) přes obdélník široký 1 cm a vysoký l_0 cm, přičemž $1 \gg l_0 \gg l$. Plocha obdélníku je kolmá na povrch válce a na směr proudu. Jedna dlouhá strana obdélníku leží na povrchu a druhá uvnitř válce. Plošný integrál levé strany (4) je roven dráhovému integrálu hustoty $\boldsymbol{j}$ a dává nám právě hodnotu j. Plošný integrál pravé strany (4) dává výsledek $|\boldsymbol{H}|\, c/l$, protože $\boldsymbol{H}$ proniká pouze do hloubky l. Dostáváme tak výsledek $J = lj = c|\boldsymbol{H}|$.

**) Kompaktní rozdělení v přítomnosti magnetického pole již nesplňuje přesně definici, kterou jsme uvedli v kap. II. Ne všechny hladiny jsou obsazeny až po danou energii. Na obr. 6 je vidět, že hladiny na jedné straně rozdělení budou obsazeny až do energie, která je vyšší než na druhé straně rozdělení, má-li magnetický tok větší hodnotu než Φ'_0. Navíc, bez přítomnosti magnetického pole je toto elektronové rozdělení složeno z dvojic hladin s hodnotami kvantového čísla $\pm n$, dvojic, které jsou vůči sobě symetrické (jeden stav se dostane časovou inverzí z druhého stavu). Zdá se, že interakce mezi takovými dvojicemi elektronů má zvláštní důležitost pro stabilitu kompaktního rozdělení. V přítomnosti magnetického pole je však tato symetrie (vzhledem k inverzi času — pozn. překl.) těchto elektronových párů narušena. To je důvod, proč musíme poněkud změnit naši definici: kompaktní rozdělení musí splňovat všechny požadavky týkající se obsazení hladin až po určitou energii a stavy jednotlivých složek elektronových párů musí být symetrické vzhledem k inverzi času pouze uvnitř supravodiče. V blízkosti povrchu předpokládáme, že kompaktní rozdělení zůstane stejné jako uvnitř supravodiče, zvláště pokud se týká obsazení hladin, i přesto, že některé požadavky naší definice v přítomnosti magnetického pole nejsou splněny. Zdá se, že ztráta symetrie vzhledem k inverzi času v elektronových párech neovlivňuje stabilitu kompaktního rozdělení, pokud je tato ztráta symetrie omezena pouze na tenkou povrchovou vrstvu.

Nyní již můžeme pochopit ztrátu elektrického odporu v supravodivém přímém válcovém vodiči o poloměru R, vloženém mezi dva obyčejné vodiče. Proud I ve vodiči vyvolává kolem něho magnetické pole, jehož intenzita na povrchu vodiče je podle elementárního vztahu rovna $H = I/(2\pi Rc)$. Toto pole vytváří proudovou vrstvu s hodnotou proudu na 1 cm rovnou $J = cH$. Proud $2\pi RJ$ v této proudové vrstvě teče ve směru drátu a rovná se celkovému protékajícímu proudu I: $2\pi RJ = I$. Tedy celkový proud je přes supravodivý drát veden pouze tenkou povrchovou proudovou vrstvou. Opět dostáváme stejné kompaktní elektronové rozdělení všude uvnitř vodiče. Je to rozdělení, které by bez magnetického pole *nevytvořilo* proud, ale které v přítomnosti tohoto pole vytváří proud na povrchu supravodiče.

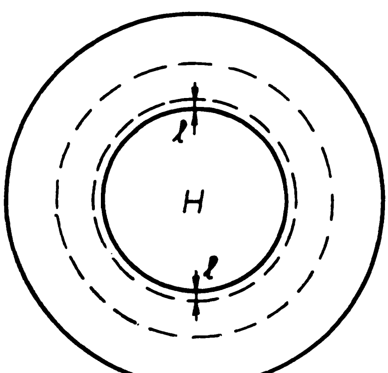
Zvýšíme-li náhle teplotu drátu, pak elektronové rozdělení nesoucí povrchový proud vyvolaný magnetickým polem bude brzy rozrušeno elektronovým rozptylem a proud poklesne. Tím se vytvoří spád elektrického potenciálu mezi oběma konci drátu, který změní elektronové rozdělení tím, že začne urychlovat elektrony ve směru elektrického pole. Rovnováha mezi tímto urychlováním elektronů a jejich zpomalováním v důsledku rozptylu vytváří normální proud podle Ohmova zákona.

Nepřítomnost odporu supravodiče je způsobena skutečností, že kompaktní rozdělení vytváří v magnetickém poli, jímž je tento supravodič obklopen, povrchový proud. Na koncích supravodivého drátu se nevytváří žádný potenciální spád a původní nezměněné kompaktní rozdělení je schopno vyvolat potřebný proud.

V. Supravodivý prstenec v magnetickém poli Kvantování magnetického toku

Situace je mnohem zajímavější, když uvažujeme spojitě uzavřený kovový prstenec (obr. 4b). Nad kritickou teplotou je všechno úplně jednoduché: zapnutí magnetického pole paralelně s osou z prstence vytvoří v prstenci proud, který se po krátké chvíli utlumí a magnetické pole pronikne přes celý objem prstence.

Je-li prstenec v supravodivém stavu, je situace úplně jiná. Nejprve se zdá, že je vůbec nemožné, aby nějaký magnetický tok mohl existovat v otvoru prstence, a že tedy ne-



Obr. 9. Řez supravodivým prstencem zobrazeným na obr. 4b. Vnější přerušovaná kružnice obepíná celkový magnetický tok přes otvor prstence. Vnitřní čárkovaná kružnice obepíná menší tok, protože magnetické pole $\boldsymbol{H}$ proniká do kovu do hloubky l.

potečou supravodivým prstencem ani žádné obvodové proudy. Argumentuje se takto: v supravodivém stavu musí téci proudy pouze po povrchu masívního supravodiče a nikoli uvnitř. Bude-li však magnetický tok pronikající otvorem prstence nenulový, musí kompaktní rozdělení vytvářet cirkulační proudy i uvnitř kovu, protože libovolná kruhová dráha vedená uvnitř prstence a obepínající otvor prstence bude obepínat nenulový magnetický tok, ať ji vedeme jakkoli hluboko v kovu prstence nebo blízko jeho povrchu (viz obr. 9). To by však v souladu s rovnicí (3) muselo vyvolávat proud. Tím ovšem docházíme k paradoxu. Tak např. magnetický tok o hodnotě několika gauss. cm^2 by uvnitř vodivé smyčky o poloměru 1 cm, tedy v místě, kde by proud měl být roven nule, vyvolal proudovou hustotu 10^{10} A/cm^2. To je ovšem neudržitelná situace, protože rovnice (5) nám říká, že proudová hustota musí klesat exponenciálně směrem dovnitř supravodiče, a to v malé vzdálenosti od jeho povrchu.*)

Abychom rozřešili tento spor, musíme znovu přezkoumat náš koncept kompaktního rozdělení. Podívejme se znova na obr. 5 a 6. Ukázali jsme již, že elektronové kvantové hladiny jsou posunuty v přítomnosti magnetického pole. Zajímavá situace vzniká, když magnetický tok je celistvým násobkem $\Phi_0' = 2\pi\hbar c/e$. V tomto případě jsou dovolené kvantové hladiny přesně stejné jako v případě nulového magnetického toku – pouze jejich označení bude jiné. V případě, že $\Phi = k\Phi_0'$, kde k je celé číslo, je situace podobná situaci v klasické fyzice pro libovolnou hodnotu Φ: k žádným změnám ve srovnání se stavem s $\Phi = 0$ nedochází, pouze je zapotřebí definovat jinak velikost hybnosti p.

---

*) Pozn. překl.: Podle (3) můžeme spočítat přírůstek proudové hustoty $\mathbf{j} = 2ev\mathbf{v}$ (pro libovolné n), dojde-li ke změně magnetického toku Φ o 1 $Gcm^2 = 10^{-8}$ Wb: $\delta j = 2ev(\hbar/mr)(\Phi/\Phi_0)$, kde v je hustota elektronů. Pro hodnoty $v = 10^{28}$ elektronů/m^3, $e = 1{,}6 \,.\, 10^{-19}$ C, $\hbar = 1 \,.\, 10^{-34}$ Js, $m = 9 \,.\, 10^{-31}$ kg, $r = 10^{-2}$ m, $\Phi = 10^{-8}$ Wb dostaneme proudovou hustotu $\delta j \sim 10^{10}$ [Acm^{-2}]. Bude-li však $\Phi = k\Phi_0$, pak budeme předpokládat, že proudová hustota uvnitř supravodiče $\delta j \equiv 0$, protože kompaktní rozdělení při $\Phi = k\Phi_0$ dává nulový proud, jako kdyby magnetický tok $\Phi = 0$. Vedeme-li však celou integrační dráhu blízko vnitřního povrchu prstence v hloubce menší, než je hloubka vniku l, pak obemknutý tok Φ' je poněkud menší než $k\Phi_0$ a elektrony na těchto drahách musí dát vznik proudové hustotě $\delta j = 2ev(\hbar/mr)(\Phi' - k\Phi_0)$. Tato situace odpovídá tzv. *kvantování fluxoidu* (fluxoidem nazýváme křivkový integrál kanonické hybnosti $\mathbf{p} = 2m\mathbf{v} + 2(e/c\, \mathbf{A})$:

$$\oint \mathbf{p}\, \mathrm{d}\mathbf{l} = \oint 2m\mathbf{v}\, \mathrm{d}\mathbf{l} + 2\,\frac{e}{c} \oint \mathbf{A}\, \mathrm{d}\mathbf{l} = nh\,.$$

Po úpravě dostáváme

$$\frac{mc}{e} \oint \mathbf{v}\, \mathrm{d}\mathbf{l} + \Phi' = \frac{nhc}{2e} = n\Phi_0$$

nebo

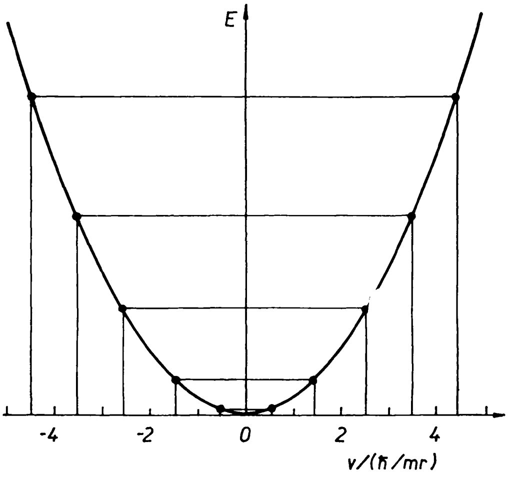
$$\frac{mc}{2e^2 v} \oint \mathbf{j}\, \mathrm{d}\mathbf{l} + \Phi' = n\Phi_0\,.$$

Leží-li však celá integrační dráha hluboko v masívním supravodivém prstenci, kde $\mathbf{j} \equiv 0$, pak dostáváme *kvantování magnetického toku*

$$\Phi = n\Phi_0\,.$$

Jaký to má fyzikální důsledek? Poznali jsme již předtím, že kompaktní elektronové rozdělení, které se vytvořilo při $\Phi = 0$, vede ke vzniku proudu při $\Phi \neq 0$. Ale nyní vidíme, že pro $\Phi = k\Phi_0'$ můžeme vytvořit jiné kompaktní rozdělení s nulovým proudem jednoduše tak, že budeme obsazovat hladiny symetricky kolem hladiny odpovídající $v_n = 0$, která však teď už nebude hladinou s $n = 0$, ale hladinou s $n = k$. Tak jsme rozřešili shora uvedený paradox. Je možné mít kompaktní rozdělení s nulovým proudem uvnitř supravodivého prstence obepínajícího magnetický tok Φ za předpokladu, že tento tok je celistvým násobkem Φ_0'. Ve skutečnosti toto nové kompaktní rozdělení je přesně identické s kompaktním rozdělením při nulovém magnetickém toku. Také se skládá z dvojic elektronů, jejichž stavy jsou symetrické vzhledem k inverzi času. Jediný rozdíl je v jiném označení hladin. Může tedy existovat supravodivý prstenec obepínající magnetický tok $\Phi = k\Phi_0'$ s nulovým proudem uvnitř vlastního kovu prstence. Je jasné, že na povrchu supravodiče potečou povrchové proudy, které udržují magnetické pole, ale tuto skutečnost budeme diskutovat později.

Dříve než budeme studovat detaily této situace s povrchovými proudy, musíme připojit ještě následující důležitou poznámku: Kompaktní rozdělení s nulovým proudem může být také vytvořeno v případě magnetických toků, které jsou polovinovým násobkem $\Phi_0' : \Phi = (k + 1/2)\,\Phi_0'$. To je snadno vidět na obr. 10. V tomto případě jsou opět dovolené rychlosti v_n uspořádány symetricky kolem $v = 0$ a bezproudové kompaktní rozdělení existuje, když hladiny $(k + n + 1)$ a hladiny $(k - n)$, kde $n = 0, 1, 2, \ldots$, jsou obsazeny elektronovými páry. Toto rozdělení se také skládá z dvojic elektronů s antiparalelními hybnostmi. V tomto případě se ovšem počet elektronů liší o jednotku od počtu elektronů v jiných kompaktních rozděleních. Ale to není důležité, protože vždycky existuje určitý počet elektronů, které jsou „vypařeny“ z kondenzované fáze.



Obr. 10. Elektronové hladiny jednorozměrné úlohy pro magnetický tok $\Phi = (k + 1/2)\,\Phi_0'$, kde k je celé číslo. Body na parabole určují energii hladin a jim odpovídající rychlosti.

Aniž bychom šli do podrobností, vynořuje se již jedna skutečnost: magnetický tok pronikající přes supravodivý prstenec je kvantován a může být pouze celistvým nebo polovinovým násobkem hodnoty $\Phi'_0 = 2\pi\hbar c/e$*), **).

VI. Supravodivý prstenec v magnetickém poli Stabilita supravodivých proudů

Podívejme se nyní detailně na případ supravodivého prstence, který obepíná magnetický tok. Protože podél vnitřní válcové plochy prstence existuje nyní magnetické pole paralelní s osou prstence, očekáváme, že se na této ploše vytvoří proudová vrstva. Tuto proudovou vrstvu tvoří v podstatě supravodivý proud, který udržuje magnetický tok v otvoru prstence***).

Jak je však tento supravodivý proud v souladu s našimi představami o existenci kompaktního rozdělení v kovu? Podívejme se na situaci uvnitř kovu válcového prstence. Celkový tok Φ přes otvor prstence ($\Phi = n\Phi'_0/2$, kde n je celé číslo) musí být celistvým nebo polovinovým násobkem Φ'_0, aby se vytvořilo kompaktní elektronové rozdělení s nulovou proudovou hustotou v hloubce kovu prstence. Ale magnetické pole proniká jen na malou vzdálenost do supravodiče. Tedy magnetický tok přes kruhovou dráhu, kterou vedeme přímo po vnitřní válcové ploše prstence, bude o něco menší než Φ, protože je zanedbáno magnetické pole, které proniká do kovu. Ve skutečnosti bude vždy magnetický tok uzavřený drahou vedenou v kovu prstence v hloubce l od vnitřního povrchu o něco menší než Φ (viz obr. 9). Jakákoli odchylka drahou uzavřeného magnetického toku od kvantované hodnoty Φ v povrchové oblasti supravodiče způsobuje, že kompaktní rozdělení vyvolává proud. Tedy kompaktní rozdělení vyvolává nenulovou proudovou hustotu v tenké povrchové vrstvě prstence, zatímco hluboko uvnitř kovu prstence je proud nulový.

Nyní můžeme pochopit stabilitu supravodivého proudu v supravodivém prstenci. Předpokládejme, že shora uvedená situace je mírně narušena například tím, že supravodivý proud poklesl o malou hodnotu. To by zmenšilo magnetický tok Φ o malou hodnotu $\Delta\Phi$. Ale hodnota $(\Phi - \Delta\Phi)$ již není kvantovanou hodnotou. Kompaktní rozdělení by vytvořilo proudovou hustotu uvnitř objemu prstence, což by vyvolalo obrovský proud ΔJ. Tento proud ΔJ by tekl stejným směrem jako proud v proudové vrstvě na vnitřní ploše prstence. Důvod je zřejmý: oba proudy jsou tvořeny tokem, který je menší než hodnota kvantovaného toku Φ. Tento dodatečný proud ΔJ by tedy velmi rychle vyrovnal pokles supravodivého proudu a znova by ustavil tutéž původní kvantovanou hodnotu Φ.

*) Tok Φ'_0 může být definován takto: vzrůst magnetického toku pronikajícího kruhovou elektronovou dráhu o jedno Φ'_0 znamená, že moment hybnosti elektronu vzroste o jedno $\hbar$.

**) Pozn. překl.: Snad je třeba upozornit, že kvantování magnetického toku v supravodivém prstenci v hodnotách $\Phi = k\Phi'_0$ a v hodnotách $\Phi = (k + 1/2)\,\Phi'_0$, kde $\Phi'_0 = hc/e$ se dá napsat jako dnes častěji používaný vztah $\Phi = k\Phi_0$, kde $\Phi_0 = \Phi'_0/2 = hc/2e$ a $k = 0, 1, 2, \ldots$, jak již bylo uvedeno v úvodu.

***) Podél vnější válcové plochy prstence se uzavírá zpětně mnohem slabší magnetické pole. Bude tedy na ní také existovat mnohem slabší proudová vrstva, jejíž vliv je však nepodstatný. Zeslabuje pouze výsledný supravodivý proud.

Tento mechanismus zajišťuje stabilitu kvantovaného toku v supravodivém prstenci a stabilitu supravodivého proudu, který jej vytváří. Libovolná malá změna toku od hodnoty Φ vytváří velmi silné proudy, které tuto změnu okamžitě vyrovnávají. Supravodivé proudy mohou téci tedy po celá léta beze změny, je-li teplota prstence udržována pod kritickou teplotou.

Otázka, která doposud zůstává nezodpověděna, je: jak se vytvoří kompaktní elektronové rozdělení v prstenci, jímž protéká supravodivý proud? Není to přece totéž kompaktní rozdělení, jaké existuje v kovu bez přítomnosti magnetického pole a proudu. Je vytvářeno v okamžiku, kdy supravodivý proud začíná protékat supravodičem. Ve skutečnosti však žádné supravodivé proudy nemohou být v prstenci indukovány, má-li prstenec teplotu nižší, než je kritická teplota. Ustaví se totiž takové kompaktní rozdělení, které odpovídá nulovému magnetickému toku – to jest rozdělení, jaké je vytvářeno v nulovém magnetickém poli – a žádná změna tohoto rozdělení není možná. V prstenci je „zamrazen" nulový magnetický tok. Supravodivý proud v prstenci může být vytvořen takto: „Teplý" prstenec je vložen do magnetického pole a teprve pak je prstenec ochlazen pod kritickou teplotu – stále však v přítomnosti magnetického pole. Při tomto způsobu proniká prstencem nenulový magnetický tok během jeho ochlazování a ten je pak „zamrazen" v prstenci.

Podívejme se, co se děje během tohoto postupu s elektronovým rozdělením. Uvažme tyto čtyři etapy:

(1) teplý prstenec, nulové magnetické pole,
(2) teplý prstenec, nenulové magnetické pole,
(3) ochlazený prstenec, nenulové magnetické pole,
(4) ochlazený prstenec, nulové magnetické pole.

V případě (1) se ustaví obyčejné nekompaktní elektronové rozdělení, v němž v průměru jsou elektronové hladiny s kvantovými čísly n a $-n$ obsazeny stejně. Rozdělení je symetrické kolem hladiny s $n = 0$, protože hladiny n a $-n$ mají stejnou energii (čísla n se vztahují na elektronové hladiny definované rovnicí (1) našeho jednorozměrného modelu). Zapneme-li magnetické pole – jdeme od případu (1) k případu (2) – indukuje se v prstenci proudový impuls, který se rychle utlumí v důsledku elektrického odporu vodiče. Vytvoří se nové kompaktní rozdělení, které je symetrické kolem hladiny s $n = \kappa$, je-li magnetický tok přes prstenec $\Phi = \kappa\Phi'_0$. To znamená, že hladiny $(\kappa + n)$ a $(\kappa - n)$ mají stejnou energii, a tedy i stejné obsazení (je-li κ neceločíselné, což nad kritickou teplotou je možné, budou dvojici vytvářet hladiny $(k + n)$ a $(k - n)$, kde k je nejbližší celé číslo ke κ a tvrzení o symetrii rozdělení kolem hodnoty $n = \kappa$ platí jen přibližně). Jdeme-li od případu (2) k případu (3) vznikne nové rozdělení, které je symetrické kolem hladiny s $n = k$, kde k je nejbližší celé nebo polovinové číslo ke κ. Magnetický tok se změní, je-li to nutné, z neceločíselné hodnoty $\kappa\Phi'_0$ na hodnotu $k\Phi'_0$. Toto kompaktní rozdělení dává vznik proudové vrstvě na povrchu prstence a ruší magnetické pole uvnitř kovu prstence, a to zcela v souhlasu s nyní často diskutovaným mechanismem supravodivosti. Na vnitřním i na vnějším povrchu prstence existují proudové vrstvy se stejně velikými hodnotami proudu, které však na vnitřní straně prstence tečou v obráceném směru než na jeho vnější straně. Jeden z nich brání magnetickému poli proniknout do vnitřku prstence zevnitř a druhý zvenku. Výsledný celkový proud protékající prstencem je nulový.

Když konečně přejdeme od případu (3) k případu (4), vymizí vnější magnetické pole (kromě slabého pole, které je vytvářeno trubicemi magnetického toku uzavírajícími tok přes vnitřní otvor prstence) a vymizí i proudová vrstva na vnějším povrchu prstence. Její vymizení je důsledkem vypnutí magnetického pole a naindukováním protiproudu. Magnetický tok pronikající otvorem prstence však nemůže zmizet. Jak jsme již vysvětlili, je tento tok v prstenci zamrazen. Libovolná změna tohoto toku by vedla k vytvoření obrovské proudové hustoty uvnitř prstence, která by tuto změnu ihned vykompenzovala.

Prstenec se supravodivým proudem má kompaktní rozdělení symetrické kolem kvantového čísla $n = 0$. Toto rozdělení se vytvoří po kondenzaci elektronového rozdělení do kompaktní fáze z výchozího normálního nekompaktního rozdělení, které samotné bylo symetrické, protože v přítomnosti magnetického pole představovalo bezproudové rovnovážné rozdělení.

Literatura

[1] LONDON F., *Superfluids*, John Wiley, New York, 1950.
[2] BARDEEN J., COOPER L. N., SCHRIEFFER J. R., Phys. Rev. *108* (1957), 1175.
[3] BYERS N., YANG C. N., Phys. Rev. Lett. *7* (1961), 46.

V diskusích o aplikované matematice vzniká často pro její nejasnou definici mnoho potíží, které se projevují nedorozuměními. Považuji za nutné uvést aspoň tyto čtyři různé definice:

(1) Aplikovaná matematika znamená klasickou aplikovanou matematiku, tj. klasickou oblast analýzy a partie, které se vztahují k fyzice.

(2) Aplikovaná matematika zahrnuje všechny druhy matematiky, které poskytují možnosti opravdu praktických aplikací. Patří tam všelicos, co se běžně zařazuje do škol 1. a 2. stupně, skoro všechno z 3. stupně a také mnohé z vyšší matematiky na univerzitách. V tomto ohledu a v očích mnohých lidí jsou teorie pravděpodobnosti, statistika, lineární algebra a informatika stejně důležité jako klasická analýza.

(3) Aplikovaná matematika znamená to, že se vyjde ze situace v jiném oboru nebo z reálného života, vyhledá se matematická interpretace nebo se vytvoří model, s tímto modelem se matematicky pracuje a výsledky se uplatní ve výchozí situaci.

(4) Aplikovaná matematika je to, co se opravdu dělá, když se matematika používá v praxi. To odpovídá definici (3), zahrnuje však obvykle i několikanásobnou stavbu mostů mezi matematikou a oblastmi vně matematiky.

Aplikace matematiky se mohou skládat z rutinního použití matematiky, z matematického způsobu myšlení jako protikladu k přímému upotřebení výsledků, z vytváření malých modelů, z matematického zkoumání problémů v realitě a z opravdu dalekosáhlého použití samotné matematiky. Žádnou oblast lidského snažení nelze vyloučit z kvantifikujícího způsobu myšlení a z tvorby matematických modelů. Vzájemné ovlivňování matematiky a jiných disciplín, které je implicitně vyjádřeno definicí (4), nemá žádné hranice.

H. O. Pollak