Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Egbert Brieskorn

O dialektice v matematice. III

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 24 (1979), No. 3, 163--173

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138203

diskuse

O dialektice v matematice III

Egbert Brieskorn, Bonn

Konečno a nekonečno

Ve své knize *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* ([35]) píše HERMANN WEYL na konci kapitoly nazvané *O podstatě matematického poznání*: „Chceme-li nakonec lapidárně vystihnout živoucí jádro matematiky, můžeme docela dobře říci: je to věda o nekonečnu. Bylo velkým výkonem starých Řeků, že učinili z napětí mezi konečnem a nekonečnem plodný nástroj poznání skutečnosti. Zde by mělo být ujasněno, jaký význam mělo a má toto napětí — a pokusy o jeho překonání — pro dějiny teoretického poznání: ≫ Nekonečno dokázalo pohnout nitrem člověka tak hluboce jako žádná jiná otázka všech dob; nekonečno zapůsobilo na lidský rozum tak podnětně a plodně jako snad žádná jiná myšlenka; avšak nekonečno také více než kterýkoliv jiný pojem si naléhavě žádá vysvětlení ≪ (HILBERT, *O nekonečnu*)". Starořečtí matematikové naráželi jak v geometrii, tak i v aritmetice na problém nekonečna: v geometrii v souvislosti s problémem výpočtu ploch a objemů a s diskusí o povaze kontinua a o proměnách jevů v prostoru a čase, která se nejvíce vyostřila v ZENONOVÝCH paradoxech; v aritmetice v souvislosti s objevením iracionálních čísel jako bylo číslo $\sqrt{2}$ u pythagorejců. Pokus o překonání potíží spjatých s problematikou nekonečna vedl k nejdůležitějším úspěchům starořecké matematiky: byla to teorie nejjednodušších iracionálních čísel v geometrickém tvaru, vypracování ARCHIMEDOVA axiómu a EUDOXOVY teorie proporcí a vyvinutí dvou metod pro výpočet ploch a objemů: jedné přesné, ale heuristicky nepříliš vydatné metody exhaustivní a další, ne přesně zdůvodněné, ale plodné infinitezimální metody Archimedovy. Dnešním jazykem bychom mohli říci, že Archimedův axióm naznačuje, že reálná čísla jsou archimedovsky uspořádána a že v teorii proporcí je reálné číslo charakterizováno příslušným řezem v množině racionálních čísel. Staří Řekové ovšem nedošli až k rozšíření pojmu čísla v tom smyslu, že by každému řezu odpovídalo nějaké číslo, nýbrž koncipovali teorii proporcí jako čistě geometrickou teorii. DEDEKIND učinil poslední krok a definoval kontinuum reálných čísel pomocí dedekindovských řezů, tedy jako souvislé, archimedovsky uspořádané těleso. Je možno říci, že v Dedekindově geometrické definici reálných čísel došly svého naplnění myšlenky starořeckých matematiků o kontinuu — ovšem tak, že se připustily libovolné řezy a tím i mnohem více nekonečných množin racionálních čísel, to jest za cenu přijetí aktuálního nekonečna, kterého se staří Řekové báli. Exhaustivní metoda a metoda Archimedova, kterou sám Archimedes použil kromě jiného k přibližnému výpočtu čísla π, byly znovu

---

*) 3. část překladu článku E. BRIESKORNA *Über die Dialektik in der Mathematik* uveřejněného ve sborníku *Mathematiker über die Mathematik*, pp. 221—286, editor M. OTTE. Vydalo nakladatelství Springer v řadě Wissenschaft und Öffentlichkeit.

První dvě části překladu byly otištěny v číslech 1/79 a 2/79. Přeložil Oldřich Kowalski.

oživeny renesancí a staly se jedním z nejdůležitějších zdrojů, ze kterých se vyvinula analýza. Tím byl podruhé ‚z napětí mezi konečnem a nekonečnem učiněn plodný nástroj poznání skutečnosti'. Derivování funkce je její analýzou v ‚nekonečně malém', integrace je opačný krok směrem k syntéze, kdy z chování v ‚nekonečně malém' činíme závěry o konečnu. V aplikacích tomu odpovídá formulace přírodních zákonů pomocí diferenciálních rovnic a předpověď chování takto popsaných systémů na základě integrace těchto rovnic. Ale ‚nekonečně malé' se ukazuje nejen jako plodné, nýbrž také jako ‚naléhavě si žádající vysvětlení'. Vedlo k paradoxům a příležitostně také k rozporům. Snaha o jejich překonání vedla k nahrazení ‚nekonečně malého' pojmem limity, tj. přesněji pojmem číselné posloupnosti nebo proměnné, která se v limitě blíží k 0, a to pak vedlo v pracích CAUCHYHO, BOLZANA a WEIERSTRASSE k položení přesných základů analýzy. Že však převedením na limitní procesy a tím na potenciální nekonečno nikterak nezmizelo napětí mezi konečnem a nekonečnem, mělo se brzy ukázat. Neboť analýza spočívala na podnoži nauky o reálných číslech a vybudování této nauky Weierstraßem, Dedekindem a CANTOREM, i když šlo o různé způsoby, pokaždé v sobě zahrnovalo přijetí aktuálního nekonečna. Cantorova teorie obsahovala zárodek tak smělého proniknutí do nekonečna, že to vedlo k největší krizi v dějinách matematiky a k fantastickému skoku v jejím vývoji.

Cantorova definice reálných čísel pomocí fundamentálních posloupností racionálních čísel je obsažena v jedné jeho práci o jednoznačnosti vyjádření funkcí Fourierovými řadami ([7], str. 92–101). V této práci uveřejnil Cantor také své první příspěvky k teorii bodových množin na přímce, jejichž zkoumání se stávalo během rozvoje analýzy stále nezbytnějším. Spolu se ZERMELEM můžeme právě v této práci spatřovat zárodek Cantorových pozdějších velkých tvůrčích činů: vytvoření teorie množin spolu s teorií kardinálních a ordinálních čísel stejně jako důležité příspěvky k rozvoji topologie a teorie míry. Cantorovo dílo mělo tedy svůj počátek v analýze, mělo svůj dvojjediný počátek v algebře a geometrii, v problémech, ve kterých se již v antické matematice projevovalo napětí mezi konečnem a nekonečnem.

Cantorova práce uvedla tento rozpor do vztahu s rozporem mezi kvantitou a kvalitou a tím jej učinila plodným. Cantor si byl významu své práce v této souvislosti vědom a vytušil její upotřebitelnost v rozsáhlých oblastech matematiky. Svůj hlavní zájem však soustředil rostoucí měrou na vztah mezi idejemi kvantity a nekonečna. Snažil se o objasnění rozličných filozofických představ o nekonečnu a způsobů, jak se nekonečno projevuje v matematice. Ostře rozlišoval mezi poměrně neproblematickým a jaksi všeobecně přijímaným potenciálním nekonečnem a mezi většinou odmítaným aktuálním nekonečnem. Cantor obhajoval oprávněnost aktuálního nekonečna v matematice ve formě existence nekonečných množin. Nadto se postavil proti tvrzení filozofů – že nekonečno nelze nějak blíže vymezit – tím, že definoval kardinální čísla zavedením mohutnosti nekonečných množin a transfinitní ordinální čísla zavedením ordinálního typu dobře uspořádaných nekonečných množin; rozvinul teorii těchto transfinitních čísel, která dodnes zůstala v hlavních rysech v platnosti, a s hypotézou kontinua vyzvedl jeden z nejdůležitějších problémů této teorie, který sice přes veškeré úsilí nebyl schopen sám vyřešit, ale který se později ukázal jako mimořádně plodný.

Cantor si byl dobře vědom, jak je vidět z jeho matematických prací, stejně tak plodnosti ideje nekonečna jako nutnosti tuto ideu blíže vysvětlit, a sám k tomu přispěl tak jako žádný jiný matematik nebo filozof. Vypořádal se s námitkami proti aktuálnímu nekonečnu, které se objevily u filozofů i u matematiků, např. už u LEIBNIZE, GAUSSE, CAUCHYHO a KRONECKERA. Zčásti k tomu byl donucen – neboť jeho myšlenky byly aktivně napadány z mocenských pozic tehdejší vědy.*) Snažil se dokázat, že jeho myšlenky mají své kořeny v dlouhém matematickém vývoji. Tak v případě definice konečného kardinálního čísla ukázal na to, že Eukleides „vztahoval číslo, ve shodě s jeho skutečným původem, k množství a nečinil z něho pouhý znak, který je připisován jednotlivým věcem při subjektivním procesu čítání". Velmi dobré potvrzení Cantorova chápání podstaty čísla můžeme spatřovat v PIAGETOVÝCH experimentálních výzkumech vzniku pojmu čísla u dětí [23], obzvláště také ze splynutí pojmů ordinálního a kardinálního čísla u konečných množin. Cantor poukázal též na to, že podobné myšlenky lze v náznaku najít již v Bolzanově spisu *Paradoxien des Unendlichen* z roku 1851.

Cantor se ostatně střetl nejen s představami matematiků o nekonečnu, nýbrž např. také s náhledy církevních otců a scholastiky a také s názory soudobé filozofie od hegeliánů až po empiristy a pozitivisty. Tak například ve spise *Grundlagen der allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* ([7], 165–209), ve kterém poprvé v hlavních rysech vyložil svou koncepci teorie množin, se střetl s tímtéž DÜHRINGEM, se kterým vybojoval svůj zápas i ENGELS v *Anti-Dühringu*. – Není možné přehlížet význam tohoto Cantorova úsilí o vřazení jeho myšlenek do celkové souvislosti vývoje lidského myšlení pro vznik a prosazení se teorie množin. A je proto falšováním historické pravdy, když BOURBAKI ve svém vylíčení vzniku teorie množin v [6] sice naznačuje tuto souvislost, nezmiňuje se však ani slovem o hlubokém a fundovaném Cantorově výkladu filozofických problémů nekonečna a o problému vztahu jeho teorie ke skutečnosti. Je tam vyjadřován zase týž postoj, který zdůrazňuje nezájem matematiků o filozofii, který ignoruje RIEMANNA, když prohlašuje, že otázka podstaty skutečného prostoru ‚zřejmě' nemá nic společného s matematikou a který znevažuje zcela obecné otázky vztahu matematiky k čemukoliv mimo matematiku jako vágní problémy psychologie nebo metafyziky. Sotva se můžeme nepodivit, že někdo chce celou matematiku pojmout jako hierarchii množinově teoretických struktur, ale původ a význam nejen struktur, nýbrž dokonce i samotného pojmu množiny chce úplně ignorovat.

Cantorovy myšlenky o aktuálním nekonečnu byly v rozporu s názorem většiny jeho matematických předchůdců i současníků. Odkud bral Cantor právo a odvahu s takovou důsledností obhajovat aktuální nekonečno v matematice? K tomu se sám vyjádřil jasně a jednoznačně v 8. odstavci již citované práce. Pokud jde o ‚skutečnost nebo existenci' matematických objektů, Cantor rozlišuje kvůli jasnosti mezi dvěma významy ‚reality': mezi ‚imanentní realitou' na jedné straně a ‚transientní realitou' na straně druhé. První z obou se vztahuje k existenci matematických objektů jako rozumových pojmů, které jsou postaveny

*) Viz též Pokroky MFA *20* (1975), str. 5–14. (Pozn. překl.)

do celkové souvislosti lidského myšlení. Druhý význam reality souvisí s tím, že matematickým objektům může být do té míry ‚přičtena skutečnost‘, pokud je můžeme pokládat za vyjádření nebo vyobrazení dějů a vztahů vnějšího světa, který je konfrontován s naším intelektem. Cantor nemá žádné pochybnosti o tom, ‚že oba druhy reality se neustále spolu shledávají v tom smyslu, že pojem mající imanentní realitu si také vždy mnoha způsoby uchovává transientní realitu, která se ovšem většinou stane zřejmou teprve mnohem později, na základě vývoje empirických věd. „Tento vztah mezi oběma realitami má svůj skutečný základ v jednotě vesmíru, ke kterému my sami náležíme.“ Právě tato jednota je podle Cantora podmínkou, která umožňuje matematice „při vytváření jejího myšlenkového materiálu brát ohled výhradně na imanentní realitu jejích pojmů“. Podmínky vřazování nových pojmů do historicky dané souvislosti a podmínky konzistence jsou takové, „že ponechávají libovůli nanejvýš nepatrný prostor; pak ale také každý matematický pojem v sobě nese potřebný korektiv; je-li neplodný a neúčelný, ukáže se to velmi brzy v jeho neupotřebitelnosti, a jako neúspěšný pak zapadne. Naproti tomu každé zbytečné oklešťování výhonků bádání sebou nese mnohem větší nebezpečí, a to o to větší, že pro ně nemůže být nalezeno žádné odůvodnění v podstatě vědy; neboť podstata matematiky je právě v její svobodě.“ Zdálo se nám důležité Cantora obšírně citovat, protože vytržením jeho slov o svobodě matematiky ze souvislosti by byl znetvořen jejich smysl. Zdá se nám, že to, jak chápal podstatu matematiky tvůrce teorie množin, má mnohem blíže k našemu pojetí než koncepce mnohých ‚moderních‘ protagonistů ‚matematiky jako teorie množin‘ nebo ‚strukturní matematiky‘ s jejich absolutním odtržením od reality.

Cantor nebyl prvním, kdo se zabýval množinami. Množiny nebo třídy vystupovaly již předtím, více či méně zjevně, v pracích mnoha matematiků; především se objevovaly množiny bodů nebo čísel v analýze, během 19. století však stále více také v jiných oblastech matematiky. Již u dětí předškolního věku vzniká – tím, že se setkávají s množinami konkrétních objektů – pojem množiny (přirozeně nepříliš abstraktní) spolu s odpovídajícím pojmem čísla, logickými operacemi a nejjednoduššími operacemi s množinami (srv. [23]). Přitom jde ovšem o konečné množiny. Přechod k nekonečným množinám, které určitě nejsou bezprostředně obsaženy v našich vjemech, není vůbec jednoduchá záležitost. Bylo Cantorovým velkým výkonem, že tento skok vědomě uskutečnil, definoval pojem množiny ve značné obecnosti a systematicky vybudoval teorii množin. – Cantor nepoužíval přímo slova ‚množina‘ (Menge); v jeho díle můžeme najít hojnost jiných formulací. Zde je několik příkladů: množiny nebo třídy jsou charakterizovány jako výsledek procesu abstrakce, také jako ‚intelektuální zpodobnění v našem duchovnu‘, jako systémy nebo jako souhrny. Množina je viděna jako jednota mnohosti svých elementů: „Každý souhrn dobře rozlišitelných věcí může být považován za jedinou věc pro sebe, ve které původní věci jsou součástmi nebo ustavujícími prvky.“ Nakonec se objevuje známá definice na začátku práce *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*: „Množinou rozumíme každé shrnutí M určitých dobře rozlišitelných objektů m našeho nazírání nebo našeho myšlení (které nazýváme ‚elementy‘ množiny M) v jeden celek.“

V Cantorově zdůraznění ‚jednoty mnohosti‘, tohoto dialektického spojení pojmů, můžeme spatřovat výraz základní dialektiky stejnosti a rozdílnosti. — Rozeznat stejnost v rozdílném je prvním předpokladem myšlení (srv. [13] str. 132). Pro takovéto chápání hovoří také to, že matematikové mnohem raději navzájem ‚ztotožňují' různé objekty, než aby hovořili o ‚třídě těchto objektů'. V každém případě je jasné, že všechny Cantorovy definice poukazují na absolutně základní schopnost našeho myšlení shrnovat v procesu abstrakce různé věci do věci jediné, uvažovat souhrn těchto věcí. A protože je tomu tak, protože jde o vůbec nejzákladnější proces našeho myšlení, proto se mohla teorie množin stát základem veškeré matematiky, a v pozdějším vývoji se nejen ukázala být základem, nýbrž navíc teprve ona vyvolala plný rozvoj schopnosti matematiky provádět na každém stupni abstrakci, také na stupni primárního zobrazování reálných vztahů pomocí modelů — další důkaz faktu, že správná abstrakce se nevzdaluje od reality, nýbrž ji správněji, hlouběji a úplněji reprodukuje. Také jeden důkaz HEGELOVY věty: „To, co je první ve vědě, muselo se ukázat i historicky jako první." Na tuto pravdu se spoléhal také Cantor během všech útoků svých protivníků.

K podstatě matematiky náleží nejen abstrakce, nýbrž obzvláště také přesnost. Ale také přesnost je relativní pojem. Cantorova definice množiny byla dostatečně přesná k tomu, aby mu umožnila rozpracovat teorii množin v základních rysech, ale nebyla natolik přesná, aby mohla poskytnout jednoznačně určený základ pro tvoření množin a pro množinově teoretické dedukce. Objevily se rozporné pojmové konstrukce jako ‚množina všech množin', na které už narazil sám Cantor, a jiné antinomie. Zmínili jsme se již o sporu o základy, který odtud vznikl. Pokusy o stanovení bezpečné výchozí základny pro množinově teoretické konstrukce vedly k vytvoření axiomatických systémů v teorii množin ZERMELEM, FRÄNKELEM, GÖDELEM, BERNAYSEM, VON NEUMANNEM a dalšími, jejichž vyšetřování přineslo důležité pohledy na povahu problému základů. Gödelovy věty o neúplnosti ukázaly, že při úplné formalizaci takovýchto systémů axiómů vždy existují v těchto systémech výroky, které jsou prostředky systému nerozhodnutelné, a že bezespornost takového systému nemůže být dokázána prostředky systému samotného, tedy nanejvýš ještě prostředky, které se vymykají z jeho rámce. Již toto znamená, že žádný jednotlivý systém axiómů v teorii množin nemůže být ztotožňován s celou touto teorií a také, že eventuální důkaz bezespornosti nějakého systému axiómů nemůže nikdy dokázat bezespornost celé matematiky. Velmi důležité byly dále výsledky GÖDELA, COHENA a VOPĚNKY týkající se hypotézy kontinua, kterou HILBERT formuloval ve své pařížské přednášce jako svůj první problém. Hypotéza kontinua říká, že mohutnost kontinua, tj. mohutnost množiny všech reálných čísel, je rovna prvnímu nespočetnému nekonečnému kardinálnímu číslu. Jinak vyjádřeno: hypotéza kontinua tvrdí, že každá podmnožina množiny reálných čísel je buď spočetná, nebo má právě tolik elementů jako množina všech reálných čísel, tj. má stejnou mohutnost jako tato množina.*). Zmíněné výsledky například udávají úplnou nezávislost hypotézy kontinua na množinově teoretických axiómech Zermela a Fränkela. To znamená, že jestliže ze systému axiómů (ZF) nelze odvodit žádný spor, potom nelze odvodit spor ani ze systému (ZF) spolu s hypotézou kontinua nebo

*) Viz Pokroky MFA *16* (1971), str. 117—129. (Pozn. překl.)

ze systému (ZF) spojeného s negací hypotézy kontinua. Poněkud zjednodušeně vyjádřeno: ani hypotéza kontinua ani její opak se nedají dokázat ze systému axiomů (ZF). Problémy podobného typu existují také pro tak zvané silné axiómy nekonečnosti, které postulují existenci nedosažitelného kardinálního čísla.

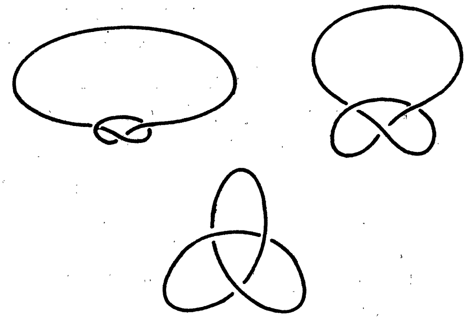
Co znamenají tyto výsledky? Odpověď není jasná; diskuse mezi množinovými teoretiky o budoucím vývoji ukazuje jen, že situace je zcela otevřená. Když se však podíváme, s jakou obezřetností diskutuje tyto otázky například Cohen na konci své práce [8], jak se táže, zda snad v průběhu dalšího vývoje vzhledem k tomu, co intuitivně rozumíme množinami, nezačneme považovat hypotézu kontinua nebo větu k ní opačnou za pravdivou, nebo jak v [9] uvažuje, zdali by se v různých oblastech matematického myšlení nemohly ukázat adekvátními podstatně různé axiomatické systémy teorie množin, potom se stane určitě jasným: jestliže někdo tvrdí, že by pomocí určitého systému axiómů teorie množin, o jehož původu nedá žádné vysvětlení, mohl poskytnout jednou provždy zcela přesný základ pro matematiku, bezesporný a zbavený všech neurčitostí, pak to prostě není pravda. Proti takovému pojetí teorie množin je ještě tisíckrát lepší citovat starou klasickou Cantorovu definici, jak také činí mnoho matematiků. Také matematika v neurčitosti svých nejzákladnějších pojmů sdílí s veškerým vědeckým myšlením ‚nutnou nedokonalost počátku' (Hegel [19], str. 224). To, jakým způsobem by základní pojmy měly být precizovány – i když zase ne dokonale – musí ukázat další matematický vývoj a tím konec konců praxe. Je dobré, že sám matematický vývoj vedl k uvědomění si nedokonalosti počátku také samotné matematiky, neboť právě zde se ukazuje její souvislost s veškerým lidským myšlením a jednáním, která je tak často popírána nebo ignorována těmi, kteří se chtějí omezit na údajně dokonalou přesnost do sebe uzavřené matematiky.

Principiální možnost popsání všech matematických struktur pomocí jediného základního pojmu ‚množina' a jediné základní relace ‚*m* je prvkem *M*' umožnila nejen jednorázové sjednocení matematiky, nýbrž také rozvoj natolik složité mnohotvárnosti navzájem souvisejících struktur, problémů a teorií, že ve skutečnosti není v našich silách ji zevrubně popsat pomocí zmíněné jednotné symboliky, ani pomocí jiné symboliky s ní co do jednoduchosti srovnatelné. Je proto nasnadě, že Atiyah v [2] tvrdí: „Vývoj matematiky lze nejlépe pochopit jako přirozenou reakci na rostoucí obtížnost a složitost problémů, se kterými se musí matematika zabývat. Pokud tyto problémy, přímo nebo nepřímo, mají svůj původ v přírodních nebo jiných vědách, je tato složitost odrazem stále rostoucí komplikovanosti a rozrůzněnosti moderní vědy", přičemž sám Atiyah se na své tvrzení dívá jen jako na možnou vůdčí myšlenku. Ve skutečnosti si nematematik může jen těžko udělat představu o složitosti problémů, se kterými se potýká dnešní matematika. Jednou stránkou toho je tendence používat k řešení problémů stále ‚větší' objekty, stále složitější ‚konstrukce', nad jejichž nekonečností by matematikové dřívějších dob nejspíše pociťovali hrůzu – možná také odpor. Na druhé straně každý matematik ví, že ve všech oblastech matematiky se operuje s podmínkami konečnosti všech možných druhů, od kompaktnosti až po koherenci. Právě velmi hluboké věty často staví takové podmínky do vzájemného vztahu, jako například Grauertova věta, že obraz koherentního svazku vzhledem k nějakému zobrazení je koherentní, jestliže vzory kompaktních množin v daném zobrazení jsou opět kompaktní množiny. Takové věty také objasňují, že i v případě, kdy nás zajímá situace v určitém smyslu konečná, často musíme uvažovat i odpovídající situaci nekonečnou. Často vyplývá ze zavedení (nebo naopak z nezavedení) podmínek konečnosti rozvoj speciálních teorií s protikladnými charakteristickými rysy, jako je tomu například u teorie funkcí na kompaktních a nekompaktních Riemannových plochách. Všechna tato mnohotvárnost a jednota by byla nemožná bez Cantorova důsledného zavedení aktuálního nekonečna v matematice.

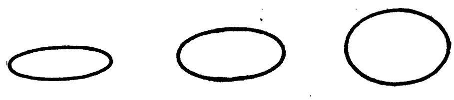
Kvalita a kvantita

Jiným a mimořádně důležitým aspektem protikladu mezi složitostí a jednoduchostí je, jak zdůrazňuje Atiyah, stále větší používání kvalitativních úvah pro zjednodušení složitých problémů. Dialektika protikladů kvality a kvantity je jednou z nejdůležitějších hybných sil vývoje matematiky a zasloužila by si vlastně obsáhlejší pojednání. Z důvodů místa se musíme omezit jen na několik poznámek.

Ještě dříve, než se u malých dětí utvoří první pojmy množin a čísel, jsou již schopny vnímat kvality, jako jsou například geometrické tvary ([23]). Rovněž ve vývoji lidstva nepochybně existovaly – přinejmenším současně s prvními kvantitativními představami – také kvalitativní představy o elementárních geometrických vlastnostech těles, které se zachovávají při spojitých změnách tvaru a které měly veskrze praktický význam, jako například vázání uzlů nebo splétání copů. Jestliže uvažujeme objekty zobrazené níže, vidíme bezprostředně (to znamená na základě prostorové zkušenosti získané v průběhu života), že všechny mají něco společného, že všechny jsou jaksi stejným způsobem do sebe zapleteny nebo zauzleny v prostoru.

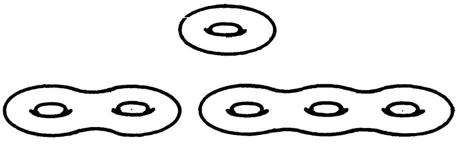


Když však chceme tuto zcela názornou vlastnost pojmout matematicky, pak je k tomu kupodivu zapotřebí mnohem a mnohem většího stupně schopnosti abstrakce, než když třeba chceme vlastnost společnou níže uvedeným třem elipsám



vyjádřit pomocí společného geometrického způsobu vytváření, jak se již stalo v antice, nebo pomocí společného tvaru jim příslušné rovnice $ax^2 + by^2 = 1$, kde různé elipsy jsou určeny různými hodnotami čísel a a b. Pochopitelně, že již v antice byly diskutovány problémy spojitých změn a rozbor geometrických obrazců obsahoval v sobě vždy také kvalitativní prvky, ale protože bylo možno takové obrazce studovat jednoduchým kvantitativním způsobem, nevstoupily ony kvalitativní prvky tak výrazně do povědomí. Nicméně napětí mezi kvalitou a kvantitou bylo vždy přítomno v kontinuu reálných čísel a v rozporu mezi algebrou a geometrií. Jakmile z obou disciplín vznikla analýza, vzniká současně i analysis situs. Až do doby Gaussovy byly ovšem v tomto posledním směru učiněny jen nepatrné pokroky, ačkoliv v úvahách o bodových množinách na přímce a ve snahách definovat pojem spojitosti můžeme spatřovat předehru pozdějšího vybudování množinově teoretické topologie Cantorem. Jiné vývojové změny v geometrii a analýze se přidaly v první polovině 19. století a kolem poloviny století začal v souvislosti s Riemannem fantastický rozvoj topologie, který trvá až do dneška a nejhlubším způsobem ovlivnil všechny oblasti matematiky. Není zde možné tento rozvoj načrtnout a odkazujeme proto na krátký nástin v [6] a na četné učebnice a stati pojednávající o idejích a vývoji topologie. – Přirozeně zde nechceme tvrdit, že by topologie byla jedinou disciplínou, ve které se matematika zmocňuje kvalitativních prvků. Chtěli bychom jen na dvou příkladech ukázat, jak v topologii a geometrii a v jejich vzájemné souhře s jinými disciplínami se dialektika kvality a kvantity stává přímo zřejmou.

Již dlouho je známa myšlenka, že vztah mezi kvalitou a kvantitou je dán mírou. Míra nějaké kvality přiřazuje každému objektu, který tuto kvalitu může mít, určitou veličinu, která je zhruba řečeno mírou toho, v jakém stupni dotyčná kvalita přísluší danému objektu. Lépe řečeno: když jsou dány dva objekty, potom příslušná veličina měří, jak dalece se oba objekty odlišují vzhledem k uvažované kvalitě. Nejčastěji si přitom představujeme, že tato veličina, kterou měříme kvalitu, je nějaké číslo, obvykle reálné číslo. Z matematického hlediska ovšem nevidíme důvod, proč by to mělo být právě reálné číslo. Mohlo by to být například také celé číslo, což by bylo mnohem jednodušší, nebo také např. jiný matematický objekt převážně kvantitativního charakteru, např. grupa nebo element nějaké grupy atd. Zde je jeden příklad, který byl také historicky prvním významným příkladem. Uvažujme dvojrozměrné plochy, které jsou např. popsány níže uvedenými obrazci:



Vidíme ihned, že tyto plochy jsou jaksi kvalitativně různé. Jakou kvalitou bychom mohli nejlépe zachytit jejich různost, není zřejmé. Jedna možnost je chápat je jako topologické prostory. Potom je takovou kvalitou topologický typ. (Dva prostory X a Y mají týž topologický typ, jestliže body prostoru X můžeme vzájemně jednoznačně a vzájemně spojitě přiřadit bodům prostoru Y).

Jak to nyní vypadá s mírou kvality? Obrázky napovídají, že bychom za ni snad mohli považovat počet p „děr“. To je skutečně v pořádku; toto číslo p, ‚rod‘ plochy, lze vhodným způsobem definovat a ukázat, že je tak dobrou mírou kvality, jak si je jen možno přát: dvě plochy jsou právě tehdy homeomorfní, když mají týž rod. Tento příklad je typický pro celou jednu disciplínu, algebraickou topologii, jejíž smysl je právě v tom, aby transformovala kvalitativní problémy na kvantitativní. Přitom pro každou jednotlivou geometrickou situaci a pro každý typ problému musí být vhodně sestrojena míra, která kvalitativním údajům přiřazuje kvantitativní údaje, ‚invarianty‘; vyhledání takových invariantů je často velkým výkonem. Se svou zásobou všech takových konstrukcí je algebraická topologie vynikajícím nástrojem pro transformaci problémů.

Máme např. vyřešit analytický nebo geometrický nebo také algebraický problém, který se dá po prvním důležitém kroku převést na čistě kvalitativní topologický problém. Algebraická topologie pak redukuje náš problém dále na čistě kvantitativní problém, například na problém teorie čísel. Jestliže ten umíme vyřešit, je tím vyřešen i původní problém. Může se však také stát, že celý proces začne nanovo. Pěkný popis této role algebraické topologie dává např. Atiyah v [1].

Dialektikové velmi zdůrazňovali, že změnu kvalit si nemáme představovat jako postupný přechod, nýbrž jako skok, a poukázali na změnu skokem u takových kvalit, jako je například skupenství při překročení jistých kritických hodnot odpovídajících veličin, jako jsou například tlak a teplota. Matematické pojetí této myšlenky můžeme vidět v THOMOVĚ teorii katastrof [33]*). Je zcela nemožné vysvětlit zde jednotlivé Thomovy matematické ideje a omezíme se na některé zcela krátké citáty v naději, že čtenáři dáme alespoň určitý náhled: „Pro parametrizaci lokálních stavů systému navrhujeme tento obecný model: na diferencovatelné varietě M leží uzavřená podmnožina K, kterou nazýváme ‚katastrofickou množinou'. Pokud bod $m \in M$ reprezentující daný systém neinciduje s množinou K, nemění se fenomenologický typ systému. Podstatnou myšlenkou, o kterou nám zde jde, je to, že lokální povaha podmnožiny K, topologický typ jejich singularit atd., je ve skutečnosti určen vnitřní dynamikou, kterou obecně nelze explicitně popsat. Evoluce systému je určena pomocí vektorového pole X na M a tím je definována makroskopická dynamika. Když bod m inciduje s uzavřenou množinou K, objeví se nespojitá změna v jevovém prostoru systému a to interpretujeme tvrzením, že původní forma se přeměnila, tedy došlo k morfogenezi. Vzhledem k dříve zmíněným omezujícím předpokladům o lokální povaze singularit množiny K máme možnost singularity vystupující v morfogenezi systému do jisté míry klasifikovat a předvídat... Podáme velmi obecnou klasifikaci těchto změn forem, které budeme nazývat ‚katastrofami'... Náš model je vhodný jen pro klasifikaci lokálních morfogenetických procesů, které chceme nazývat ‚elementárními katastrofami'. Ale globální, makroskopický obraz jevů, forma v obvyklém smyslu toho slova, vznikne teprve tím, že se sejde velký počet takových lokálních dějů a statistika těchto lokálních katastrof, korelace, které určují jejich objevení se v průběhu daného (globálního) procesu, jsou určeny topologickou strukturou této vnitřní dynamiky... Bohatostí topologické struktury této vnitřní dynamiky... je konečně vysvětlena téměř nekonečná mnohotvárnost jevů vnějšího světa a snad také základní rozdíl mezi živým a neživým."

*) Viz též Pokroky MFA *22* (1977), str. 246 až 262 a 302—316. (Pozn. překl.)

Myslíme si, že není lepšího příkladu pro to, jak může být pojata do matematiky Hegelova myšlenka, „že proměny bytí vůbec nejsou jen přechodem jedné veličiny v druhou veličinu, nýbrž je to přechod kvalitativního v kvantitativní a obráceně, změna, která je přerušením postupného a dává kvalitativně něco jiného, než bylo předchozí jsoucno."

Tím přicházíme k závěru našeho pokusu pojmout matematiku jako dialektický pohyb. Důsledky, které lze z tohoto pojetí matematiky odvodit, nemohou být zde rozebírány. Chceme-li předložit konkrétní požadavky na změny v provozování vědy, musíme vzít v úvahu konkrétní podmínky praxe. Práce, jako je tato, může mít za účel pouze poskytnout příspěvek k nutnému přemítání o naší vědě, bez kterého žádné volání po změně nemůže být správně zdůvodněno.

Literatura

[1] ATIYAH, M. F.: *The role of Algebraic Topology in Mathematics.* J. London Math. Soc. *41* (1966), 63—69.

[2] ATIYAH, M. F.: *Wandel und Fortschritt in der Mathematik.* Bild der Wissenschaft 1969, 315—323. Deutsche Verlagsanstalt, Stuttgart.

[3] BENACERRAF, P., PUTNAM, H.: *Philosophy of Mathematics.* Selected Readings, Prentice Hall Englewood Cliffs, N. 5 1964 N. Y.

[4] BISHOP, E. A.: *Schizophrenia in contemporary mathematics.* Vervielfältigtes Manuskript. Distributed in conjunction with the Colloquium. Lectures given at the seventy-eight summer meeting of the American Mathematical Society. AMS, 1973.

[5] BOURBAKI, N.: *Die Architektur der Mathematik* in: Physik. Blätter, Jg. 17, 1961, S. 161—166 und S. 212—218.

[6] BOURBAKI, N.: *Elemente der Mathematikgeschichte.* Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1971. Arch. d. Math. u. Phys. 1, 44—63 und 213—237.

[7] CANTOR, G.: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts.* Herausgegeben von E. ZERMELO, Springer, Berlin 1932.

[8] COHEN, P. J.: *Set Theory and the Continuum Hypothesis.* Benjamin, N. Y. 1966.

[9] COHEN, P. J., HERSCH, R.: *Non-Cantorian Set Theory,* in: „Mathematics in the Modern World", Readings from Scientific American. Freeman and Co., San Francisco 1968.

[10] COURANT, R., ROBBINS, H.: *Was ist Mathematik?* Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1962.

[11] EINSTEIN, A.: *Grundzüge der Relativitätstheorie.* Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1956.

[12] GAUSS, C. F.: Vorrede zu: G. EISENSTEIN, *Mathematische Abhandlungen,* Georg Olms Verlagbuchhandlung, Hildesheim, Reprografischer Nachdruck der Ausgabe Berlin 1847.

[13] HAVEMANN, R.: *Dialektik ohne Dogma?* Rowohlt Taschenbuch Verlag, Reinbek bei Hamburg 1964.

[14] HALMOS, P. R.: *Nicolas Bourbaki.* In: „Mathematics in the Modern World", Readings from Scientific American, Freeman and Co., San Francisco 1968.

[15] HALMOS, P. R.: *Innovation in Mathematics,* a. a. O.

[16] HEGEL, G. W. F.: *Wissenschaft der Logik.* Band III—V der ersten deutschen Ausgabe der Werke Hegels.

[17] HILBERT, D.: *Mathematische Probleme.* Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900.

[18] LABÉRENNE, P.: *Mathematik und Technik,* in: Die Wissenschaft im Lichte des Marxismus. Rotdruck 1970.

[19] LENIN, W. I.: *Philosophische Hefte.* Dietz Verlag Berlin 1971.

[20] MORITZ, R. E.: *On Mathematics.* A Collection of Witty, Profound, Amusing Passages about Mathematics and Mathematicians. Dover Publ. Inc. N. Y. 1958.

[21] MOS: *AMS (MOS) Subject Classification Index.* American Math. Soc. Providence, Rh. I. 1970.

[22] OTTE, M., FRANKE, B., BOOSS, B.: *Gesetzmäßigkeit in der Entwicklung mathematischer Tätigkeit.* Diskusionbeitrag zum internationalen Hegel-Kongreß, Antwerpen 1972.

[23] PIAGET, SZEMINSKA: *Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde.* 2. Aufl. Klett, Stuttgart 1972.

[24] PLANUNGSKOMMISSION NATURWISSENSCHAFTEN DER UNIV. OLDENBURG: *Zur Berufpraxisanalyse des Mathematikers.* 1972, Drucksache 472—73.

[25] QUENEAU, R.: *Die Dialektik der Mathematik bei Engels,* in: Mathematik von Morgen, Nymphenburger Verlagsbuchhandlung 1967.

[26] QUENEAU, R.: *Bourbaki und die Mathematik von Morgen.* A. a. O.

[27] RIEMANN, B.: *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlaß.*

Herausgegeben unter Mitwirkung von R. DEDEKIND und H. WEBER, 2. Aufl. 1892.

[28] ROCHHAUSEN, R., GRAU, G.: *Lenin und die Naturwissenschaften II.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1967.

[29] SCHULZ, G., HEITSCH, W.: *Philosophische Probleme der Mathematik*, in: Naturforschung und Weltbild. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1967.

[30] STEGMÜLLER, W.: *Metaphysik, Skepsis, Wissenschaft.* 2. Auflage, Springer Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1969.

[31] STRUIK, D. J.: *Abriss der Geschichte der Mathematik.* 3. Auflage. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1965.

[32] THOM, R.: *Modern Mathematics: An educational and philosophic error?* American Scientist 59 (1971).

[33] THOM, R.: *Stabilité structurelle et morphogénèse.* Benjamin, Reading, Mass. 1972.

[34] WEIL, A.: *The Future of Mathematics.* The Amer. Math. Monthly *57* (1950). 295—306.

[35] WEYL, H.: *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft.* 3. Auflage. Oldenbourg, München, Wien 1966.

[36] WEYL, H.: *David Hilbert and his Mathematical Work.* Bull. AMS *50* (1944), 612—654.

]37] WISSENSCHAFTSRAT: *Überlegungen zu einem mathematischen Grundstudium.* In: Empfehlungen zur Struktur und zum Ausbau des Bildungswesens im Hochschulbereich nach 1970, Band 2, Anlagen, Bundesdruckerei, Bonn 1970.

jubilea & zprávy

K NEDOŽITÝM 80. NAROZENINÁM AKADEMIKA FRANTIŠKA BĚHOUNKA

V minulém roce jsme vzpomínali 80 let od narození a 5 let od úmrtí jednoho z předních představitelů naší vědy, fyzika a radiologa, akademika Františka Běhounka. Jaký vlastně byl žák slavné Marie Curieové-Sklodowské? Jednou na otázku, jaké povolání by si vybral, jestliže by mohl znovu volit, odpověděl: „Kdyby mi někdo řekl — mávnu kouzelným proutkem a podle vlastní volby můžeš být oním šťastným člověkem v zahrádce, nebo budeš sedět za svým stolem v laboratoři a bádat — tak bych opět zvolil vědu.“

Jeho životní dráha byla stejně zajímavá jako poučná. Narodil se v Praze 27. října r. 1898 — téměř na přelomu století — jako jedno ze čtyř dětí truhlářského dělníka.

Své základní i středoškolské vzdělání získal v Praze, kde také absolvoval na tehdejší filozofické fakultě UK v roce 1920 studium matematiky a fyziky. Náš význačný fyzik, profesor B. Kučera, který stál u počátků vědecké dráhy i laureáta Nobelovy ceny Jaroslava Heyrovského, si všiml nadání a živého zájmu Běhounkova