Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Petr Simon

Čechův-Stoneův β-obal

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 25 (1980), No. 6, 301--306

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/138188`

Čechův-Stoneův β-obal*)

Petr Simon, Praha

Vážené shromáždění,

v roce 1937 vyšel v Annals of Mathematics jeden z těch vzácných článků, které jsou víc než pouhým oznámením nových výsledků, článek, který měl zásadní význam pro další rozvoj matematiky, který hluboce zasáhl do celé řady disciplín a který otevřel k dalšímu výzkumu rozsáhlou novou oblast. Jmenoval se *On bicompact spaces* a jeho autorem byl EDUARD ČECH [5].

Nejprve se pokusím ve své přednášce stručně shrnout hlavní výsledky této práce. Kolegové topologové mezi vámi poznají v uvedených faktech látku základního kursu, ano, je tomu tak. Výsledky E. Čecha se za třiačtyřicet let od svého publikování staly klasikou a neodmyslitelnou součástí vzdělání každého matematika. Dále chci uvést některé další charakterizace β-obalu a nakonec několik současných výsledků z této problematiky.

Začněme od základních pojmů a trochy historie. *Úplně regulární* topologický prostor X je takový topologický prostor, kde je spojitých funkcí dostatečně mnoho k tomu, aby popsaly jeho topologii, přesněji, ke každému bodu $x \in X$ a ke každému jeho okolí U existuje spojitá reálná funkce f taková, že $f(x) = 0$ a $f(y) = 1$ pro každé $y \in X - U$. Roku 1929 dokázal A. N. TICHONOV [16], že prostor X je úplně regulární Hausdorffův tehdy a jen tehdy, dá-li se X vnořit do kvádru I^A pro nějakou vhodnou množinu A (zde I značí uzavřený interval $[0, 1]$ s obvyklou topologií, I^A je množina všech funkcí z A do I s topologií bodové konvergence). Protože prostor I^A je kompaktní Hausdorffův, je $\overline{X}$ (uzávěr v prostoru I^A) kompaktní Hausdorffův prostor obsahující X jako hustou část; tedy prostor X je úplně regulární tehdy a jen tehdy, lze-li ho hustě vnořit do kompaktního Hausdorffova prostoru.

Tato fakta byla Čechovi východiskem k následující konstrukci: Označme $\mathscr{C}(X, I)$ množinu všech spojitých zobrazení z úplně regulárního Hausdorffova prostoru X do I. Zobrazení $\varphi\colon X \to I^{\mathscr{C}(X,I)}$ definované předpisem $\varphi(x)_f = f(x)$ pro každé $f \in \mathscr{C}(X, I)$ a $x \in X$, je vnořením prostoru X do $I^{\mathscr{C}(X,I)}$, označme $Y = \overline{\varphi[X]}$. Buď $g\colon \varphi[X] \to I$ libovolná spojitá funkce. Pak zobrazení $f\colon X \to I$ definované předpisem $f = g \circ \varphi$ je samozřejmě prvkem

*) Záznam odborné přednášky konané na MFF UK v rámci vzpomínkové slavnosti k 20. výročí úmrtí E. Čecha dne 17. března 1980.

$\mathscr{C}(X, I)$; pro f-tou projekci $\pi_f\colon I^{\mathscr{C}(X,I)} \to I$ pak nutně platí, že $\pi_f \circ \varphi = f$ dík definici zobrazení φ, přitom φ je homeomorfismus, tedy $\pi_f(y) = g(y)$ pro všechna $y \in \varphi[X]$. Vidíme, že zúžení projekce π_f na množinu Y je spojité zobrazení z Y do I, rozšiřující funkci g.

Ukázali jsme tedy, že *ke každému úplně regulárnímu Hausdorffovu prostoru X existuje prostor $\beta(X)$ tak, že platí*

(1) *$\beta(X)$ je kompaktní Hausdorffův,*

(2) $X \subset \beta(X)$,

(3) *X je hustý v $\beta(X)$,*

(4) *každou spojitou omezenou reálnou funkci definovanou na X lze spojitě rozšířit na $\beta(X)$.*

Nezávisle na Čechovi došel ke stejnému výsledku M. H. Stone [15], proto se prostor $\beta(X)$ dnes nazývá *Čechovou-Stoneovou kompaktifikací* nebo též *Čechovým-Stoneovým β-obalem* prostoru X.

E. Čech ve svém článku dokazuje dále: *Prostor $\beta(X)$ je jediný v tomto smyslu: Je-li $b(X)$ kompatifikace prostoru X* (tj. prostor splňující (1), (2), (3)) *splňující (4), pak existuje homeomorfismus h prostoru $\beta(X)$ na prostor $b(X)$ tak, že $h(x) = x$ pro všechny body $x \in X$.*

To je speciální případ věty: *Je-li $B(X)$ libovolná kompaktifikace prostoru X, pak existuje spojité zobrazení f z $\beta(X)$ na $B(X)$ takové, že $f(x) = x$ pro všechna $x \in X$ a $f[\beta(X) - X] = B(X) - X$.*

Nazvěme dvě podmnožiny A, $B \subset X$ *funkcionálně oddělené*, jestliže existuje spojitá reálná funkce f definovaná na prostoru X tak, že $f(x) = 0$ jakmile $x \in A$, zatímco pro všechna $x \in B$ je $f(x) = 1$.

Je-li X úplně regulární Hausdorffův prostor, pak $\beta(X)$ je charakterizováno též platností podmínek (1), (2), (3) *a*

(4′) *každé dvě funkcionálně oddělené podmnožiny prostoru X mají disjunktní uzávěry v prostoru $\beta(X)$.*

Tedy *pro $T \subset X$ platí, že $\mathrm{cl}_{\beta(X)}T = \beta(T)$ právě když množina T je C^*-vnořená v prostoru X* (tj. každou omezenou spojitou reálnou funkci definovanou na T lze spojitě rozšířit na celý prostor X).

Speciálně, aplikací Tietzeovy věty dostáváme, že *prostor X je normální právě když $\mathrm{cl}_{\beta(X)}T = \beta(T)$ pro každou uzavřenou podmnožinu T prostoru X.*

I studium kardinálních invariantů prostoru $\beta(X)$ započal Eduard Čech. Připomeňme, že charakter $\chi_X(x)$ bodu x v prostoru X se definuje jako nejmenší mohutnost báze systému okolí bodu x. Platí věta: *Buď X úplně regulární Hausdorffův prostor, $x \in X$. Pak $\chi_X(x) = \chi_{\beta(X)}(x)$.*

Mohutnost podmnožin prostoru $\beta(X)$ odhadoval Čech pomocí mohutnosti $\beta(N)$, kde N je spočetný nekonečný diskrétní prostor. Například:

Buď X úplně regulární Hausdorffův, M uzavřená množina typu G_δ v $\beta(X)$, *$M \subset \beta(X) - X$. Pak $\|M\| \geqq \|\beta(N)\|$.*

Bezprostředním důsledkem je, že žádný bod z $\beta(X) - X$ nemůže mít spočetný charakter – množina $\{x\}$ by byla jednoprvková uzavřená množina typu G_δ, a proto platí: *Jsou-li X, Y dva úplně regulární Hausdorffovy prostory splňující I. axióm spočetnosti a je-li $\beta(X)$ homeomorfní s $\beta(Y)$, pak i X* a *Y jsou homeomorfní.*

Prostor X se nazývá *spočetně kompaktní*, dá-li se z každého spočetného otevřeného pokrytí prostoru X vybrat pokrytí konečné. Například množina všech spočetných ordinálních čísel s topologií danou uspořádáním je (nekompaktní) spočetně kompaktní topologický prostor. Čech dokazuje:

Je-li X úplně regulární Hausdorffův prostor, který není spočetně kompaktní, pak $\|\beta(X) - X\| \geqq \|\beta(N)\|$.

Avšak *je-li* $X = \omega_1$ *s pořádkovou topologií, je* $\|\beta(X) - X\| = 1$.

Prostor $\beta(N)$, Čechovu-Stoneovu kompaktifikaci spočetného diskrétního prostoru N, vyšetřoval Čech také a dokázal, že $2^\omega \leqq \|\beta(N)\| \leqq 2^{2^\omega}$. Tuto nerovnost zpřesnil později Pospíšil [13]: $\|\beta(N)\| = 2^{2^\omega}$. Zde však je třeba zmínit se o tom, že v Čechově době základní monografií o kompaktních prostorech byl rozsáhlý článek Alexandrova a Urysohna [1], obsahující mj. řadu příkladů kompaktních prostorů. Alexandrov s Urysohnem však neznali žádný kompaktní prostor, který by neobsahoval spočetnou konvergentní posloupnost – existence takového prostoru byla otevřeným problémem. Čech tento problém řeší: $\beta(N) - N$ *je kompaktní Hausdorffův prostor bez izolovaných bodů, jehož žádný bod není limitou spočetné posloupnosti.*

Nuže uvedená fakta o β-obalu dokázal Eduard Čech v roce 1937. Z těch zcela základních zde chybí pouze Stoneova věta, i když je velice pravděpodobné, že ji Čech znal: *Pro úplně regulární Hausdorffův prostor X* je $\beta(X)$ *charakterizováno splněním* (1), (2), (3) *a*

(4″) *je-li Y libovolný kompaktní Hausdorffův prostor a* $f\colon X \to Y$ *spojité zobrazení, pak f lze spojitě rozšířit na* $\beta(X)$.

Tím se však dostáváme k tomu, jak se vyvíjelo studium $\beta(X)$ v dalších letech. M. H. Stone [15] přistupoval ke kompaktním prostorům od Booleových algeber, proto charakterizoval $\beta(X)$ tak, že popsal, jaké body je třeba k prostoru X přidat. *Nulová množina* v prostoru X je vzor $f^{-1}(0)$ bodu 0 při spojité reálné funkci f definované na X. Pro každý bod $x \in \beta(X)$ označme $\mathscr{Z}(x)$ systém všech nulových množin Z v prostoru X takových, že $x \in \mathrm{cl}_{\beta(X)}Z$. Zvolme $x \in \beta(X) - X$. Pak systém $\mathscr{Z}(x)$ musí podle (4') být centrovaný a maximální. Tedy $\beta(X) - X$ *lze ztotožnit s množinou všech maximálních centrovaných systémů nulových množin v X, které v X nekonvergují.*

Gelfand-Kolmogorov [8] charakterizovali $\beta(X)$ algebraicky. Buď $\mathscr{C}^*(X)$ okruh všech spojitých omezených reálných funkcí definovaných na X. Uvažujme množinu $\mathscr{M}$ všech maximálních vlastních ideálů okruhu $\mathscr{C}^*(X)$. Pak platí, že *maximální ideály v* $\mathscr{C}^*(X)$ *jsou právě všechny množiny tvaru* $\mathscr{I}_x = \{f \in \mathscr{C}^*(X) : {}^\beta f(x) = 0\}$, $x \in \beta(X)$, *a jsou různé pro různé body* $x \in \beta(X)$. (Zde ${}^\beta f$ značí spojité rozšíření funkce f na $\beta(X)$.)

Všechny uvedené popisy $\beta(X)$ (a to jsem se v obou posledních případech nezmínil o topologii!) ukazují, že $\beta(X)$ je zpravidla prostor s velice komplikovanou a obtížně uchopitelnou strukturou. Avšak nesnáze vyzývají. Proto je v současné době publikováno tolik hlubokých výsledků o Čechově-Stoneově kompaktifikaci, že nemohu v čase, který mi zbývá, podat ani informativní přehled. Omezím se proto na kusou informaci o vlastnostech prostoru $\beta(N)$, což tedy je množina všech ultrafiltrů na spočetné diskrétní množině N, a na jeho podprostor $\beta(N) - N$, množinu všech netriviálních ultrafiltrů na N.)*

Prostor $\beta(N) - N$ není homogenní, tj. existuje pár bodů $x, y \in \beta(N) - N$ takových, že žádný autohomeomorfismus $\beta(N) - N$ na $\beta(N) - N$ nezobrazí x na y. Prostor $\beta(N)$ má tutéž vlastnost triviálně; nehomogenitu $\beta(N) - N$ dokázal za předpokladu hypotézy kontinua W. RUDIN [14], bez dodatečných množinových předpokladů Z. FROLÍK [7].

I. I. PAROVIČENKO [12] charakterizoval $\beta(N) - N$ topologicky takto: *Nechť platí $2^\omega = \omega_1$. Předpokládejme, že prostor X má následující vlastnosti: X je kompaktní Hausdorffův 0-dimenzionální bez izolovaných bodů, $w(X) = 2^\omega$, každá neprázdná podmnožina typu G_δ má neprázdný vnitřek a každé dvě disjunktní otevřené podmnožiny typu F_σ lze oddělit obojetnou množinou. Pak X je homeomorfní s $\beta(N) - N$.*

E. K. VAN DOUWEN a J. VAN MILL [6] dokázali, že hypotéza kontinua je v Parovičenkově větě podstatná: *Nechť platí tvrzení Parovičenkovy věty. Pak $2^\omega = \omega_1$.*

Dlouho neřešeným problémem byla existence P-bodů v $\beta(N) - N$. Připomeňme, že bod x v prostoru X je P-bod, jestliže $x \in \operatorname{int} \bigcap_{n=1}^{\omega} U_n$ pro každý spočetný soubor $\{U_n: n = 1, 2, \ldots\}$ okolí bodu x. Platí-li $2^\omega = \omega_1$, existují P-body v $\beta(N) - N$ [14], rovněž tak platí-li Martinův axióm. Teprve nedávno sestrojil S. SHELAH model teorie množin, kde platí, že žádný bod z $\beta(N) - N$ není P-bodem. [11].

Přestože na otázku, zda existují P-body v $\beta(N) - N$ nelze odpovědět, lze dokázat, že body, svým topologickým chováním P-bodům velmi příbuzné, existují „poctivě“: *V prostoru $\beta(N) - N$ existuje bod x takový, že $x \notin \mathrm{cl}_{\beta(N)-N}(S - \{x\})$, kdykoli S je spočetná podmnožina $\beta(N) - N$.* Toto tvrzení dokázal K. Kunen [10].

B. BALCAR a P. VOJTÁŠ dokázali jinou pozoruhodnou vlastnost prostoru $\beta(N) - N$: *Pro každý bod $x \in \beta(N) - N$ existuje soubor $\mathcal{U}$ mohutnosti 2^ω po dvou disjunktních otevřených množin takových, že $x \in \overline{U}$ pro všechna $U \in \mathcal{U}$.* [3].

S faktem, že žádný bod $x \in \beta(N) - N$ není limitou spočetné posloupnosti, kontrastuje tato skutečnost [2]: *Existuje bod $x \in \beta(N) - N$ a diskrétní množina $\{x_\alpha: \alpha < \omega_1\} \subset \beta(N) - N$ taková, že x je jediný úplný hromadný bod této množiny.*

Na závěr své přednášky vám ukáži jedno z mnoha použití β-obalu mimo topologii. Následující větu dokázal N. HINDMAN:

---

*) *Filtr* na dané množině A je soustava $\mathcal{F}$ podmnožin množiny A splňující (a) pro každé $X \in \mathcal{F}$ je $X \neq \emptyset$, (b) je-li $X \in \mathcal{F}$, $Y \subset A$ a $X \subset Y$, pak $Y \in \mathcal{F}$, (c) je-li $X_0, X_1, \ldots, X_k$ libovolná konečná část $\mathcal{F}$, pak $X_0 \cap X_1 \cap \ldots \cap X_k \in \mathcal{F}$. Například soubor $\mathcal{N} = \{X \subset N : N - X$ je konečná množina$\}$ je filtrem. Filtr $\mathcal{F}$ se nazývá *ultrafiltr*, jestliže $\mathcal{F}$ je maximální soubor splňující (a), (b), (c); zřejmě $\mathcal{F}$ je ultrafiltr na množině A, právě když $\mathcal{F}$ je filtr a pro každý konečný rozklad $A_0 \cup A_1 \cup \cup \ldots \cup A_n = A$ existuje $k \leq n$ tak, že $A_k \in \mathcal{F}$, respektive právě když $\mathcal{F}$ je filtr a pro každé $X \subset A$ je buď $X \in \mathcal{F}$, nebo $A - X \in \mathcal{F}$.

Zvolme $x \in A$. Pak $\mathcal{F}_x = \{X \subset A : x \in X\}$ je ultrafiltr a nazývá se *triviální*. Pokud množina A je nekonečná, existují však i ultrafiltry $\mathcal{F}$, pro které platí, že $\cap \mathcal{F} = \emptyset$; takové ultrafiltry se nazývají *netriviální* neboli *volné*.

Nosnou množinu prostoru $\beta(N)$ tvoří všechny ultrafiltry na N; je pak přirozené ztotožňovat body $n \in N$ s triviálními ultrafiltry $\mathcal{F}_n$. Topologii prostoru $\beta(N)$ popíšeme nejsnáze takto: Je-li $q \in \beta(N)$, pak množiny tvaru $0(q, X) = \{p \in \beta(N) : X \in p\}$ $(X \in q)$ tvoří bázi okolí bodu q v $\beta(N)$.

Věta: Buď $n < \omega$, $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Pro každý rozklad $\bigcup_{k=0}^{n} A_k = N$ existuje $k_0 \leqq n$ a nekonečná množina $B \subset A_{k_0}$ tak, že pro každou konečnou část $\{b_0, b_1, \ldots, b_p\} \subset B$ je $b_0 + b_1 + \ldots + b_p \in A_{k_0}$.

Jinými slovy, ať obarvíme přirozená čísla konečným počtem barev jakýmkoli způsobem, najdeme jednu barvu – dejme tomu červenou, a nekonečnou množinu B tak, že všechny konečné součty čísel z B jsou červené.

Dokázat tuto větu pomocí čistě kombinatorických metod je velice obtížné. Autorem důkazu, který nyní uvedu, je S. GLAZER, důkaz byl publikován v [4].

Důkaz. Definujme operaci $\dotplus$ na $\beta(N)$ takto: Pro $A \subset N$, $n \in N$ buď

$$A - n = \{k \in N: k + n \in A\},$$

pro dva ultrafiltry $p, q \in \beta(N)$ buď

$$p \dotplus q = \{A \subset N: \{n \in N: A - n \in p\} \in q\}.$$

Lehce se ověří, že $\dotplus$ je asociativní operace, která rozšiřuje operaci sčítání na N a že pro každé $p \in \beta(N)$ je funkce, která bodu $q \in \beta(N)$ přiřadí bod $p \dotplus q$, spojitá. Tedy $(\beta(N), \dotplus)$ je kompaktní topologická pologrupa se zleva spojitou operací. Musí tedy existovat $q \in \beta(N)$ idempotentní, tj. $q \dotplus q = q$.

(Pro úplnost naznačíme důkaz – využívá se pouze kompaktnost dané pologrupy a jednostranná spojitost její operace. Uvažujme systém $\mathcal{M}$ všech neprázdných kompaktních podpologrup pologrupy $\beta(N)$. Je $\mathcal{M} \neq \emptyset$, neboť $\beta(N) \in \mathcal{M}$. Aplikací Zornova lemmatu najdeme v $\mathcal{M}$ minimální prvek G. Je-li q libovolný prvek G – zvolme nějaký a zafixujme ho, pak $q \dotplus G$ $(= \{q \dotplus p : p \in G\})$ je kompaktní pologrupa dík kompaktnosti G a spojitosti $\dotplus$, přitom $q \dotplus G \subset G$, minimalita G pak dává $q \dotplus G = G$. Existuje tedy $p \in G$ tak, že $q \dotplus p = q$.

Označme $H = \{p \in G: q \dotplus p = q\}$. H je kompaktní pologrupa a víme už, že je neprázdná. Tedy $H = G$, opět z minimality G, tedy $q \in H$ a z definice H dostáváme, že $q \dotplus q = q$.)

Protože pro žádné $n \in N$ neplatí, že $n + n = n$, je $q \in \beta(N) - N$. Ukážeme, že ultrafiltr q má tyto vlastnosti:

(*) Pro každé $A \in q$ existuje nekonečná podmnožina $B \subset A$ tak, že pro každou konečnou část $T \subset B$ je $\sum T \in A$.

Pro $A \in q$ označme $A^* = \{b \in N: A - b \in q\}$. Protože $q \dotplus q = q$, je $A^* \in q$ stejně jako $A - b \in q$ pro všechna $b \in A^*$.

Buď $A_0 \in q$ zvoleno libovolně, zvolme $b_0 \in A_0 \cap A_0^*$. Dále definujeme indukcí $A_{n+1} = (A_n - b_n) \cap A_n$, a volíme $b_{n+1} \in A_{n+1} \cap A_{n+1}^*$ tak, aby platilo $b_{n+1} > b_n$. Zbývá položit $B = \{b_n: n = 0, 1, 2, \ldots\}$. Lehce se ověří, že B je hledaná množina.

Nyní se důkaz Hindmanovy věty redukuje na toto: Buď q idempotentní v $(\beta(N), \dotplus)$, buď $\{A_i : i = 0, 1, \ldots, k\}$ rozklad N. Protože q je ultrafiltr, existuje $A_{k_0} \in q$. Pro toto A_{k_0} musí ovšem platit (*).

Děkuji vám za pozornost.

Literatura

[1] P. S. ALEXANDROV, P. S. URYSOHN: *Mémoire sur les espaces topologiques compact*. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. *A 14* (1929), 1—96.

[2] B. BALCAR, P. SIMON, P. VOJTÁŠ: *Refinement properties and extension of filters in Boolean algebras*. (Vyjde)

[3] B. BALCAR, P. VOJTÁŠ: *Almost disjoint refinement of families of subsets of N*. Proc. Amer. Math. Soc. *79* (1980), 465—470.

[4] W. W. COMFORT: *Some recent applications of ultrafilters to topology*. Gen. Top. and its Rel. to Modern Analysis and Algebra *IV*., Part A, Prague 1976. Lecture Notes in Mathematics 609, Springer 1977. 34—42.

[5] E. ČECH: *On bicompact spaces*. Ann. of Math. *38* (1937), 823—844.

[6] E. K. VAN DOUWEN, J. VAN MILL: *Parovičenko's characterization of $\beta\omega$ — ω implies CH*. (Vyjde)

[7] Z. FROLÍK: *Sums of ultrafilters*. Bull. Amer. Math. Soc. *73* (1967), 87—91.

[8] I. GELFAND, A. KOLMOGOROV: *On rings of continuous functions on topological spaces*. Dokl. Akad. Nauk SSSR, *22* (1939), 11—15.

[9] N. HINDMAN: *Finite sums from sequences within cells of a partition of N*. J. Combinatorial Theory (A), *17* (1974), 1—11.

[10] K. KUNEN: *Weak P-points in N^**. (Vyjde)

[11] C. F. MILLS: *An easier proof of the Shelah P-point independence theorem*. Rapport no. *79*, Wiskunding Semin., Vrije Univ., July 1978.

[12] I. I. PAROVIČENKO: *A universal bicompact of weight $\aleph$*. Dokl. Akad. Nauk SSSR, *150* (1963), 36—39.

[13] B. POSPÍŠIL: *Remark on bicompact spaces*. Ann. of Math. *38* (1937), 845—846.

[14] W. RUDIN: *Homogeneity problems in the theory of Čech compactifications*. Duke Math. J. *23* (1956), 409—419, 633.

[15] M. H. STONE: *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*. Trans. Amer. Math. Soc. *41* (1937), 375—481.

[16] A. N. TICHONOV: *Über die topologische Erweiterung von Räumen*. Math. Ann. *102* (1929), 544—561.

Zamyšlení nad diferenciálně geometrickým dílem Eduarda Čecha*)

Ivan Kolář, Brno

Naprostá většina Čechovy původní vědecké tvorby v diferenciální geometrii spadá do oblasti projektivní diferenciální geometrie, kde je právem považován za jednoho

*) Záznam odborné přednášky konané na MFF UK v rámci vzpomínkové slavnosti k 20. výročí úmrtí E. ČECHA dne 17. března 1980.