Barry Cipra

Maďarský matematik rozřešil kvadraturu kruhu

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 35 (1990), No. 6, 337--339

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138163

snáď, že se to isté stane s interakciami medzi elementárnymi časticami? Väčšina fyzikov si asi myslí, že štyri interakcie stačia a žiadne ďalšie pridávať netreba. Ale myšlienka piatej sily už zaujala predstavivosť experimentálnych fyzikov. Preto je isté, že honba za piatou silou bude pokračovať.

Ďakujem prof. Lukáčovi, DrSc., ktorý prišiel s nápadom na napísanie tohto článku.

Literatúra

[1] FISCHBACH, E., et al.: Phys. Rev. Lett. *56* (1986), 3.
[2] STACEY, F. D., et al.: Rev. Mod. Phys. *59* (1987), 157.
[3] ECKHARDT, D. H.: Phys. Rev. Lett. *56* (1986), 2868.
[4] STUBBS, C. W., et al.: Phys. Rev. Lett. *58* (1987), 1070.
[5] THIEBERGER, P.: Phys. Rev. Lett. *58* (1987), 1066.
[6] BOYNTON, P., et al.: Phys. Rev. Lett. *59* (1987), 1385.
[7] NIEBAUER, T. N., et al.: Phys. Rev. Lett *59* (1987), 609.
[8] ECKHARDT, D. H., et al.: Phys. Rev. Lett. *60* (1988), 2567.
[9] ANDER, M. E., et al.: Phys. Rev. Lett. *62* (1989), 985.
[10] NIETO, M. M., et al.: Phys. Rev. D *36* (1987), 3684.

Maďarský matematik rozřešil kvadraturu kruhu

Barry A. Cipra

> *Kreslil a počítal ve dne v noci, pokrýval hromady papíru obrazci, písmenkami, číslicemi, algebraickými symboly a jeho zhnědlý obličej, obličej zdánlivě nezdravého člověka, měl vizionářský a zažraný výraz maniaka. Jeho rozhovor se týkal výlučně a se strašlivou jednotvárností poměrového čísla pi …*
>
> Thomas Mann: *Kouzelný vrch**)

Pokud se vám zdá, že fraktály a podivné atraktory jsou fantasticky vyhlížející množiny, vyčkejte s úsudkem a podívejte se, s čím si pohrával Miklós Laczkovich. Tento matematik z budapešťské univerzity přišel na to, jak rozřezat kruh na mnoho nepředstavitelně podivných kousků, kterými umí pohybovat tak, že z nich složí čtverec přesně stejného obsahu – krátce řečeno, provedl kvadraturu kruhu!

Než vznesete námitku, že kvadraturu kruhu nelze provést a že jenom blázni (jako státní zástupce Paravant v *Kouzelném vrchu*) se o ni pokoušejí, připomeňme, že problém,

*) Překlad PAVEL LEVIT a JAN ZAHRADNÍČEK. Nakladatelství Melantrich A. S., Praha, 1930. (Kniha druhá, s. 355)

BARRY A. CIPRA: *Hungarian Mathematician Squares the Circle.* Reprinted from SIAM NEWS, Vol. *22*, No. 5, September 1989, p. 19. Přeložil IVAN NETUKA.

který Laczkovich vyřešil, není klasická řecká úloha o kvadratuře kruhu. Ta požaduje sestrojit pomocí pravítka a kružítka čtverec o stejném obsahu jako zadaný kruh. Nemožnost řešení takové úlohy kvadratury kruhu pouze vyjadřuje, že pravítko a kružítko na všechno nestačí a je založena na dvou výsledcích:

(1) body v rovině, které lze „zkonstruovat", odpovídají jisté třídě algebraických čísel a (2) π není algebraické číslo, jak dokázal Ferdinand Lindemann v r. 1882. (Algebraické číslo je kořenem polynomu s racionálními koeficienty.)

Laczkovich vyřešil zcela jiný problém, jehož kořeny sahají do dvacátých let tohoto století. V r. 1924 Stefan Banach a Alfred Tarski publikovali výsledek, který šokoval i otrlé matematiky. Ukázali, že kouli lze rozložit na konečně mnoho kousků, přemístit je a složit z nich kouli s dvojnásobným poloměrem. Obecněji ukázali, že každá trojrozměrná množina s neprázdným vnitřkem (tj. cokoli obsahující kouli) se dá rozložit a znovu složit na libovolnou jinou takovou množinu nehledě na její velikost.

Jednoduše řečeno, Banachův-Tarského paradox, jak se tomuto výsledku začalo říkat, vyjadřuje, že golfový míček a planeta Jupiter jsou stejně rozložitelné.

Matematici by správně měli takové výsledky před veřejností skrývat — ta už si stejně myslí, že matematika je divná. Tento dojem se může tímto vysvětlením jen potvrdit. Důvodem, proč Banachův-Tarského paradox nepředstavuje žádný spor, spočívá v tom, že samotný pojem objemu nemá žádný význam pro některé z kousků, které se přemísťují — jsou to, jak se říká, neměřitelné množiny. Neexistuje žádný princip — nevyjímaje zdravý rozum — který by zabránil systému neměřitelných množin vytvořit jedním způsobem horu a druhým krtinec, prostě udělat z komára velblouda.

Existence neměřitelných množin je sama o sobě poněkud zneklidňující. Teorie chaosu se může zabývat zvláštně vyhlížejícími podivnými atraktory a pokroucenými potrhanými fraktálními tvary, ale ty aspoň mají míru. Důvodem pro existenci neměřitelných množin je skutečnost, že Lebesgueova míra — dobře známé dx ze základní analýzy — je přetížena povinnostmi. Chtít na množinové funkci, aby byla nezáporná, konečně i spočetně aditivní, invariantní vůči posunutím a otočením a definovaná na všech množinách, to je příliš mnoho.

Pokud absolutně trváte na lebesgueovské měřitelnosti všech množin, džin teorie množin vaše přání vyplní — bude vás to ale stát axióm výběru. Prostě nesmíte chtít všechno.

Neměřitelné množiny existují i v jednorozměrném a dvourozměrném případě, ne však Banachův-Tarského paradox. Banach v r. 1925 dokázal, že Lebesgueovu míru na přímce a v rovině lze rozšířit na konečně aditivní míru definovanou na všech podmnožinách. To znamená, že stejně rozložitelné množiny na přímce či v rovině musí mít stejnou délku či obsah.

Zhruba ve stejnou dobu John von Neumann, který, zdá se, měl v tomto století prsty ve všem, vyjasnil algebraické podmínky, při nichž Banachův-Tarského paradox nastává. Důležitá je, jak ukázal von Neumann, struktura grupy euklidovských transformací — posunutí, otočení a souměrnosti — při nichž je míra invariantní. V rovině se tedy nevyskytují paradoxy, neboť existuje pouze jedna osa otáčení.

Toto všechno však nechalo otevřenou otázku, zda dva rovinné obrazce lze rozložit a znovu složením převést jeden v druhý, mají-li stejný obsah. Odpověď nebylo těžké najít pro mnohoúhelníky. Pokud se nestaráte o strany, rozklad lze udělat rovnými řezy (výsledek ze začátku 19. století). Tarski ukázal, co udělat se stranami, takže je uvažován každý jednotlivý bod. Tedy je možné vyjít od libovolného mnohoúhelníku a přetvořit jej na čtverec.

Tento výsledek vedl Tarského k formulaci problému o rozkladu kruhu umožňujícímu převedení na čtverec: Jestliže kruh a čtverec mají stejný obsah, existují části $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kruhu a části $B_1, B_2, \ldots, B_n$ čtverce tak, že část A_1 je shodná s B_1, A_2 shodná s B_2 atd.? Toto je problém kvadratury kruhu, který Laczkovich vyřešil.

Vyhlídky na vyřešení Tarského problému se zdály být temné. Všechny dílčí výsledky byly negativní. V r. 1963 dokázali Lester Dubins, Morris Hirsch a Jack Karush z kalifornské univerzity v Berkeley, že kvadraturu kruhu nelze provést, pokud trváte na používání „jordanovských nůžek" — tj. části jsou ohraničeny Jordanovými křivkami. Nedávno dokázal Richard J. Gardner v Saúdské Arábii (King Fahd University), že kvadraturu nelze provést, pokud transformace užité při přemístění částí generují diskrétní grupu.

Laczkovichův důkaz se hodí nejen pro kruh, ale pro libovolnou oblast ohraničenou po částech hladkou Jordanovou křivkou, jejíž části jsou buď úsečky, nebo křivky, jejichž křivost je sevřena mezi dvě kladné konstanty. Nejpřekvapivější rys důkazu spočívá v tom, že využívá jenom posunutí. To je zcela nové dokonce i pro mnohoúhelníky, neboť předcházející důkazy užívaly otočení i posunutí. To budí zdání, jakoby se důkaz vysmíval Banachovu-Tarského paradoxu, který pro paradoxální změnu míry závisí na rotacích.

Stejně jako všechny dobré důkazy, Laczkovichův výsledek nadhazuje stejně otázek jako jich zodpovídá. Lze speciálně tuto metodu užít pro vyšší dimenze? Lze tedy vyjít z koule a přestavět ji posunutím jejích částí na krychli? Lze zmírnit pomocnou podmínku o křivosti hranice? Jak vypadá situace pro množiny ohraničené obecnou křivkou? Konečně jakého druhu jsou požadované kousky, aby byl rozklad možný, a kolik jich je? Otevřenou otázkou zůstává, zda kvadraturu kruhu lze provést s měřitelnými kousky. Pokud jde o počet, Laczkovich odhaduje, že jeho přístup ke kvadratuře kruhu vyžaduje řádově 10^{50} kousků, což je něco zcela jiného než pět paradoxálních kousků postačujících ke zdvojení koule.

Není jasné, zda a jaký bude dopad Laczkovichova důkazu na čistou matematiku mimo vlastní studovanou problematiku. Rozklad, který umožňuje kvadraturu kruhu, užívá tak fantastických množin, že se zdá nepravděpodobné očekávat jakékoli praktické aplikace. Nebuďte si však tolik jisti! Když chaotické shluky mohou sdílet blažené pocity s Cantorovým diskontinuem, jen si představme milostné zápletky, které se rýsují v neměřitelné budoucnosti.

Ostatně, co se to tehdy odehrávalo na oněch paládiových tyčinkách?

Barry A. Cipra je matematik a spisovatel působící v Northfieldu, Minnesota.

Poznámka redakce PMFA:

Překladové články s podobnou tematikou otištěné v PMFA: *26* (1981), str. 151—155 a *28* (1983), str. 320—328.
Článek téhož autora otištěný v PMFA: *34* (1989), str. 108—113.