Josef Král
Hausdorffovy míry a odstranitelné singularity parciálních diferenciálních rovnic

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 35 (1990), No. 6, 319--330

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138160

Hausdorffovy míry a odstranitelné singularity řešení parciálních diferenciálních rovnic

Josef Král, Praha

V poslední době se tzv. fraktály a v souvislosti s nimi také Hausdorffovy míry těší neobyčejné popularitě i v nematematických kruzích. V samotné matematice se ovšem tyto míry používají dávno a v mnoha jejích oborech se staly užitečným aparátem k odvození geometricky názorných výsledků. Pokusíme se na několika příkladech ilustrovat jejich použití na problematiku odstranitelnosti singularit řešení parciálních diferenciálních rovnic. Budeme pro jednoduchost uvažovat pouze operátory v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^N$ dimenze N, které lze zapsat ve tvaru

$$P(D) = \sum_{\alpha \in M} a_\alpha D^\alpha , \tag{0}$$

kde se sčítá přes konečnou množinu M multiindexů $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ s celými nezápornými komponentami; koeficienty a_α jsou komplexní konstanty. Přitom používáme obvyklého označení

$$D_j = -\mathrm{i}\, \partial/\partial x_j \ (j = 1, \ldots, N)$$

(kde i je imaginární jednotka a $\partial/\partial x_j$ značí parciální derivaci podle j-té proměnné),

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_N^{\alpha_N}$$

(takže D^α vznikne složením operátorů D_j s násobnostmi α_j, $j = 1, \ldots, N$).
Označme ještě

$$P^*(D) = \sum_{\alpha \in M} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha$$

operátor formálně adjungovaný k $P(D)$, kde $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$. Jestliže $U \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a μ je konečná borelovská míra v $\mathbb{R}^N$, pak říkáme, že lokálně lebesgueovsky integrovatelná funkce h na U splňuje rovnici

$$P(D)\, h = \mu$$

ve smyslu distribucí, jestliže pro každou nekonečně diferencovatelnou funkci φ s kompaktním nosičem v U platí

$$\int_U h(x)\, P^*(D)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \int_U \varphi(x)\, \mathrm{d}\mu(x) .$$

RNDr. Josef Král, DrSc., je vedoucím vědeckým pracovníkem MÚ ČSAV, Žitná 25, Praha 1. Pracuje v oboru matematické analýzy.

(Připomínáme, že nosičem funkce φ se rozumí uzávěr množiny $\{x \in \mathbb{R}^N;\ \varphi(x) \neq 0\}$. Nosič míry μ je tvořen všemi body x, pro něž $\mu(V_x) > 0$ pro každé otevřené okolí V_x bodu x. Diracova míra δ je na borelovských množinách $M \subset \mathbb{R}^N$ definována předpisem

$$\delta(M) = \begin{cases} 1, \text{ jestliže } M \text{ obsahuje počátek } O = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^N, \\ 0, \text{ jestliže } O \notin M; \end{cases}$$

nosičem δ je tedy $\{O\}$.)

Umluvme se ještě, že pro stručnost budeme v dalším integrál funkce φ podle Lebesgueovy míry přes množinu U značit prostě $\int_U \varphi$ apod.

Jestliže lokálně lebesgueovsky integrovatelná funkce E splňuje na $\mathbb{R}^N$ rovnici

$$P(D)\, E = \delta,$$

pak E se nazývá fundamentální funkcí operátoru $P(D)$.

Způsobů, kterými se zavádí pojem odstranitelných singularit, je mnoho. Pro jednoduchost se přidržíme terminologie, kterou používají např. R. Harvey a J. Polking v [5].

Definice. *Nechť $K(U)$ je nějaká třída lokálně integrovatelných funkcí na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^N$ a F je relativně uzavřená podmnožina v U. Množina F se nazývá odstranitelnou pro $K(U)$ vzhledem k $P(D)$, jestliže každá funkce $h \in K(U)$, která na množině $U \setminus F$ splňuje rovnici $P(D)\, h = 0$ ($=$ nulová míra) ve smyslu distribucí, automaticky splňuje stejnou rovnici $P(D)\, h = 0$ na celé množině U.*

Je známo mnoho výsledků specifikujících v závislosti na $K(U)$ a $P(D)$ postačující nebo nutné podmínky k odstranitelnosti F. Často se zavádí vhodná kapacita měřící masivnost množin v $\mathbb{R}^N$ a množiny odstranitelných singularit se charakterizují jako množiny nulové kapacity. Tak např. pro třídu $C(U)$ všech spojitých funkcí na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^3$ jsou vzhledem k Laplaceově operátoru $\Delta = D_1^2 + D_2^2 + D_3^2$ odstranitelné právě ty relativně uzavřené množiny $F \subset U$, které mají nulovou elektrostatickou kapacitu, tj. které neobsahují nosič žádné netriviální borelovské míry μ, pro niž by Newtonův potenciál

$$\int_{\mathbb{R}^3} 1/|x - y| \, \mathrm{d}\mu(y)$$

byl omezenou funkcí proměnné x na celém prostoru $\mathbb{R}^3$.

I když zavedení kapacity je fyzikálně názorné a analyticky jednoduché, je potřebné dodatečně odvozovat její geometricky názorné odhady pomocí vhodných měr. Už z toho důvodu je účelné pokusit se alespoň ve speciálních případech přímo popsat odstranitelné singularity pomocí vhodných Hausdorffových měr. Připomeňme nejprve jejich obvyklou definici. Měrnou funkcí budeme pro jednoduchost rozumět takovou spojitou nezápornou neklesající funkci $f: \langle 0, \infty) \to \langle 0, \infty)$, která je kladná na $(0, \infty)$. Nechť X je metrický prostor s metrikou ϱ. Pro každou neprázdnou $L \subset X$ budeme symbolem

$$\operatorname{diam} L = \sup \{\varrho(x, y);\ x, y \in L\}$$

značit průměr L. Pro takovou L a $\varepsilon > 0$ označíme

$$H^{f,\varepsilon}(L) = \inf \sum_n f(\operatorname{diam} L_n),$$

kde infimum se bere přes všechny posloupnosti neprázdných množin L_n s průměry diam $L_n \leqq \varepsilon$ takové, že $L \subset \bigcup_n L_n$. Položíme $H^{f,\varepsilon}(\emptyset) = 0$ a pro libovolnou $P \subset X$ definujeme

$$H^f(P) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} H^{f,\varepsilon}(P) .$$

Ve speciálním případě, kdy f je mocninná funkce s exponentem $\gamma \geqq 0$, tj. $f(t) = t^\gamma$ pro $t > 0$, se $H^f(.)$ nazývá vnější γ-rozměrnou mírou a budeme ji značit $H_\gamma(.)$. V případě, že bude potřebné vyznačit závislost na metrice ϱ, budeme používat symbolů $H^f(P, \varrho)$, $H_\gamma(P, \varrho)$ apod.

Pozastavme se nyní u některých jednoduchých příkladů, pro něž se podařilo charakterizovat odstranitelnost singularit pomocí Hausdorffových měr. Elegantní výsledek týkající se třídy $C_\gamma(U)$ tvořené funcemi u splňujícími Hölderovu podmínku s exponentem γ

$$|u(x) - u(y)| = O(|x - y|^\gamma) , \quad |x - y| \downarrow 0$$

lokálně v U (tj. stejnoměrně na každém kompaktu obsaženém v U) patří L. Carlesonovi (viz [1]).

Věta o Δ. *Je-li $U \subset \mathbb{R}^N$ otevřená množina a $0 < \gamma < 1, N > 2$, pak relativně uzavřená množina $F \subset U$ je odstranitelná pro $C_\gamma(U)$ vzhledem k $\Delta = \sum_{j=1}^N D_j^2$, právě když*

(1) $$H_{\gamma+N-2}(F) = 0 .$$

Důkaz postačitelnosti podmínky (1) podaný L. Carlesonem v r. 1963 byl technicky náročným využitím Greenovy identity; později byla R. Harveyem a J. Polkingem (1970) vypracována metoda rozkladů jedničky, která umožňuje dokázat postačitelnost podmínky (1) poměrně jednoduše. Důkaz nutnosti podmínky (1) je založen na teorii potenciálu a jeho základní idea stojí za připomenutí. Je dobře známo, že fundamenální funkcí operátoru Δ v $\mathbb{R}^N$ je při vhodné volbě konstanty $c_N > 0$ funkce

$$E_\Delta(x) = c_N |x|^{2-N} .$$

Množiny $\{x; E_\Delta(x) > c\}$ jsou koule. Jestliže μ je míra na $\mathbb{R}^N$ s kompaktním nosičem taková, že pro každou kouli $K_r \subset \mathbb{R}^N$ s poloměrem $r > 0$ platí

(2) $$\mu(K_r) \leqq r^{\gamma+N-2} ,$$

pak se poměrně snadným výpočtem zjistí, že potenciál

$$(E_\Delta * \mu)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} E_\Delta(x - y) \, d\mu(y)$$

této míry splňuje v $\mathbb{R}^N$ lokálně Hölderovu podmínku s exponentem γ (tj. $E_\Delta * \mu \in C_\gamma(\mathbb{R}^N)$). Protože ve smyslu distribucí platí

(3) $$\Delta(E_\Delta * \mu) = \mu ,$$

je vidět, že ty relativně uzavřené množiny $F \subset U$, které obsahují kompaktní nosič nějaké netriviální míry μ splňující (2) pro každou kouli K_r, nemohou být odstranitelné pro $C_\gamma(U)$ vzhledem k Δ. Potenciál $u = E_\Delta * \mu$ takové míry vskutku splňuje rovnici

$\Delta u = 0$ na $U \setminus F$ (neboť platí (3) a μ je nulová mimo F), ale nikoli na U (neboť na pravé straně v (3) je netriviální míra μ s nosičem v $F \subset U$). Charakterizaci kompaktních množin F, které nesou netriviální míru μ splňující (2), podal už v r. 1935 O. Frostman, který dokázal pro obecné měrné funkce tento výsledek:

Lemma (viz [3]). *Jestliže f je měrná funkce, pak k tomu, aby kompakt $F \subset \mathbb{R}^N$ obsahoval nosič netriviální míry μ splňující podmínku*

$$\mu(K_r) \leqq f(r) \tag{4}$$

pro každou kouli $K_r \subset \mathbb{R}^N$ s poloměrem $r > 0$, je nutno a stačí, aby

$$H^f(F) > 0\,. \tag{5}$$

Nutnost podmínky (5) se nahlédne snadno; k důkazu její postačitelnosti navrhl O. Frostman následující názornou metodu postupných korekcí. Předpokládejme pro jednoduchost, že $N = 2$,

$$F \subset \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle\,.$$

Pro každé celé $n \geqq 0$ rozdělme jednotkový čtverec na systém

$$\mathfrak{M}_n = \left\{\left\langle \frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right\rangle \times \left\langle \frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right\rangle;\ 1 \leqq j, k \leqq 2^n\right\}$$

tvořený čtverci o straně 2^{-n}. Na každém $K \in \mathfrak{M}_n$ rozložíme míru ν_n s konstantní hustotou vzhledem k dvojrozměrné Lebesgueově míře, kterou volíme tak, že $\nu_n(K) = f(\operatorname{diam} K)$ v případě $K \cap F \neq \emptyset$, $\nu_n(K) = 0$ v případě $K \cap F = \emptyset$. Tak získáme míru ν_n, jejímž nosičem je sjednocení F_n všech $K \in \mathfrak{M}_n$, pro něž $K \cap F \neq \emptyset$, splňující požadavek

$$K \in \mathfrak{M}_n \Rightarrow \nu_n(K) \leqq \mathrm{f}(\operatorname{diam} K)$$

(viz obr. 1).

Je-li $n \geqq 1$, pak pro některý čtverec $H \in \mathfrak{M}_{n-1}$ by se ovšem mohlo stát, že $\nu_n(H) > \mathrm{f}(\operatorname{diam} H)$. Proto utvoříme novou míru ν_n^1, která vznikne z ν_n korekcí vzhledem ke čtvercům z $\mathfrak{M}_{n-1}$. Pro každé $H \in \mathfrak{M}_{n-1}$ srovnáme $\nu_n(H)$ s $\mathrm{f}(\operatorname{diam} H)$; jestliže $\nu_n(H) \leqq f(\operatorname{diam} H)$, necháme $\nu_n^1 = \nu_n$ na H beze změny, zatímco v případě $\nu_n(H) > \mathrm{f}(\operatorname{diam} H)$ vynásobíme ν_n na H tak zvoleným faktorem $q_H \in (0, 1)$, aby platilo $\nu_n^1(H) = q_H \nu_n(H) = f(\operatorname{diam} H)$. Když H postupně proběhne celý systém $\mathfrak{M}_{n-1}$, dostaneme míru ν_n^1 s nosičem F_n, pro niž už platí

$$K \in \mathfrak{M}_n \cup \mathfrak{M}_{n-1} \Rightarrow \nu_n^1(K) \leqq f(\operatorname{diam} K)\,.$$

Je-li $n \geqq 2$, přejdeme k $\mathfrak{M}_{n-2}$ a provedeme stejné korekce; tím získáme míru ν_n^2. Tak postupujeme dále, až konečně po n krocích dospějeme k míře ν_n^n s vlastností

$$K \in \mathfrak{M}_n \cup \ldots \cup \mathfrak{M}_0 \Rightarrow \nu_n^n(K) \leqq f(\operatorname{diam} K)\,.$$

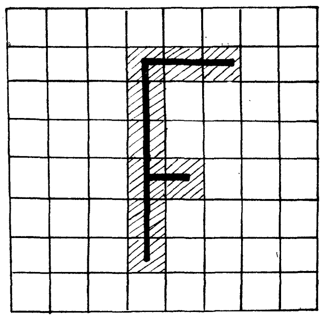
Položíme-li $\mu_n = \nu_n^n$, pak vzhledem k postupu korekcí je každý čtverec $K \in \mathfrak{M}_n$, pro nějž $K \cap F \neq \emptyset$, obsažen v některém $H \in \bigcup_{k=0}^{n} \mathfrak{M}_k$, pro který $\mu_n(H) = f(\operatorname{diam} H)$. Utvoříme-li systém $\{H_1^n, \ldots, H_{p_n}^n\}$ všech maximálních (vzhledem k inkluzi) čtverců $H \in \bigcup_{k=0}^{n} \mathfrak{M}_k$ s touto vlastností, dostaneme systém nepřekrývajících se čtverců pokrývající F_n, pro který

$$(6) \qquad \mu_n(\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle) = \sum_{j=1}^{p_n} f(\operatorname{diam} H_j^n).$$

Protože pro každé n je $\mu_n(\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle) \leqq f(\sqrt{2})$, můžeme přejít k vybrané posloupnosti μ_{n_k}, která slabě konverguje k jisté míře μ s nosičem v $\bigcap_{n=0}^{\infty} F_n = F$; snadno nahlédneme, že

$$K \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathfrak{M}_n \Rightarrow \mu(K) \leqq 9f(\operatorname{diam} K).$$

Odtud je vidět, že pro vhodnou konstantu $c > 0$ a každý kruh K_r o poloměru r platí $\mu(K_r) \leqq c f(r)$, takže stačí vydělit μ konstantou c, aby byl splněn požadavek (4). Jde jen o to zjistit, zda μ je netriviální. Avšak čísla $\mu_{n_k}(\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle)$ nemohou konvergovat k nule, protože v opačném případě bychom díky rovnosti (6) mohli pokrýt množinu F systémy čtverců $\{H_j^n\}_{j=1}^{p_n}$ $(n = n_k)$ s libovolně malými součty $\sum_{j=1}^{p_n} f(\operatorname{diam} H_j^n)$, což by znamenalo, že $H^f(F) = 0$ v rozporu s předpokladem (5).



Obr. 1. Nosič F_3 ve Frostmanově konstrukci.

Pozastavili jsme se podrobněji na Frostmanově metodě postupných korekcí, protože její modifikace se uplatňují též v souvislosti s dalšími rovnicemi.

Jako druhého příkladu si všimneme operátoru vedení tepla

$$\mathsf{T} = D_1^2 + \mathrm{i}D_2$$

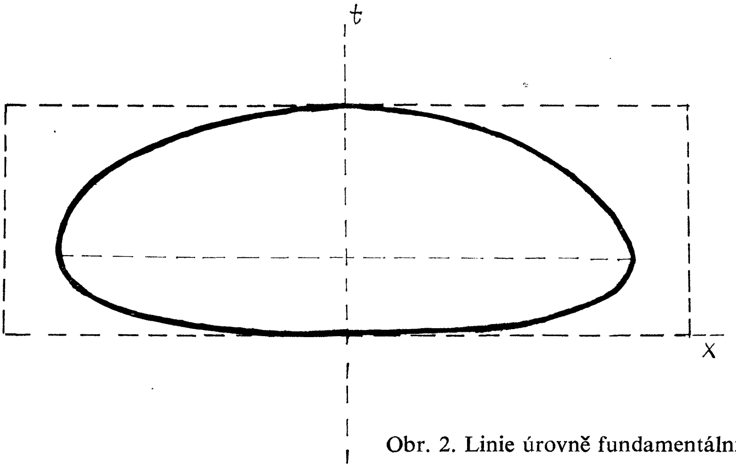
v $\mathbb{R}^2$. Je dobře známo, že příslušná fundamentální funkce má v rovině proměnných x, t tvar $E_{\mathsf{T}}(x, t) = 1/(2\sqrt{\pi})\, G(x, t)$, kde

$$G(x, t) = \begin{cases} 0, & t \leqq 0, \\ t^{-1/2} \exp\left(-\dfrac{x^2}{4t}\right), & t > 0. \end{cases}$$

Množiny

$$\{(x, t); G(x, t) > c\} = \left\{(x, t); 0 < t < c^{-2}, |x| < 2\sqrt{\left(t \ln \frac{1}{ct^{1/2}}\right)}\right\}$$

mají pro $c > 0$ tvar protáhlé oblasti, kterou lze dobře aproximovat obdélníky, jejichž výška je druhou mocninou délky (viz obr. 2).



Obr. 2. Linie úrovně fundamentální tepelné funkce.

Takové obdélníky mají roli „kruhů" vzhledem k anizotropní metrice, při níž je vzdálenost bodů (x, t), $(\tilde{x}, \tilde{t})$ dána předpisem

$$\varrho((x, t), (\tilde{x}, \tilde{t})) = \max\{|x - \tilde{x}|, |t - \tilde{t}|^{1/2}\}\,.$$

Lze očekávat, že tepelné potenciály odvozené od takových měr μ s kompaktním nosičem, pro něž míra každého „anizotropního kruhu s poloměrem r"

$$A_r = \{(x, t); \varrho((x, t), (x_0, t_0))\} \leqq r\}$$

splňuje při pevném γ odhad

$$\mu(A_r) \leqq r^\gamma,\ r > 0\,, \tag{7}$$

budou mít specifické chování. Poměrně jednoduché výpočty skutečně ukazují, že tepelný potenciál $u = E_\mathrm{T} * \mu$ takové míry splňuje při $\gamma \in (1, 2)$ lokálně anizotropní Hölderovu podmínku

$$|u(x, t) - u(\tilde{x}, \tilde{t})| = O(\varrho^{\gamma-1}((x, t), (\tilde{x}, \tilde{t})))\,; \tag{8}$$

zavedeme-li pro střední hodnotu u na A_r označení

$$u_{A_r} = \frac{1}{|A_r|} \int_{A_r} u$$

(kde $|A_r|$ je Lebesgueova míra A_r), pak při $0 < \gamma \leqq 1$ splňuje takový tepelný potenciál anizotropní Campanatovu podmínku

$$\int_{A_r} |u - u_{A_r}| = O(r^{2+\gamma}),\ r \downarrow 0\,, \tag{9}$$

která při $\gamma = 1$ přechází v lokální podmínku omezenosti střední oscilace (= bounded mean oscillation BMO):

$$\frac{1}{|A_r|} \int_{A_r} |u - u_{A_r}| = O(1)\,.$$

Označíme-li tedy symbolem $\mathscr{A}_\gamma(U)$ třídu všech lokálně integrovatelných funkcí u na otevřené $U \subset \mathbb{R}^2$ splňujících v U lokálně podmínku (9) (která je při $\gamma > 1$ ekvivalentní s podmínkou (8)), pak lze uhodnout, že pro $\mathscr{A}_\gamma(U)$ budou neodstranitelné vzhledem k T právě ty relativně uzavřené množiny v U, které obsahují kompaktní nosič nějaké netriviální míry μ splňující (7) pro každý anizotropní kruh A_r s poloměrem r. Lze ovšem očekávat, že takovými množinami jsou právě množiny F kladné γ-rozměrné Hausdorffovy míry odvozené od metriky ϱ: $H_\gamma(F, \varrho) > 0$. To se skutečně dá opět dokázat Frostmanovou metodou postupných korekcí, která se modifikuje tak, že základní čtverec, např. $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$, se nyní postupně dělí na obdélníky typu

$$\left\langle \frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n} \right\rangle \times \left\langle \frac{k-1}{4^n}, \frac{k}{4^n} \right\rangle \quad (1 \leqq j \leqq 2^n,\ 1 \leqq k \leqq 4^n),$$

které se s rostoucím n stávají více a více protaženými. Pro tepelný operátor tak vyjde tato analogie Carlesonovy věty (srv. [7]):

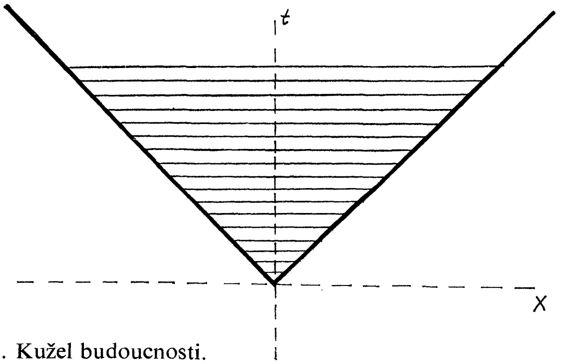
Věta o T. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $0 < \gamma < 2$. Pak relativně uzavřená množina $F \subset U$ je odstranitelná pro $\mathscr{A}_\gamma(U)$ vzhledem k* T, *právě když platí*

$$H_\gamma(F, \varrho) = 0\,. \tag{10}$$

Ve srovnání s Carlesonovou větou o Δ je zajímavé si všimnout, že zde bylo nutno uplatnit anizotropní metriku při definici Hausdorffovy míry i v zavedení příslušných prostorů funkcí (to nepřekvapuje, neboť T je druhého řádu jen v prostorové proměnné a prvního řádu v čase) a že škálu funkcí splňujících Hölderovu podmínku s různými exponenty bylo třeba rozšířit na škálu Campanatových prostorů.

Jako třetí příklad rozebereme vlnový operátor $\mathsf{V} = D_1^2 - D_2^2$ v $\mathbb{R}^2$. Fundamentální funkcí pro V v $\mathbb{R}^2$ je charakteristická funkce kužele budoucnosti

$$E_{\mathsf{V}}(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t > 0, |x| < t, \\ 0 & \text{pro ostatní } x, t. \end{cases}$$

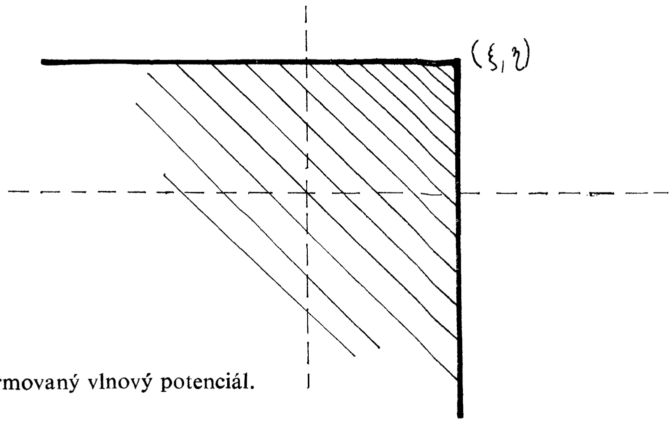


Obr. 3. Kužel budoucnosti.

Pro jednoduchý popis vlnových potenciálů $\mathsf{V}\mu = E_{\mathsf{V}} * \mu$ je výhodné zvolit osy souřadnic do charakteristických přímek (což odpovídá transformaci souřadnic $\xi = \frac{1}{2}(t - x)$,

$\eta = \frac{1}{2}(t + x)$, kterou V přejde na smíšenou derivaci $D_1 D_2$). Pak vlnový potenciál $V\mu$ míry μ s kompaktním nosičem nabývá v bodě (ξ, η) hodnoty

$$V\mu(\xi, \eta) = \mu((-\infty, \xi) \times (-\infty, \eta)). \tag{11}$$



Obr. 4. Transformovaný vlnový potenciál.

Jsou-li f_1, f_2 měrné funkce, pak tedy potenciál $u(\xi, \eta) = V\mu(\xi, \eta)$ splňuje obecné podmínky Hölderova typu

$$\begin{gathered} u(\xi + h, \eta) - u(\xi, \eta) = O(f_1(h)), \\ u(\xi, \eta + h) - u(\xi, \eta) = O(f_2(h)), \quad h > 0, \ h \downarrow 0 \end{gathered} \tag{12}$$

právě tehdy, když míra každého vertikálního pásu šířky $h > 0$ je odhadnuta veličinou

$$\mu(\langle \xi, \xi + h) \times \mathbb{R}) = O(f_1(h)), \quad h \downarrow 0, \tag{13}$$

a míra každého horizontálního pásu výšky h splňuje odhad

$$\mu(\mathbb{R} \times \langle \eta, \eta + h)) = O(f_2(h)), \quad h \downarrow 0. \tag{14}$$

V souvislosti s vyšetřováním neodstranitelných množin pro funkce u splňující podmínky (12) vyvstává ovšem problém charakterizace těch kompaktních množin F, které obsahují nosič takové netriviální míry μ, pro niž platí (13), (14) stejnoměrně vzhledem ke $\xi, \eta \in \mathbb{R}$. Odpověď dává následující tvrzení (které přebírá roli Frostmanova lemmatu), v němž

$$\pi_1 : (\xi, \eta) \mapsto \xi$$
$$\pi_2 : (\xi, \eta) \mapsto \eta$$

značí projekce na charakteristické osy.

Lemma. *Nechť f_1, f_2 jsou měrné funkce. K tomu, aby kompakt $F \subset \mathbb{R}^2$ obsahoval nosič netriviální míry μ splňující podmínky* (13), (14), *je nutno a stačí, aby F nebylo možno rozložit ve tvaru*

$$F = F_1 \cup F_2 \tag{15}$$

takovým způsobem, že

$$H^{f_k}(\pi_k(F_k)) = 0, \quad k = 1, 2. \tag{16}$$

Naznačíme ideu důkazu postačitelnosti; nechť tedy neexistuje takový rozklad (15) a pro jednoduchost předpokládejme, že $F \subset \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$. Snadno se nahlédne, že pak existuje takové $\varepsilon > 0$, že pro libovolné jednorozměrné intervaly $L_1, \ldots, L_{p_n}$, $M_1, \ldots, M_{q_n}$ platí

$$(17) \qquad F \subset \left(\bigcup_{i=1}^{p_n} L_i \times \langle 0, 1\rangle\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{q_n} \langle 0, 1\rangle \times M_j\right) \Rightarrow \sum_{i=1}^{p_n} f_1(\operatorname{diam} L_i) + \sum_{j=1}^{q_n} f_2(\operatorname{diam} M_j) \geqq \varepsilon\,.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nyní jako dříve rozdělíme $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$ na systém $\mathfrak{M}_n$ čtverců $K^n_{ij} = J^n_i \times J^n_j$, kde $J^n_k = \langle k - 1/2^n, k/2^n\rangle$. Na každém K^n_{ij} rozložíme míru μ_n s konstantní hustotou vzhledem k Lebesgueově míře tak, aby čísla $\mu_n(K^n_{ij}) = x_{ij}$ splňovala tyto požadavky:

$$(18) \qquad x_{ij} \geqq 0\,;$$

$$(19) \qquad x_{ij} = 0\,, \quad \text{kdykoli} \quad K^n_{ij} \cap F = \emptyset\,;$$

$$(20) \qquad \sum_{i=i_1}^{i_2} \sum_{j=1}^{2^n} x_{ij} \leqq f_1\left(\operatorname{diam} \bigcup_{i=i_1}^{i_2} J^n_i\right), \quad 1 \leqq i_1 \leqq i_2 \leqq 2^n$$

(takže na vertikálních dyadických pásech je celková míra odhadnuta šířkou pásu měřenou pomocí f_1);

$$(21) \qquad \sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j=j_1}^{j_2} x_{ij} \leqq f_2\left(\operatorname{diam} \bigcup_{j=j_1}^{j_2} J^n_j\right), \quad 1 \leqq j_1 \leqq j_2 \leqq 2^n$$

(takže na horizontálních dyadických pásech je celková míra odhadnuta jejich výškou měřenou pomocí f_2).

Soustava (18)–(21) je zřejmě řešitelná a z (20), (21) je vidět, že nezávisle na n jsou celkové míry $\mu_n(\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle)$ ohraničeny stejnou konstantou, takže přechodem k vybrané slabě konvergentní posloupnosti získáme limitní míru μ s nosičem v F, která díky podmínkám (20), (21) bude splňovat požadavky (13), (14). Jde jen o to zajistit, že μ je netriviální. K tomu poslouží tato podmínka:

(22) Jestliže $K^n_{i_0 j_0} \cap F \neq \emptyset$, pak buď existují $1 \leqq i_1 \leqq i_0 \leqq i_2 \leqq 2^n$ takové, že v (20) nastane rovnost, nebo existují $1 \leqq j_1 \leqq j_0 \leqq j_2 \leqq 2^n$ takové, že rovnost nastane v (21).

Jinými slovy: Každý čtverec $K^n_{i_0 j_0}$ protínající F je buď obsažen ve vertikálním pásu tvaru

$$(23) \qquad L_i \times \langle 0, 1\rangle\,,$$

kde L_i je jednorozměrný interval splňující požadavek

$$\mu_n(L_i \times \langle 0, 1\rangle) = f_1(\operatorname{diam} L_i)\,,$$

nebo je obsažen ve vodorovném pásu tvaru

$$(24) \qquad \langle 0, 1\rangle \times M_j\,,$$

kde interval $M_j \subset \mathbb{R}$ splňuje požadavek

$$\mu_n(\langle 0, 1\rangle \times M_j) = f_2(\operatorname{diam} M_j) .$$

Odtud snadno plyne, že pro vhodné pásy tvaru (23), (24) platí

$$\bigcup \{K^n_{i_0 j_0};\ K^n_{i_0 j_0} \cap F \neq \emptyset\} \subset \left(\bigcup_{i=1}^{p_n} L_i \times \langle 0, 1\rangle\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{q_n} \langle 0, 1\rangle \times M_j\right),$$

přičemž násobnost, s níž jsou těmito pásy pokryty body čtverce $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$, nepřevýší 4. Vzhledem k (17) tedy

$$4\mu_n(\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle) \geqq \sum_{i=1}^{p_n} \mu_n(L_i \times \langle 0, 1\rangle) + \sum_{j=1}^{q_n} \mu_n(\langle 0, 1\rangle \times M_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p_n} f_1(\operatorname{diam} L_i) + \sum_{j=1}^{q_n} f_2(\operatorname{diam} M_j) \geqq \varepsilon .$$

Podmínka (22) tedy zaručuje, že čísla $\mu_n(\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle)$ se pro $n \to \infty$ nemohou blížit k nule a μ vyjde netriviální. Podmínku (22) nelze nyní bezprostředně zajistit Frostmanovou metodou postupných korekcí: jestliže zkorigujeme míru na vertikálním pásu, můžeme ji pokazit na horizontálních pásech. Lze však použít následujícího obratu, který navrhl M. Chlebík. Zvolíme takové řešení soustavy (16)–(19), pro které je součet

$$(25) \qquad \sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} x_{ij}$$

maximální; takové řešení existuje, neboť množina všech x_{ij} splňujících (18)–(21) je kompakt v prostoru dimenze 4^n a spojitá funkce (25) v některém jeho bodě nutně nabývá maxima. Toto extremální řešení nutně splňuje podmínku (22). Kdyby se totiž našly indexy i_0, j_0 takové, že sice $K^n_{i_0 j_0} \cap F \neq \emptyset$, ale přitom by platily implikace

$$i_1 \leqq i_0 \leqq i_2 \Rightarrow \sum_{i=i_1}^{i_2} \sum_{j=1}^{2^n} x_{ij} < f_1(\operatorname{diam} \bigcup_{i=i_1}^{i_2} J^n_i),$$

$$j_1 \leqq j_0 \leqq j_2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{2^n} \sum_{j=j_1}^{j_2} x_{ij} < f_2(\operatorname{diam} \bigcup_{j=j_1}^{j_2} J^n_j),$$

pak by podmínky (18)–(21) zůstaly v platnosti, i kdybychom x_{ij} nahradili čísly

$$\tilde{x}_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & \text{pro} \quad (i, j) \neq (i_0, j_0), \\ x_{i_0 j_0} + \varepsilon_0 & \text{pro} \quad (i, j) = (i_0, j_0) \end{cases}$$

při dostatečně malém $\varepsilon_0 > 0$, což je ve sporu s maximalitou součtu (25); tím je (22) ověřeno.

Z dokázaného lemmatu plyne opět věta o odstranitelných singularitách vzhledem k V pro vhodnou třídu funkcí. Umluvme se, že totální variaci funkce h na intervalu $\langle a, b\rangle$ budeme značit var $[h(\xi);\ a \leqq \xi \leqq b]$. Jsou-li f_1, f_2 měrné funkce a $U \subset \mathbb{R}^2$ otevřená množina, označíme symbolem $V_{f_1 f_2}(U)$ třídu všech spojitých funkcí u na U splňujících tuto podmínku:

Pro každý obdélník $\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \subset U$ existuje konstanta $C > 0$ tak, že platí

$$\eta, \eta + h \in \langle c, d\rangle \Rightarrow \operatorname{var}\left[u(\xi, \eta + h) - u(\xi, \eta);\, a \leqq \xi \leqq b\right] \leqq Cf_2(|h|)\,,$$

$$\xi, \xi + h \in \langle a, b\rangle \Rightarrow \operatorname{var}\left[u(\xi + h, \eta) - u(\xi, \eta);\, c \leqq \eta \leqq d\right] \leqq Cf_1(|h|)\,.$$

Poznamenejme, že vlnové potenciály (11) měr μ splňujících podmínky (13), (14) automaticky patří do $V_{f_1 f_2}(\mathbb{R}^2)$.

Věta o V. *Nechť f_1, f_2 jsou měrné funkce a $U \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina. K tomu, aby relativně uzavřená množina $F \subset U$ byla odstranitelná pro $V_{f_1 f_2}(U)$ vzhledem k operátoru $D_1 D_2$, je nutno a stačí, aby se dala vyjádřit ve tvaru* (15), *kde množiny F_k splňují* (16).

Nutnost uvedené podmínky vyplývá z předchozího lemmatu; důkaz postačitelnosti je založen na tom, že spojitá funkce u splňuje na U rovnici $D_1 D_2 u = 0$ ve smyslu distribucí, právě když pro každý obdélník $\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \subset U$ platí $u(a, c) + u(b, d) = u(b, c) + u(a, d)$ (viz [2]).

Vraťme se nyní k obecnému operátoru (0) v $\mathbb{R}^N$. Fixujme přirozená čísla $m_1, \ldots, m_N$ tak, aby celá množina M příslušných multiindexů ležela pod nadrovinou s rovnicí

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{x_k}{m_k} = 1\,.$$

Označme

$$m = (m_1, \ldots, m_N)\,,\ \bar{m} = \max\{m_k;\, 1 \leqq k \leqq N\}\,,\ b = \sum_{k=1}^{N} 1/m_k\,.$$

Píšeme-li pro $\alpha \in \mathbb{R}^N$

$$|\alpha : m| = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k/m_k\,,$$

pak tedy

$$\alpha \in M \Rightarrow |\alpha : m| \leqq 1\,.$$

Operátoru $P(D)$ přiřaďme polynomy

$$P_m(\xi) = \sum_{\substack{|\alpha:m|=1\\ \alpha\in M}} a_\alpha \xi^\alpha\,,\ P(\xi) = \sum_{\alpha\in M} a_\alpha \xi^\alpha\,,$$

kde $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_N^{\alpha_N}$ pro $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$. Operátor $P(D)$ se nazývá semieliptickým, jestliže platí

$$P_m(\xi) = 0 \Rightarrow \xi = O\,;$$

v takovém případě je nutně m_k právě stupeň polynomu $P(\xi)$ vzhledem k proměnné $\xi_k (1 \leqq k \leqq N)$.

Poznamenejme, že výše zmíněné operátory Δ, T jsou semieliptické. Zaveďme ještě v $\mathbb{R}^N$ anizotropní metriku ϱ předpisem

$$\varrho(x, y) = \max\{|x_k - y_k|^{m_k/\bar{m}};\, 1 \leqq k \leqq N\}$$

a umluvme se, že v dalším bude A_r vždy značit kouli o poloměru r vzhledem k této metrice. Potom platí tato

Věta o $P(D)$. *Buď* $U \subset \mathbb{R}^N$ *otevřená množina a nechť* $0 < \gamma < \bar{m}b + 1$. *Pak každá relativně uzavřená množina* $F \subset U$ *splňující podmínku*

$$H_\gamma(F, \varrho) = 0 \tag{26}$$

je odstranitelná vzhledem k $P(D)$ *pro třídu všech lokálně integrovatelných funkcí* u *na* U *splňujících v* U *lokálně podmínku*

$$\int_{A_r} |u - u_{A_r}| = O(r^{\bar{m}+\gamma}), \quad r \downarrow 0 \,. \tag{27}$$

Jestliže $P(D)$ *je semieliptický, pak podmínka* (26) *je též nutná k odstranitelnosti* F *vzhledem k* $P(D)$ *pro třídu všech lokálně integrovatelných funkcí* u *splňujících v* U *lokálně* (27).

Poznamenejme, že při $\gamma > \bar{m}(b - 1)$ je (27) v podstatě ekvivalentní s lokální Hölderovou podmínkou

$$|u(x) - u(y)| = O(\varrho^\lambda(x, y)) \text{ s exponentem } \lambda = \gamma - \bar{m}(b - 1) \,.$$

Postačitelnost podmínky (26) se dokazuje modifikovanou metodou rozkladu jedničky Harveye-Polkinga. Základní idea důkazu nutnosti je shodná s metodou potenciálů z výše uvedených příkladů týkajících se Δ a T. Nyní ovšem nelze obecně uvést explicitní vyjádření fundamentální funkce operátoru $P(D)$; V. V. Grušinovi se však podařilo odvodit přesné odhady této funkce i jejích derivací v blízkosti O a z nich lze získat potřebné informace o chování potenciálů vznikajících konvolucí fundamentální funkce s vhodně rozloženými mírami (viz [4], [8]).

Literatura

[1] L. Carleson: *Selected problems on exceptional sets.* Van Nostrand 1967.

[2] M. Dont: *Removable singularities for solutions of an equation.* Acta Univ. Carolinae *14* (1973), № 2, 23—30.

[3] O. Frostman: *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions.* Meddel. Lunds. Univ. Mat. Sem. *3* (1935).

[4] V. V. Grušin: *Svjaz' meždu lokal'nymi i global'nymi svojstvami gipoelliptičeskich uravněnij s postojannymi koefficientami.* Mat. sbornik *66* (1965), 525—550.

[5] R. Harvey, J. Polking: *Removable singularities of solutions of linear partial differential equations.* Acta Mathematica (Uppsala) *125* (1970), 39—56.

[6] M. Chlebík, J. Král: *Removability of the wave singularities in the plane.* Preprint MÚ ČSAV № 38 (1988), 1—21.

[7] J. Král: *Hölder-continuous heat potentials.* Accad. Nazionale dei Lincei, Rend. della Cl. di Sc. fis., mat e natur. Ser. VIII., vol. *LI* (1971), fasc. 1—2, 17—19.

[8] J. Král: *Semielliptic singularities.* Časopis pro pěstování matematiky *109* (1984), 304—322.