Petr Štěpánek

Giuseppe Peano (1859—1932). Logika a teorie dimenze

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 27 (1982), No. 6, 301--307

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138151

Giuseppe Peano (1859—1632) Logika a teorie dimenze

Petr Štěpánek, Praha

V roce 1879, kdy Gottlob Frege (1848—1925) zveřejnil svou slavnou práci [2], se kterou je spojován vznik moderní matematické logiky, byl Giuseppe Peano ještě studentem na univerzitě v Turinu, ale v posledním desetiletí minulého století a na jeho přelomu je již uznávanou vedoucí osobností této nové matematické disciplíny. Mluvíme-li o vzniku moderní logiky, musíme připomenout jména Fregeho velkých předchůdců Gottfrieda Wilhelma Leibnize (1646—1716), Bernarda Bolzana (1781—1848) a Georga Boola (1815—1864). Pro rozvoj logiky na sklonku století měly velký význam práce Peanových současníků Richarda Dedekinda (1831—1916), Ernesta Schrödera (1841—1902) a souběžně se rozvíjející teorie množin vytvořená Georgem Cantorem (1845—1918).

G. Peano, od jehož smrti uplynulo letos padesát let, se narodil 27. srpna 1858 v italském městě Cuneo, které je asi v polovině cesty z Monaca do Turina. Od dvanácti let žil u svého strýce v Turině, kde navštěvoval střední školu, a v letech 1876—1880 studoval na univerzitě. V tomto městě strávil celý svůj život. Po studiích se stává asistentem a po deseti letech profesorem na univerzitě v Turině. Po řadu let působil i jako profesor na tamní vojenské akademii. Vyučuje matematickou analýzu nejprve jako asistent u Angela Genocchiho a při vážném onemocnění svého profesora je pověřen vedením přednášek. Zde začíná dlouhou řadu objevů, které ovlivnily vývoj a výklad matematické analýzy.

V roce 1883 zaslal své první dvě práce Akademii věd v Turině. Obsahují Peanovu definici integrálu a zabývají se interpolací funkcí komplexní proměnné. Ukázal, že některé funkce lze vyjádřit pomocí integrálu podle uzavřené křivky v komplexní rovině. Se souhlasem profesora Genocchiho, který je uveden jako autor, sepsal a o rok později vydal *Diferenciální počet a principy počtu integrálního s dodatky Dr. G. Peana.* Tato učebnice se na mnoha místech odchyluje od Genocchiho přednášek a uvádí Peanovy původní výsledky, které přispěly k prohloubení a ke zpřesnění výkladu matematické analýzy. Z nových výsledků uveřejněných poprvé v této knize tehdejší *Encyklopedie matematických metod* uvádí mimo jiné zobecnění věty o střední hodnotě diferenciálního počtu, větu o stejnoměrné spojitosti funkcí více proměnných, věty o existenci a diferencovatelnosti implicitních funkcí, příklad funkce, jejíž parciální derivace nekomutují, podmínky pro vyjádření funkce více proměnných pomocí Taylorovy řady. V knize je také zmínka o Dirichletově funkci, která je definována nulou pro racionální a jedničkou pro iracionální hodnoty proměnné. Jako první podal Peano analytické vyjádření této funkce. Ještě v roce 1891 pokládal Frege něco takového za nemožné. Kniha byla brzo přeložena do němčiny a do ruštiny.

Připomeňme ještě Peanovy výsledky o existenci řešení diferenciálních rovnic tvaru $y' = f(x, y)$. Původní Cauchyův výsledek zaručoval existenci a jednoznačnost řešení pokud funkce f a její parciální derivace podle y jsou spojité. Byl zobecněn C. Briotem a J. Bouquetem v roce 1856 a R. Lipschitzem (1868). I pozdější výsledky V. Volterry nechávaly nezodpověděnou otázku, zda k existenci řešení stačí jen spojitost funkce f. Že tomu tak je, dokázal Peano v práci, kterou roku 1886 zaslal Akademii v Turině. Důkaz nebyl bez vady, přesnější verzi Peano publikoval v roce 1890. Další kniha *Geometrické aplikace infinitezimálního počtu*, kterou Peano vydává v roce 1887, obsahuje zajímavé výsledky o míře množin reálných čísel. Tímto problémem se dříve zabýval G. Cantor, ale jeho míra nebyla konečně aditivní. Vedle Cantorovy míry Peano zavádí pojem vnitřní míry množiny a množinu nazývá měřitelnou, jestliže se shoduje její vnitřní míra s mírou Cantorovou. Stejným způsobem zavádí téhož roku konečně aditivní míru i C. Jordan. Peano jako první studuje funkce množin reálných čísel (míra je speciálním případem takové funkce) a zabývá se problémy derivování a integrování jedné funkce množin podle jiné funkce množin reálných čísel. Jeho výsledky zůstaly na dlouho bez ohlasu. K této problematice se znovu vrací až v roce 1915, v době kdy se dostala do popředí zájmu zásluhou H. Lebesgua, W. H. Younga a dalších. F. A. Medvěděv [6] str. 67–68 hodnotí přínos G. Peana slovy:

„*Pátá kapitola Peanovy knihy přináší nejlepší výsledky, jakých bylo v 19. století dosaženo při studiu funkcí množin.... Dnes by bylo možné mít námitky proti těm či oněm metodám, které použil Peano ve svých úvahách, ale hloubkou a obecností myšlenek je tato kapitola pozoruhodnější než Lebesugeova práce z roku 1910, která je všeobecně považována za hlavní pramen moderních výzkumů v teorii funkcí množin*“.

I v dalších letech publikoval Peano řadu prací z analýzy, mezi nimi i svou slavnou konstrukci křivky, která vyplňuje plochu čtverce. Za zmínku stojí i drobná epizoda, která se týká jeho polemiky s Vito Volterrou (1860–1940).

Známý francouzský fysiolog Etienne Jules Marey předložil 29. října 1894 pařížské Akademii sérii 32 fotografií padající kočky, které ukazovaly, že při pádu z výšky změnila kočka půlobratem orientaci svého těla tak, aby dopadla na všechny čtyři tlapky. Změna orientace se zdála být ve sporu s principem zachování momentů v mechanice a několik členů Akademie vystoupilo s pokusem o vysvětlení. Diskuse se záhy přenesla i na stránky novin. Na příštím zasedání Akademie dne 4. listopadu předvedl Marcel Duprez přístroj, který mohl měnit svou orientaci v prostoru pohybem svých vnitřních částí a Paul Appell doplnil jeho pokus výkladem jeho mechanických principů. V lednu 1895 v časopise Rivista di Matematica publikoval Peano své vysvětlení případu padající kočky. Článek vyšel v rubrice „Různé“ a dnes je obtížné odhadnout, jak vážně byl míněn. V únoru téhož roku přednesl v turinské Akademii Vito Volterra svou práci

O teorii pohybu zemského pólu. Zabýval se v ní otázkou, do jaké míry mohou vnitřní síly ovlivnit pohyb zemské osy. Tato otázka byla „ve vzduchu".

V květnu v turinské Akademii promluvil na stejné téma i Peano. V úvodu se zmínil o problému padající kočky a konstatoval, že z hlediska mechaniky jde v případě kočky i v případě Země o tentýž problém. Uznal však, že Volterra položil otázku pohybů zemského pólu jako první. Peano ukázal možnost použití svého „geometrického kalkulu" a jako příklad uvažoval vliv Golfského proudu na pohyb zemské osy. Uvedl jen výsledky svých výpočtů, které ukazují, že samotný pohyb Golfského proudu může vyvolat posunutí zemského pólu o 1,1 metru za rok. Zmínka o tom, že Volterrova práce byla inspirována Peanem a to, že Peano publikoval výsledky svých výpočtů dříve než Volterra, bylo příčinou polemiky, která trvala téměř rok na půdě Akademie v Turině a v Římě. Podrobný rozbor jednotlivých vystoupení by ukázal dvě rozdílné vědecké osobnosti: Volterra byl mistrem v klasické analýze, postupoval pečlivě a metodicky a detailně zveřejňoval své výsledky. Očekával, že problematika, kterou sám odkryl, zůstane vyhrazena jen jemu. Na druhé straně Peano měl zájem ukázat přednosti geometrického kalkulu, který vypracoval s použitím nových výsledků H. Grassmanna. Nebál se sporu, protože se domníval, že soutěživost a spolupráce ve vědě jsou prospěšné.

První Peanovou publikací o logice je samostatná kapitola o logických operacích v knize vydané v roce 1888, která je jinak věnována geometrickému kalkulu. Je to syntetická práce, která shrnuje jeho studium prací G. Boolea, E. Schrodera a C. S. Peirce a ukazuje analogii mezi algebraickými a deduktivními operacemi. O rok později vychází práce *Aritmetices principia, nova metoda expozita*, ve které se poprvé objevují Peanovy známé axiómy aritmetiky přirozených čísel. Připomeňme mnohokrát citovaný výrok „Přirozená čísla jsou od Boha a vše ostatní je výmyslem lidským", připisovaný Kroneckerovi. Tento výrok ztratí hodně ze své devotnosti, uvědomíme-li si, kam vlastně řadí svého autora, když konstrukce celých čísel z přirozených a konstrukce racionálních čísel z celých čísel je ve své podstatě dílem Kroneckerovým. Chápáme, že otázka, jak definovat přirozená čísla a jejich aritmetické operace, byla tehdy výzvou všem, kdo zkoumali základní principy matematiky. Zabýval se jí také Richard Dedekind, který své výsledky [1] zveřejnil o rok dříve než Peano. Zdá se, že Peano měl možnost seznámit se s Dedekindovou prací až v době, kdy jeho vlastní publikace byla v tisku. *Aritmetices principia* začíná seznamem čtyř základních symbolů a devíti axiómů. Čtyři axiómy se týkají symbolu rovnosti a pět dalších je dnes známo (možná v jiné podobě) jako Peanovy axiómy aritmetiky. V podobě z roku 1891 vypadaly takto

1. $1 \in N\,.$
2. $+ \in N \setminus N\,.$
3. $a, b \in N\,.\quad a+ \;=\; b+ :\supset .\quad a = b\,.$
4. $1- \in N+\,.$
5. $s \in K\,.\quad 1 \in s\,.\quad s+ \supset s : \supset .\quad N \supset s\,.$

Pro Peana přirozená čísla začínala jedničkou. První axióm stanoví, že jednička je přirozené číslo. Druhý axióm říká, že připíšeme-li symbol „+" za přirozené číslo, vznikne opět přirozené číslo (následník prvního čísla). Třetí axióm stanoví, že dvě přirozená čísla, která mají sobě rovné následníky, se sobě rovnají. Čtvrtý axióm říká, že jednička není následníkem žádného přirozeného čísla. Poslední axióm zasluhuje zvláštní pozornost. Je to axióm indukce: je-li *s* třída, která má za prvek jedničku a s každým prvkem do *s* patří i jeho následník, potom *s* obsahuje všechna přirozená čísla.

Dále se definují operace sčítání, odečítání, násobení, mocnění a dělení přirozených čísel a jsou dokázány některé věty z teorie čísel. Jsou zavedena celá, racionální a iracionální čísla a dokazují se některé věty o otevřených a uzavřených intervalech reálných čísel.

V práci *O pojmu čísla* z roku 1891, z níž jsme citovali axiómy, Peano srovnává své výsledky s Dedekindovými. Konstatuje, že Dedekind, který vycházel z pojmu řetězce, dospěl v podstatě ke stejným výsledkům. Peano podává navíc důkaz nezávislosti uvedených pěti axiómů. Jejich vyjádření se s vývojem Peanovy symboliky později ještě měnilo, ale brzo byly všeobecně uznávány jako axiómy aritmetiky přirozených čísel. V této práci najdeme první zmínku o velkém projektu, kterému Peano zasvětil dvě desetiletí. V posledních odstavcích čteme:

Bylo by užitečné shromáždit všechna známá tvrzení z určitých oborů matematiky a publikovat jejich sbírky. Omezíme-li se na aritmetiku, nedomníváme se, že by bylo obtížné vyjádřit taková tvrzení logickými symboly. Máme za to, že takové vyjádření by bylo přesné a navíc tak stručné, že všechna taková tvrzení k nějakému tématu by bylo možno vyjádřit na stejném počtu stran, jaký bychom potřebovali jen k soupisu literatury.

Na stránkách Rivista di Matematica začaly brzo vycházet takové sbírky tvrzení z různých částí matematiky. Peano je zasílal řadě matematiků se žádostí o připomínky a doplnění. Ucelené sbírky pak vydal samostatně pod názvem *Formulario Mathematico*. Během let vyšlo celkem pět přepracovaných vydání. Čtvrté vydání vyšlo francouzsky a obsahuje celkem devět kapitol věnovaných matematické logice, algebraickým operacím, aritmetice, teorii míry, teorii čísel a teorii množin. Jak napovídá název díla, jde spíše o soupis matematických formulí, který si neklade za cíl zdůraznit hlavní tvrzení a ukázat jejich důsledky. V některých oborech, například v logice, to ani nebylo možné. Tehdy byla řada „logických identit", ale k vytvoření bezesporného a úplného systému axiómů a odvozovacích pravidel bylo ještě hodně daleko. Nicméně použití logiky jako prostředku k vyjádření matematických tvrzení a rozvoj logiky samé, to byl jeden z hlavních motivů projektu.

V roce 1897 se v Curychu sešel první mezinárodní kongres matematiků. Organizační výbor navrhl, aby hlavní přednášky měli Felix Klein, Adolf Hurwitz, Henri Poincaré a Aurel Boleslav Stodola. Ze zdravotních důvodů nemohl A. B. Stodola, profesor ETH v Curychu, nabídku přijmout. Dnes, kdy se tolik mluví o potřebě pěstovat aplikace matematiky, stojí za to si připomenout, že pro přednášku o aplikované matematice na prvním kongresu matematiků byl jako řečník vybrán právě Slovák z Martina.

Výbor požádal Peana o čtvrtou přednášku. Peano promluvil o matematické logice a jejím uplatnění v projektu *Formulario*. Druhý kongres se konal v Paříži v roce 1900. David Hilbert na něm přednesl slavný seznam dvaceti tří problémů, který zařazuje otázku důkazu bezespornosti axiómů aritmetiky jako problém číslo dvě. V Paříži se také konal první filozofický kongres, na kterém si v otázkách logiky a filozofie věd získala dominující postavení italská škola: Peano, Burali-Forti, Padoa, Pieri, Vailati a Vacca. Tento dojem si odnesla řada účastníků kongresu. S Peanem se zde seznámil i Bertrand Russell. Jejich setkání mělo velký význam pro Russellův další vývoj; mohli bychom říci, že šlo o předání štafety. Kolem roku 1906, kdy Peano dokončil poslední verzi *Formulario Mathematico*, stává se vedoucí osobností matematické logiky Bertrand Russell. Ve zbývajících letech svého života se Peano věnoval vytváření a propagaci umělého jazyka Interlingua. Pracoval pro jeho úspěch se stejnou usilovností, s jakou se předtím věnoval logice. Peano zemřel v Turině 20. dubna 1932.

Jeho jméno se dnes nejčastěji spojuje s aritmetikou a s tzv. Peanovou křivkou, která vyplňuje plochu. Když v roce 1891 Peano sestrojil reálné funkce f_1, f_2 spojité na uzavřeném intervalu $I = [0, 1]$ takové, že množina všech dvojic $\langle f_1(x), f_2(x)\rangle$, $x \in I$ vyplnila čtverec $I \times I$, jeho výsledek zapůsobil jako bomba. Křivku definoval jako spojité zobrazení uzavřeného intervalu do roviny Camille Jordan a tuto definici najdeme ještě dnes v učebnicích teorie funkcí komplexní proměnné. Peanova křivka vyvrátila tehdejší domněnku, že — řečeno v moderní terminologii — křivka vyplní v rovině jen množinu míry nula. Tento výsledek byl důležitým mezníkem ve vývoji teorie dimenze a Felix Hausdorff ho označil za nejvýznamnější výsledek, jakého do té doby dosáhla teorie množin. V nedávné době ukázal Michal Morayne [7], že tehdejší domněnka je správná při téměř kterémkoli zesílení požadavku spojitosti (konečná variace, absolutní spojitost, existence derivace). Navíc ukázal zajímavou souvislost s teorií množin. Následující tvrzení,

„existují funkce f_1, f_2 spojité na celé reálné ose takové, že v každém bodě x má alespoň jedna z nich vlastní derivaci a hodnoty $\langle f_1(x), f_2(x)\rangle$ vyplní celou rovinu",

je ekvivalentní s hypotézou kontinua, tedy s tvrzením, že mohutnost množiny všech reálných čísel je první nespočetné kardinální číslo. Na jedné straně ekvivalence je „pochybná" hypotéza teorie množin a na druhé straně je pěkně učesané tvrzení matematické analýzy.

Podívejme se ještě, co přinesl další vývoj v aritmetice. Podrobnější rozbor Peanových axiómů ukazuje, že jde spíše o definici přirozených čísel v teorii množin než o samostatnou teorii. Je známo, že Peanovy axiómy definují v teorii množin přirozená čísla až na izomorfismus. První čtyři axiómy se týkají jednotlivých čísel, říkejme jim individua, a používají proměnné jen pro individua. Pátý axióm indukce se týká množin (tříd) přirozených čísel. Objevují se v něm proměnné pro množiny individuí. Přímočarý pokus oprostit aritmetiku od rámce (podstatně silnější) teorie množin vede k tomu, že chápeme Peanovy axiómy jako formule tzv. plné logiky druhého řádu, která používá proměnné pro individua i proměné pro množiny individuí. Daleko se však nedostaneme. Tarského věta o nedefinovatelnosti pravdy v aritmetice ukazuje, že neexistuje rekursivní axiomatika pro plnou logiku druhého řádu. Jinými slovy, pro žádnou axiomatiku neexistuje algoritmus, který by o libovolné formuli rozhodl, zda je či není axiómem. Ocitli jsme se v kuriózní situaci: máme pět axiómů pro přirozená čísla, ale nevíme, jaké jsou axiómy naší logiky. Nabízí se přirozené řešení, axiomatizovat aritmetiku v logice prvního řádu, jejíž axiómy jsou dobře známy a jejíž sémantika je dobře prostudována. Logika prvního řádu používá jen proměnné pro individua. Co však s axiómem indukce? V logice prvního řádu můžeme také mluvit o množinách individuí, ale jen o těch, které můžeme definovat nějakou formulí. Původní axióm indukce nahradíme tímto schématem formulí:

Pro každou formuli A a proměnnou x bude formule

(1) $$(A_x[0] \mathbin{\&} (\forall x)(A \rightarrow A_x[x + 1])) \rightarrow (\forall x) A$$

jeden axióm indukce.

Formule (1) má jednoduchou interpretaci: platí-li A, když za x dosadíme nulu, a pro každé x, když A platí pro x, platí také i pro $x + 1$, potom A platí pro každé x. Jazyk aritmetiky vedle obvyklých logických symbolů obsahuje symboly pro operace sčítání a násobení a konstanty 0, 1, které označují nulu (dnes je obvyklé ji považovat za přirozené číslo), a jedničku. Několik zřejmých tvrzení o operacích a uvedené schéma indukce, to je teorie (prvního řádu), které se říká Peanova aritmetika.

Není těžké ukázat, že vedle standardního modelu, kterým jsou přirozená čísla v teorii množin, má Peanova aritmetika i jiné neizomorfní modely. Jednoduchost této teorie jsme zaplatili kategoričností. Uvědomme si, že jeden axióm indukce (druhého řádu), který zastupuje kontinuum speciálních případů (tolik je množin přirozených čísel), byl nahrazen schématem indukce, které popisuje jenom spočetně mnoho případů. Vedle Peanovy aritmetiky se studuje i silnější teorie (ale opět prvního řádu), která má bohatší prostředky pro práci s množinami přirozených čísel. Z těchto důvodů se jí říká Aritmetika druhého řádu.

V roce 1930 ukázal Kurt Gödel, že Peanova aritmetika není úplná, neboť existují sentence, které nelze z axiómů ani dokázat, ani vyvrátit. Pěkný intuitivní popis Gödelova důkazu je v článku [3]. Až do nedávné doby bylo možno se domnívat, že neúplnost Peanovy aritmetiky se týká jen uměle sestrojených tvrzení. L. Kirby a J. Paris sestrojili v roce 1977 příklad tvrzení, které má přirozenou kombinatorickou interpretaci a je nerozhodnutelné v Peanově aritmetice.
Elegantní formu takového tvrzení – je to zesílení konečné verze Ramseyovy věty – nalezli J. Paris a L. Harrington [9]. Zbývalo ještě najít nějaké tvrzení teorie čísel, které je nerozhodnutelné v Peanově aritmetice. Nedávný výsledek Kirbyho a Parise [8] překonal i tuto bariéru. Hranice nerozhodnutelnosti se nečekaně přiblížila běžné matematické praxi. Seznamme se s jejich výsledkem.

Představme si, že konstruujeme nekonečné posloupnosti přirozených čísel

(2) $$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots .$$

tak, že a_1 je nám dáno a ostatní členy z něho počítáme takto: Je-li například $a_1 = 30$, odečteme jednotku a číslo $a_1 - 1 = 29$ vyjádříme v číselné soustavě o základu 2. Tedy

$$a_1 - 1 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0$$

a stejným způsobem vyjádříme i exponenty, exponenty exponentů atd.

Dostáváme

$$a_1 - 1 = 2^{2^{2^1}} + 2^{2^1} + 2^0 + 2^{2^1} + 2^0 .$$

Číslo a_2 vypočítáme tak, že na pravé straně předchozí rovnosti nahradíme každou dvojku trojkou, tedy

$$a_2 = 3^{3^{3^1}} + 3^{3^1} + 3^0 + 3^{3^1} + 3^0 .$$

Máme-li již vypočteno číslo a_n pro nějaké n, postupujeme obdobně. Číslo $a_n - 1$ rozvineme při základu $n + 1$ a číslo a_{n+1} vypočteme tak, že v daném rozvoji všude nahradíme $n + 1$ číslem $n + 2$.

Co lze říci o chování posloupností (2)? V teorii množin lze dokázat

$$(\forall a_1)(\exists n)(a_n = 0), \tag{3}$$

ale toto tvrzení není dokazatelné v Peanově aritmetice. Protože tvrzení (3) je pravdivé ve standardním modelu aritmetiky, není ani ve sporu s axiómy. Je to nerozhodnutelné tvrzení!

Peanova aritmetika byla donedávna považována za bezpečný základ teorie výpočtových procesů. Dnes je známa řada programů, jejichž správnost nelze v Peanově aritmetice dokázat. Začíná se prosazovat názor, že i některé dlouho odolávající problémy (například zda P = NP) jsou vlastně nerozhodnutelná tvrzení. Peanova aritmetika je dnes opět aktivním polem výzkumů a čekají se od ní důležité odpovědi.

Literatura

[1] R. Dedekind: *Was sind und was sollen die Zahlen?* (Anglický překlad ve sborníku [4]).

[2] G. Frege: *Begriffschrift, eine der aritmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens.* (Anglický překlad ve sborníku [4]).

[3] P. R. Halmos: *Logika od A do G.* Pokroky MFA *27* 1982, 93—101.

[4] J. van Heijenoort editor: *From Frege to Gödel: A Source book in Mathematical Logic 1879 to 1931.* Harvard University Press, Cambridge 1967.

[5] H. C. Kennedy: *Peano, Life and Works of G. Peano.* D. Reidel, Dordrecht 1980.

[6] F. A. Medvěděv: *Očerki istorii teorii funkcij dějstviteľnovo peremennovo.* Nauka, Moskva 1975.

[7] H. Morayne: *O rózniczkowalnosci funkcji Peano.* Preprint, Universita Wroclaw 1980.

[8] L. Kirby, J. Paris: *Accessible Independence Results for Peano Arithmetics.* Preprint, University of Manchester 1981.

[9] J. Paris, L. Harrington: *A Mathematical Incompletness in Peano Arithmetics, Handbook of mathematical logic.* J. Barwise Ed., 1133—1142. North Holland, Amsterdam 1977.

[10] J. Deborah, P. Young: *Independence results in computer science?* Proc. of the 12th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing 1980.

Život se stává krásnějším dvěma skutečnostmi: zabýváme-li se matematikou a přednášíme-li ji. V matematice není méně logiky a krásy než v šachové hře. Ale je u ní i jedna přednost: matematici mezi sebou nesoupeří o titul absolutního mistra.

M. Euve

Nechť mé práce nečte nikdo, kdo není matematik ... Není ve vědách žádné hodnověrnosti tam, kde nelze aplikovat žádnou z matematických věd a v tom, co nemá žádné souvislosti s matematikou.

Leonardo da Vinci