

# Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

---

Zdeněk Horák

Nové metody měření dilatace času

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 6 (1961), No. 6, 304--314

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/138131>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1961

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

uspořádanou množinou, která má dvě výše uvedené vlastnosti. (Tomu odpovídá např. okolnost, že k pojmu funkce místa lze dospět rozmanitými způsoby, jak již bylo na začátku připomenuto.) Touto otázkou se však zde zabývat nebudeme.

Tímto článkem uzavírám druhou část pojednání o algebraizaci míry a integrálu. V prvních dvou částech jsme si tedy probrali pojem somatu, měrové funkce a funkce místa. Pomocí těchto pojmů zavedeme v třetí části pojem integrálu.

## NOVÉ METODY MĚŘENÍ DILATACE ČASU<sup>1)</sup>

ZDENĚK HORÁK, Praha

Jedním z hlavních rysů Einsteinovy teorie relativnosti je poznatek, že čas není veličinou absolutní, že jeho běh zjišťovaný měřením závisí na podmínkách, ve kterých měření času konáme. Zpomalení chodu hodin se všeobecně nazývá *dilatací času* a tento jev lze pozorovat za různých podmínek, které lze formálně rozdělit do tří skupin:

1. *Inerciální dilatace času* je běžně známá pod jménem *Lorentzova dilatace*. Pozorujeme ji v inerciálních soustavách (rovnoměrně přímočaře se pohybujících vzhledem k stálícím) a jeví se takto: Pozorovatel, který srovnává časové údaje  $t_v$  hodin, které se vzhledem k němu pohybují rychlostí  $v$  stálou co do velikosti i směru, s údaji  $t$  hodin, které jsou vzhledem k němu v klidu, zjišťuje, že pohyblivé hodiny jdou pomaleji v poměru

$$\frac{t_v}{t} = \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (1)$$

2. *Neinerciální dilatace času* vzniká v neinerciálních soustavách (jejichž pohyb vzhledem k stálícím je nesetrvačný, tj. není rovnoměrný přímočarý) vlivem setrvačných sil, které podle Einsteinovy teorie jsou skutečnými silami charakterizovanými tzv. dynamickým potenciálem  $\chi$ . Zpomalení chodu hodin v poli setrvačných sil proti chodu hodin v inerciální soustavě (kde  $\chi = 0$ ) je dáno poměrem

$$\frac{t_x}{t} = \sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2}}. \quad (2)$$

Intenzita  $i$  „setrvačného pole“, která je podobně jako v gravitačním poli rovna síle dělené hmotou, tedy rovna zrychlení, souvisí s dynamickým potenciálem vztahem

$$i = - \text{grad } \chi. \quad (3)$$

Tak např. v soustavě pohybující se vzhledem k stálícím se stálým přímočarým zrychlením  $a$  ve směru osy  $x$  je

$$i_x = a, \quad x = \frac{1}{2} at^2, \quad \chi = -ax, \quad i_x = - \frac{\partial \chi}{\partial x}. \quad (4)$$

<sup>1)</sup> Přednáška proslavená pro pobočku JČMF Středočeský kraj a pro ÚDVU v Praze 5. května 1961.

Protože však  $v = at$ , je též

$$\chi = -\frac{1}{2}v^2. \quad (5)$$

Podobně při rovnoměrné rotaci úhlovou rychlostí  $\omega$  je odstředivé zrychlení ve vzdálenosti  $r$  od osy rotace

$$i_r = a = r\omega^2, \quad \chi = -\frac{1}{2}r^2\omega^2, \quad i_r = -\frac{\partial\chi}{\partial r}, \quad (6)$$

a protože  $v = r\omega$ , je opět

$$\chi = -\frac{1}{2}v^2. \quad (7)$$

Dosazením z (5) nebo (6) do (2) sledujeme, že i neinerciální dilatace času při proměnné rychlosti  $v$  je dána stejným vzorcem (1) jako inerciální dilatace při stálé rychlosti  $v$ . Je to v soulase se základním předpokladem Einsteinovy teorie, že zrychlení hodin vzhledem k stálým nemá vliv na jejich chod.

3. *Gravitační dilatace času* je způsobena účinkem gravitačního pole. Podle Einsteinova principu ekvivalence je dilatace času v místě s gravitačním potenciálem  $U$  vzhledem k místu s nulovým potenciálem  $U = 0$  dána vzorcem obdobným (2)

$$\frac{t_U}{t} = \sqrt{1 + \frac{2U}{c^2}}, \quad (8)$$

při čemž opět intenzita gravitačního pole ++ +

$$I = -\text{grad } U.$$

Tak např. v homogenním gravitačním poli intenzity  $g$  je

$$U = -gh, \quad i_h = -\frac{\partial U}{\partial h} = g \quad (9)$$

a v okolí homogenní koule hmoty  $M$  ve vzdálenosti  $r$  od středu

$$U = -\frac{kM}{r}, \quad i_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{kM}{r^2}, \quad (10)$$

kde  $k$  je gravitační konstanta Newtonova

$$k = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}. \quad (11)$$

#### RUDÝ POSUV

Poměr chodu hodin „v pohybu“ k chodu hodin „v klidu“ se liší podle hořejších vzorců o veličiny, které mají velikost stejného řádu jako čtverec poměru  $v/c$ . Proto je dilatace času „jev druhého řádu“, který je při rychlostech  $v \ll c$  nesnadno zjištělný při běžné přesnosti fyzikálních měření. Rozhodně není myslitelné uvést do dostatečně rychlého pohybu přesné hodiny a udržet jejich chod beze změny s takovou přesností, jakou by vyžadovalo zjištění očekávané dilatace času. Fyzika má však prostředek k velmi přesnému měření času a to jsou děje probíhající v molekulách, v elektronovém obalu atomů i v jejich jádře. Kmitů atomů v molekulách se již využilo ke konstrukci tzv. atomových hodin, jejichž chod je regulován kmitu atomu N v molekule čpavku  $\text{NH}_3$ . Kvantové přechody elektronů obíhajících kolem jádra atomu určují kmitočty vysílaného elektromagnetického záření optického a rentgeno-

vého a konečně kvantové přechody nukleonů v samých jádrech určují přesně definované frekvence záření  $\gamma$ .

Myšlenku využít změny frekvence záření vydávaného velmi rychlými anodovými paprsky k zjištění dilatace času vyslovil ostatně sám Einstein i švýcarský fyzik Ritz již na počátku vývoje teorie relativnosti. Přece však trvalo přes 30 let, než bylo možno tuto myšlenku uskutečnit, jak ukážeme dále. Mnohem dříve se podařilo aspoň zhruba ověřit existenci dilatace času v gravitačním poli Slunce. Poměr frekvencí záření stejných atomů na povrchu Slunce a na povrchu Země se vypočte podle (8) ze vzorce

$$\frac{\nu_s}{\nu_z} = \sqrt{\frac{1 + 2U_s/c^2}{1 + 2U_z/c^2}} \approx 1 + \frac{1}{c^2}(U_s - U_z). \quad (12)$$

Dosažením známých hodnot

$$M_s = 1,98 \cdot 10^{30} \text{ kg}, \quad r_s = 6,95 \cdot 10^8 \text{ m}; \quad M_z = 5,96 \cdot 10^{24} \text{ kg}, \\ r_z = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$$

do (10) zjistíme, že potenciál na zemském povrchu

$$U_z = 3 \cdot 10^{-4} U_s,$$

takže relativní změna frekvence je přibližně rovna

$$\frac{\nu_s - \nu_z}{\nu_z} = \frac{1}{c^2} U_s = -2,12 \cdot 10^{-6} = -\frac{\lambda_s - \lambda_z}{\lambda_s}. \quad (13)$$

Spektrální čáry vyzařované atomy na Slunci mají tedy vlnové délky  $\lambda$  o dvě miliontiny větší než na Zemi a jsou tedy posunuty nepatrně k červenému kraji spektra. Tento gravitační *rudý posuv* spektrálních čar byl skutečně ve slunečním spektru zjištěn aspoň kvalitativně a později s větší spolehlivostí ve spektru těžké družice Siriovy. Teprve v nejnovější době se podařilo zjistit rudý posuv také na zemském povrchu, jak ukážeme dále.

#### LABORATORNÍ OPTICKÉ METODY

Právě zmíněná metoda měření rudého posuvu se zdá být snadno proveditelná i při zjišťování inerciální dilatace Lorentzovy. Při velmi rychlém pohybu zdroje záření se však projeví známý Dopplerův jev, takže frekvence záření pozorovaná ve směru skloněném ke směru rychlosti  $v$  zdroje o úhel  $\alpha$  je dána známým klasickým vzorcem

$$\nu_{kl} = \frac{c}{c - v \cos \alpha} \nu_0 = \frac{\nu_0}{1 - \frac{v \cos \alpha}{c}}, \quad (14)$$

kde  $\nu_0$  je frekvence zdroje v klidu (vzhledem k pozorovateli). Vlivem Lorentzovy dilatace času přejde ovšem (14) v relativnostní vzorec

$$\nu_{rel} = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v/c \cdot \cos \alpha} \nu_0, \quad (15)$$

který se při pozorování ve směru kolmém k rychlosti zdroje ( $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ ) zjednoduší ve tvar

$$\nu_{\perp} = \sqrt{1 - v^2/c^2} \nu_0 \approx (1 - \frac{1}{2}v^2/c^2) \nu_0. \quad (16)$$

Tento vzorec vyjadřuje existenci tzv. *transverzálního Dopplerova jevu*, který je vlastně jen důsledkem dilatace času a je tedy efektem 2. řádu na rozdíl od klasického Dopplerova jevu 1. řádu, který opravdu vymizí jen při přesně kolmém pozorování.

I při velmi nepatrné odchylce směru pozorování od kolmého směru překrývá tento klasický (podélný) efekt rudý posuv transverzálního jevu, který se tím stává těžko měřitelný. Z (15) a (16) plyne totiž

$$\frac{1}{v_0} \frac{\partial v_{rel}}{\partial \alpha} = - \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \alpha\right)^2} \frac{v}{c} \sin \alpha \approx - \frac{v}{c} \sin \alpha \quad (17)$$

$$\frac{v_{\perp} - v_0}{v_0} = - \frac{1}{2} v^2/c^2;$$

např. pro  $v/c = 4 \cdot 10^{-3}$  vychází

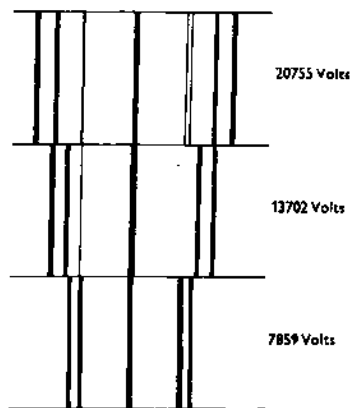
$$\frac{1}{v_0} \frac{\partial v_{rel}}{\partial \alpha} \approx - 4 \cdot 10^{-3} \sin \alpha, \quad \frac{v_{\perp} - v_0}{v_0} = - 8 \cdot 10^{-6}, \quad (18)$$

takže již při odchylce směru pozorování o 0,1 stupně od kolmého směru se vliv klasického jevu téměř vyrovná s vlivem jevu transverzálního.

Tuto zásadní obtíž, která dlouho bránila provedení pokusu navrženého již Einsteinem, překonali teprve v r. 1938 IVES a STILWELL, kteří pozorovali spektrum vydávané molekulárními ionty vodíku, urychlenými napětím až 20 kV, ve dvou opačných směrech tečných k rychlosti iontů. Obě pozorování přivedli ovšem užitím zrcátka společně na štěrbinu spektrografu. Pro tečné směry je totiž  $\alpha = 0, \pi$ , takže  $\sin \alpha = 0$  a parciální derivace (17) má při malém odklonu od tečného směru velmi nepatrnou hodnotu. Pozorování v tečných směrech způsobilo ovšem další nesnáž, neboť nestejná rychlost iontů ve svazku anodových paprsků se projevila tzv. Dopplerovým rozšířením spektrálních čar. Tuto druhou nesnáž odstranili Ives a Stilwell užitím DEMPSTEROVY anodové trubice, která dává velmi přibližně monoenergetický svazek. Spektrální čáry vyzářované takovým svazkem iontů jsou velmi ostré (s malou Dopplerovou šířkou) a jejich posunutí se dá určit s dostatečnou přesností. Ives a Stilwell tedy vlastně měřili podélný Dopplerův jev ve dvou opačných směrech, takže dostali dvě soustavy čar posunutých na obě strany od „klidové“ polohy (obr. 1). Z rov. (15) plyne pro  $\alpha = 0, \alpha' = \pi$

$$\frac{c}{v} = \lambda = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \lambda_0, \quad (19)$$

$$\lambda' = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \lambda_0,$$



Obr. 1. Spektrogramy s oboustranně posunutými čarami

odkud snadno odvodíme, že „těžiště“ obou opačně posunutých čar

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda + \lambda'}{2} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \Delta\lambda = \bar{\lambda} - \lambda_0 \approx \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \lambda_0 \quad (20)$$

odpovídá právě rudému posuvu čáry vzniklému transverzálním Dopplerovým jevem. Protože užitý WOODův mřížkový spektrograf dával normální spektrum, bylo možno zjistit posuv  $\Delta\lambda$  s dostatečnou přesností. Jako střed provedených měření vyšla při napětí 18 kV hodnota posuvu  $\Delta\lambda = 0,0468 \text{ \AA}$  velmi blízká hodnotě  $0,0472 \text{ \AA}$  plynoucí z Lorentzovy dilatace času pro rychlost  $1300 \text{ km s}^{-1} = 0,004c$ . Této rychlosti molekulárního iontu  $\text{H}_2^+$  o hmotě  $3,3 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  skutečně přísluší energie  $\frac{1}{2}m_0v^2 = 2,9 \cdot 10^{-15} \text{ J} = 1,8 \cdot 10^4 \text{ eV}$ , kterou můžeme počítat z klasického vzorce, protože hmota za pohybu se tu liší od klidové hmoty  $m_0$  jen o 0,001%.

Tak byl poprvé bezpečně ověřen rudý posuv při inerciálním pohybu zdroje, a tím i Lorentzova dilatace času byla ověřena s uspokojivou přesností.

Pokud se týká neinerciální dilatace času, nebyla až do minulého roku vůbec experimentálně vyšetřována. Ani moderní ultracentrifugy, jimiž se dosahuje odstředivých polí až stamilionkrát silnějších, než je gravitační pole na zemském povrchu, nedávají možnost přímého měření rudého posuvu spektrálních čar způsobeného v optických spektrech vlivem odstředivých sil.

Proto jsem již před časem uvažoval o možnosti měřit neinerciální dilataci času na kruhových urychlovačích. Není sporu, že na dnešních velkých urychlovačích se dosahuje tak silných odstředivých polí, že by v nich bylo možno zásadně měřit neinerciální dilataci s velkou přesností. Jde ovšem o splnění jistých konkrétních požadavků, které podmiňují úspěšné provedení takových měření. Proto zde uvedu jen stručný popis pokusu, který by byl podle předběžně zjištěných charakteristik našeho čl. cyklotronu v ÚJV zásadně proveditelný na tomto urychlovači.

Abychom mohli i zde užít optické metody, bylo by třeba urychlovat na cyklotronu ionty, které vydávají optické záření při přeskupení oběžných elektronů, tedy nikoli samotná jádra, jako jsou protony, deutrony a částice  $\alpha$ . Nejvhodnější by byly patrně ionty s nepříliš malým specifickým nábojem, tedy např. molekulární ionty lehkého vodíku nebo jednou ionizované lithium  $\text{Li}^+$ . Jmenované vodíkové ionty mají stejný kladný náboj jako deuterony a velmi přibližně i stejnou hmotu. Proto by bylo možno je urychlit na energii asi 13 MeV, které by dosáhly asi při rychlosti  $v = 0,114c$ , takže rudý posuv by podle (2) a (7) měl relativní hodnotu zhruba 0,65%. Ionům  $\text{Li}^+$  by náš cyklotron udělil maximální rychlost asi  $v = 0,034c$ , které přísluší energie 3,7 MeV. Očekávaný poměrný rudý posuv by tedy byl 0,06%. V obou případech by tedy bylo zásadně možno rudý posuv změřit běžným spektrografem s uspokojivou relativní přesností.

Podmínkou provedení těchto měření by ovšem byla možnost chránit fotografickou emulzi před silným zářením  $\gamma$ . Z tohoto hlediska by bylo výhodnější provádět měření nikoli ve vlastní urychlovací komoře, ale v magnetickém poli odkláněcího magnetu, které je ovšem několikrát slabší než při urychlování. Tím by se také zmenšil nepříznivý vliv skutečnosti, že svazek iontů není dosti monoenergetický. Odchyłky v urychlovací komoře činí asi  $\pm 10\%$ , kdežto mezi póly odkláněcího magnetu asi  $\pm 2$  až  $5\%$ . Hlavní experimentální podmínkou by však bylo odlišení klasického Dopplerova efektu, který se projevuje mnohem silněji než dilatace času; ta by se měla pozorovat ve směru přesně kolmém k iontovému svazku. Jak už bylo uvedeno, Ives a Stilwell při svých měřeních transverzálního Dopplerova jevu odstranili tuto obtíž tím, že pozorovali světlo v obou tečných směrech (ve směru pohybu iontů a proti pohybu iontů) a určovali „těžiště“ opačně posunutých čar. Této metody by se dalo

výhodně použít právě při měření v odkláněcím magnetu, kde je svazek zakřiven a kde ionty podléhají vlivu odstředivých sil.

K tomu dodávám, že jsem uvažoval také o možnosti zjistit dilataci času v odstředivých polích ze změny energie radioaktivního záření  $\gamma$ . Avšak dnešní spektrografy záření  $\gamma$  nemají dostatečnou rozlišovací schopnost k přímému zjištění tohoto efektu. Teprve v poslední době se ukázala možnost přesného měření rudého posuvu právě ve spektru záření  $\gamma$  metodou, která je založena na tzv. MÖSSBAUEROVĚ jevu. Vzhledem k jejímu významu popíšeme ji podrobněji.

#### METODA JADERNÉ REZONANČNÍ ABSORPCE

Radioaktivní zářič  $\gamma$  vydává fotony tohoto záření při přechodu jádra ze vzbuze-  
ného stavu s vyšší energií do základního stavu. Dopadá-li toto záření na látku  
stejněho druhu složenou z atomů se stejnými jádry, jsou fotony význačně  
pohlcovány těmito jádry, která tím přecházejí ze základního stavu do stavu  
vzbuze-  
ného. Tato rezonanční absorpce se však obvykle narušuje vzájemným  
působením fotonu s jádrem, kterým je emitován nebo absorbován. Tak při  
emisi musí zůstat vektorový součet hybností jádra a fotonu stálý, a proto dostane  
jádro zpětný impuls. Tím ovšem ztratí foton část  $R$  své energie  $E_0$ , rovné  
rozdílu energií ve vzbuze-  
ném a základním stavu jádra. Je-li  $\nu_0$  frekvence  
záření, má foton energii a hybnost

$$E_0 = h\nu_0, \quad p_0 = \frac{h\nu_0}{c} = \frac{E_0}{c}. \quad (21)$$

Při emisi musí tedy volné jádro hmoty  $M$  získat hybnost

$$Mv = -\frac{E_0}{c}, \quad (22)$$

a tím i kinetickou energii

$$R = \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{E_0^2}{2Mc^2}. \quad (23)$$

O tuto energii se zmenší energie vyzářeného fotonu, takže má nižší frekvenci

$$\nu = \nu_0 \left( 1 - \frac{E_0}{2Mc^2} \right). \quad (24)$$

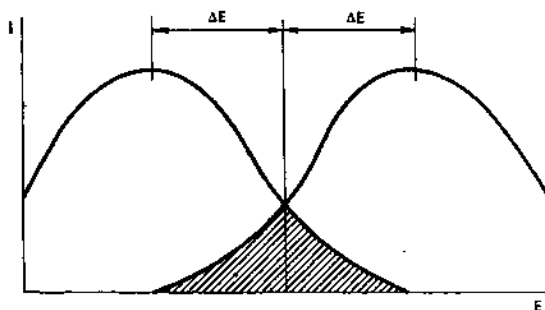
Podobná změna frekvence nastává i při absorpci jádrem; tím vzniká posunutí  
spektrální čáry emisní proti čáře absorpční. Volné jádro v základním stavu  
může totiž rezonančně absorbovat jen foton o energii rovné energii  $E_0$  vzbuzeného  
stavu. Avšak část  $R$  energie se spotřebuje při absorpci fotonu na udělení  
hybnosti (22) jádru. Proto může být rezonančně pohlcen jen foton, který  
má před setkáním s jádrem energii  $E_0 + R$ , takže relativní posunutí emitované  
a absorbované čáry způsobené zpětným odrazem jádra je podle (23) a (24)

$$\frac{2R}{E_0} = 2 \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = \frac{E_0}{Mc^2}.$$

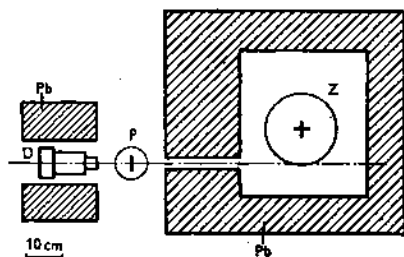
Rovná se poměru excitační energie k celkové energii jádra.

V oboru optického záření je toto posunutí malé proti přirozené šířce čáry, avšak fotony záření  $\gamma$  mají značné energie a přirozená šířka čar je velmi malá. Proto se zpětným odrazem jádra poruší podmínka rezonance.

Tak by tomu bylo, kdyby jádra byla před emisí nebo absorpcí v klidu. Vlivem tepelného pohybu jader se však původně velmi ostré čáry rozšiřují následkem Dopplerovy změny frekvence. Tímto rozářením emisní i absorpční čáry se může pro část frekvencí rušit vliv zpětného odrazu jader a tak znovu umožnit absorpci fotonů. Při běžných laboratorních teplotách se to však stane



Obr. 2. Vzájemná poloha a tvar emisní a absorpční čáry při teplotě  $T = 300^\circ\text{K}$



Obr. 3. Schéma Mössbauerova pokusu

jen pro malou část fotonů, a proto se emisní a absorpční čáry jen nepatrně překryjí. Proto je účinný průřez pro rezonanční absorpci neměřitelně malý. V některých případech se ovšem dá rezonanční absorpci pozorovat při zvýšené teplotě, jak ukázal MALMFORS. Na obr. 2 vidíme průběh intenzity emisní a absorpční čáry v závislosti na energii  $E$  kvant  $\gamma$  odpovídajících přechodu jádra izotopu Ir 191 ze vzbuzeného stavu s energií  $E_0 = 129 \text{ keV}$  do stavu základního. Emisní čára je posunuta o  $\Delta E = R$  vlevo, absorpční čára o stejnou délku vpravo.

Uvedené výsledky jsme odvodili za předpokladu, že jádra jsou volná a mohou se poddat zpětnému nárazu. Avšak jádra bývají chemicky vázána buď v molekulách, nebo v krystalech a na druhu této vazby bude patrně záviset energie ztracená fotonem. Energie převzatá jednotlivými jádry vyzářující i pohlcující látky se obvykle projeví zvýšením její vnitřní energie. U pevných látek se však může stát, že pro některá kvanta  $\gamma$  není příslušné zvýšení vnitřní energie možné. Celková vnitřní energie monokrystalu daná kmitů krystalové mřížky je rovna součtu energií fotonů, které podléhají kvantování. Proto může krystal přijímat energii od fotonů jen po jistých kvantech, která jsou závislá na pravděpodobnosti vzbuzení kmitů krystalové mřížky. To se sice neuplatňuje při teplotách vysokých proti Debyeově teplotě krystalu, avšak s klesající teplotou přecházejí zvláště vysokofrekvenční oscilátory v krystalu do základních stavů, v nichž už nemohou odevzdávat energii. Za jistých podmínek jsou pak možné takové jaderné přechody, kterým neodpovídá žádná přípustná změna vnitřní energie krystalu. Pak ovšem se zpětný impuls fotonu přeneše na krystal jako celek. Hmotnost krystalu je však nesmírně velká proti hmotě jádra, a foton je proto vymrštěn bez ztráty energie; podobně při pružném rázu na těžkou desku odskočí kulička s prakticky nezmenšenou rychlostí.

Takové „bezodrazné“ procesy emisní a absorpční objevil právě Mössbauer r. 1958 nejprve u jádra Ir 191, které při kvantovém přechodu s energií  $E_0 =$

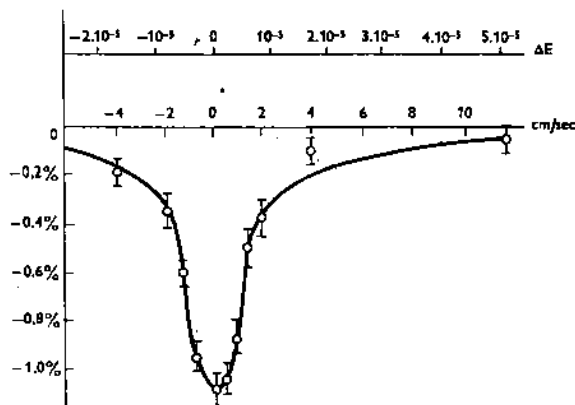


= 129 keV vyšle foton s plnou energií  $E_0$ , jehož spektrální čára má velkou intenzitu a velmi nepatrnou přirozenou šířku

$$\Gamma = 4,6 \cdot 10^{-6} \text{ eV}. \quad (25)$$

Uspořádání pokusu je znázorněno na obr. 3. Iridiový zářič  $Z$  je v rotujícím kryostatu udržován na absolutní teplotě  $T = 88^\circ\text{K}$ . Olověným krytem propuštěný rovnoběžný svazek fotonů prochází iridiovým pohlcovačem  $P$  téže teploty a detektorem  $D$

se měří intenzita propuštěného záření, která se srovnává s intenzitou  $I^{P^0}$  propuštěnou stejně silnou vrstvou platiny. Velká ostrost spektrální čáry způsobuje, že i malá relativní rychlost několika  $\text{cm s}^{-1}$   $Z$  vzhledem k  $P$  se projeví znatelným zeslabením absorpce. Na obr. 4 vidíme průběh intenzity  $I^r$  propuštěné Ir 191 ve srovnání s intenzitou  $I^{P^0}$  propuštěnou platinou v závislosti na relativní rychlosti zářiče a pohlcovače. Metoda je velmi citlivá na rozladění „oscilátoru“ a „rezonátoru“ způsobené klasickým Dopplerovým jevem, protože relativní šířka čáry je



Obr. 4. Závislost rezonanční absorpce na vzájemné rychlosti zářiče a pohlcovače

$$\Gamma/E_0 = \frac{4,6 \cdot 10^{-6}}{129 \cdot 10^3} \approx 4 \cdot 10^{-11}. \quad (26)$$

Lze však zjistit ještě změnu absorpce příslušnou vzájemnému posunutí čar o 1% této šířky, tedy relativní změnu energie řádu  $10^{-12}$ .

Teorii Mössbauerova jevu podal jednak jeho objevitel, jednak F. L. ŠAPIRO. Mössbauerův jev byl zjištěn a proměřen i u řady dalších izotopů, z nichž Fe 57 vyniká zvláště vysokou ostroostí čáry  $\gamma$  přechodu 14,4 keV s relativní šířkou

$$(\Gamma/E_0)_{\text{Fe } 57} = 3 \cdot 10^{-13}. \quad (27)$$

Tento kvantový přechod je posledním stupněm přeměny izotopu  $^{57}_{27}\text{Co}$ , který záchytem elektronu  $K$  přechází v izotop  $^{57}_{26}\text{Fe}$ . Ještě mnohem ostřejší je čára  $\gamma$  přechodu 93 keV izotopu Zn 67, který vzniká záchytem  $K$  z  $^{67}_{31}\text{Ga}$ . Relativní ostrosti

$$(\Gamma/E_0)_{\text{Zn } 67} = 5 \cdot 10^{-14} \quad (28)$$

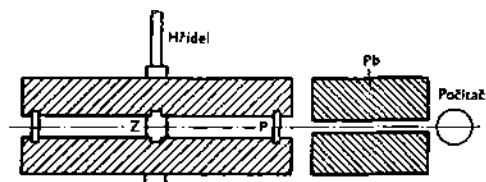
nemohlo se dosud využít, protože se zatím podařilo zjistit jen velmi slabou rezonanční absorpci v Zn 67.

U těchto izotopů by tedy bylo možno konstatovat i mizivě nepatrné poměrné změny frekvence  $3 \cdot 10^{-16}$  a  $5 \cdot 10^{-18}$ .

Tato úžasná citlivost Mössbauerovy metody, které nikdy před tím nebylo ani přibližně dosaženo, se přímo vnučuje k experimentálnímu zkoumání

všech efektů, které se projevují nepatrnou změnou frekvence elektromagnetického záření. Pokud jde o klasický (podélný) Dopplerův jev, byla Mössbauerova metoda prověřena přímo prvním jeho pokusem, jak ukazuje obr. 4.

V r. 1960 užila Mössbauerovy metody bezodrazné rezonanční absorpce záření  $\gamma$  skupina pracovníků v britském výzkumném ústavu atomové energie v Harwellu k ověření principu ekvivalence. Tito pracovníci měřili rudý posuv čáry 14,4 keV ve spektru  $\gamma$  izotopu Fe 57 jednak v poli odstředivých sil, jednak



Obr. 5. Měření rudého posuvu v rotující soustavě

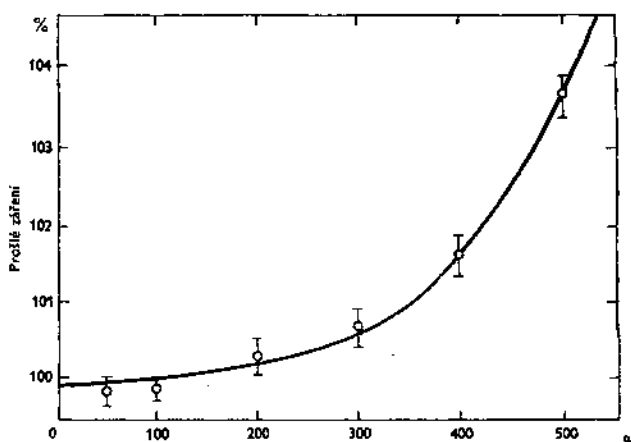
v gravitačním poli zemském. V prvním případě upravili pokus (podle obr. 5) takto: Mezi dvěma duralovými kotouči upevněný železný váleček Z průměru  $2R_2 = 8$  mm byl zdrojem záření  $\gamma$ , které bylo absorbováno železnou fólií P obohacenou 50% Fe 57 nanesenou na lucitový prstenec průměru  $2R_1 = 132,8$  mm, který byl rovněž souose upevněn mezi duralovými kotouči. Zářič i pohlcovač byly pak uvedeny do rotace až  $500 \text{ Hz} = 30\,000 \text{ ot/min}$ . Vzájemné posunutí emisní a absorpční čáry má podle (2), (6) a (7) poměrnou teoretickou hodnotu

$$\sqrt{\frac{1 + 2\chi_2/c^2}{1 + 2\chi_1/c^2}} - 1 \approx \frac{1}{c^2}(\chi_2 - \chi_1) = \frac{1}{2c^2}(R_1^2 - R_2^2)\omega^2 = 2,44 \cdot 10^{-20} \omega^2, \quad (29)$$

o kterou se energie emisní a absorpční čáry od sebe vzdálí. Tím se ovšem zmenší absorpce a záření  $\gamma$  měřené detektorem zesílí.

Počet detegovaných kvant  $\gamma$  roste s úhlovou rychlostí rotace, a to podle teoretické křivky vypočtené podle vzorce (29) na základě známého rozložení intenzity v emitované čáře a znázorněné na obr. 6 plně vytaženou čarou. Experimentální hodnoty, vyjádřené v procentech hodnot pozorovaných za klidu ( $\omega = 0$ ), jsou znázorněny body s úsečkami vyznačujícími náhodné chyby měření a jsou zřejmě v dobré shodě s teorií.

Velká relativní ostrost čáry 14,4 keV izotopu Fe 57 dávala naději, že se podaří experimentálně zjistit rudý posuv i v zemském gravitačním poli, způsobený potenciálním rozdílem mezi hladinami s dosti malým výškovým rozdílem. V Harwellu skutečně provedli tato ne snadná měření tak, že zářič  $\gamma$  umístili ve výšce pouhých 12,5 m nad pohlcovačem.



Obr. 6. Závislost počtu prošlých kvant na rychlosti rotace

vačem. Zářič byl vytvořen nanesením Co 57 na železnou destičku a pohlcovačem byla železná fólie. Teoretický poměrný posuv je podle (8) a (9) v tomto případě

$$\frac{gh}{c^2} = 1,36 \cdot 10^{-15}$$

a očekávaná poměrná změna intenzity propuštěného záření  $3,9 \cdot 10^{-4}$ . Naměřená změna byla sice jen o 4% menší, avšak nejistota způsobená statistickým kolísáním pulsů během 250 hodin činila 45%.

Tento pokus podrobili kritice R. V. POUND a G. A. REBKA z Harvardské university a upozornili na některé závažné vlivy, které mohly znehodnotit celý výsledek. Na základě vlastních měření došli k názoru, že podstatný vliv má nestejná teplota zářiče a pohlcovače. Teplotní rozdíl  $0,6^\circ\text{C}$  by sám způsobil stejně velký posuv čar jako celý zjišťovaný efekt. Proto tito autoři pokládají harwellské pokusy za málo přesvědčivé. Popisují vlastní měření, která prováděli při výškovém rozdílu 21 m. Přitom opakovali pokusy znovu po záměně zářiče a pohlcovače, takže spojením obou měření dosáhli rudého posuvu jako při dvojnásobném výškovém rozdílu 42 m. Zpracováním všech dat a provedením korekcí, zejména vzhledem k nestejně teplotě zářiče a pohlcovače, kterou pečlivě měřili, získali poměrný posuv  $(5,13 \pm 0,51) \cdot 10^{-15}$ , který se liší od teoretické hodnoty  $4,92 \cdot 10^{-15}$  jen o 4%. Autoři doufají, že zlepšením podmínek pokusu se jim podaří zvýšit spolehlivost a přesnost měření.

Je třeba zdůraznit, že popsaná měření rudého posuvu v odstředivém a gravitačním poli jsou prvním experimentálním ověřením obecné teorie relativity na Zemi. Zdá se však, že Mössbauerova metoda bezodrazné rezonanční absorpce poskytuje možnost dalších závažných pokusů. Tak např. bylo zjištěno, že šífka Mössbauerovy čáry Fe 57 je mnohem větší než přirozená šífka. To je možno vysvětlit tím, že emitující a absorbující jádra jsou orientována náhodně a že rozšíření čáry je způsobeno vnějšími perturbancemi energetických hladin v jádře. COCCONI a SALPETER vyslovili domněnku, že „posuvy“ atomových a jaderných hladin mohou být způsobeny nesymetrickým rozložením hmot v naší galaxii. Podle Einsteinovy teorie je totiž setrvačnost těles podmíněna celkovým rozložením hmot ve vesmíru, a proto při nestejně rozložením hmot v různých směrech od tělesa by mělo mít těleso různou setrvačnost. To by mělo za následek, že setrvačná hmota tělesa by při pohybu po spojnici s těžištěm galaxie byla větší než při pohybu kolmém k této spojnici. Pokusy, které provedli výše uvedení autoři i jiní badatelé, nepotvrdily však zatím očekávanou „anizotropii setrvačnosti“. Zdá se, že rozšíření čáry Fe 57 je z největší části způsobeno jinými vlivy.

Shrňme-li výsledky všech popsaných měření, vidíme, že některá přímo potvrzují existenci dilatace času v uspokojivém souhlasu s teorií, výsledky jiných měření jsou méně spolehlivé nebo méně přesné, ale v žádném případě se nedošlo ke sporu s teorií. To lze pokládat za další důvod pro zásadní správnost speciální i obecné teorie relativity.

#### Literatura

- [1] ST. JOHN: *Astrophys. Journ.* 67, 195 (1928).
- [2] W. ADAMS: *Proc. Nat. Acad.* 11, 382 (1925).
- [3] H. E. IVES, G. R. STILWELL: *J. Opt. Soc. Am.* 28, 215 (1938).
- [4] K. G. MALMFORS: *Ark. Fysik* 6, 49 (1953).

- [5] R. L. MÖSSBAUER: Uspechi fizičeskich nauk LXXII, 658 (1960).  
 [6] R. L. MÖSSBAUER: Z. Phys. 151, 124 (1958).  
 [7] F. L. ŠAPIRO: Uspechi fizičeskich nauk LXXII, 685 (1960).  
 [8] H. J. HAY, I. P. SCHIFFER, T. E. CRANSHAW, P. A. EGELSTAFF: Phys. Rev. Letters 4, 165 (1960).  
 [9] T. E. CRANSHAW, J. P. SCHIFFER, A. B. WHITEHEAD: Phys. Rev. Letters 4, 163 (1960).  
 [10] R. V. POUND, G. A. REBKA, JR.: Phys. Rev. Letters 4, 357 (1960).  
 [11] G. COCCONI, E. E. SALPETER: Phys. Rev. Letters 4, 176 (1960).  
 [12] C. W. SCHERWIN, H. FRAUNFELDER, E. L. GARWIN, E. LÜSCHER, S. MARGULIES, R. N. PEACOCK: Phys. Rev. Letters 4, 399 (1960).

## O NĚKTERÝCH PROBLÉMECH SOUVISÍCÍCH S KARDINÁLNÍ ARITMETIKOU

MIROSLAV NOVOTNÝ, Brno

1. V klasické teorii množin byla aritmetika kardinálních čísel budována odděleně od aritmetiky ordinálních čísel. Americký matematik G. BIRKHOFF vybudoval teorii obecnější<sup>1)</sup> tak, že definoval kardinální součet, součin a mocninu a ordinální součet, součin a mocninu pro libovolné dvě uspořádané množiny. Ukázalo se přitom, že většina pravidel platných v aritmetice kardinálních i ordinálních čísel zůstává zachována. Birkhoffova zobecněná aritmetika umožňuje „počítat“ i s objekty, které do rámce klasické aritmetiky kardinálních i ordinálních čísel nezapadají.

V tomto článku si všimneme kardinálních operací a některých problémů, které s nimi souvisí.

Základním pojmem Birkhoffovy zobecněné aritmetiky je pojem uspořádané množiny. Množina  $A$  se nazývá *uspořádaná*, když je v ní definována binární relace  $\leq$ , která má tyto vlastnosti:

1. Pro každé  $x \in A$  platí  $x \leq x$ .
2. Platí-li pro prvky  $x, y \in A$  vztahy  $x \leq y, y \leq x$ , je  $x = y$ .
3. Platí-li pro prvky  $x, y, z \in A$  vztahy  $x \leq y, y \leq z$ , je  $x \leq z$ .

Jsou-li  $x, y \in A$  takové prvky, že platí buďto  $x \leq y$ , nebo  $y \leq x$ , říkáme, že tyto prvky jsou *srovnatelné*; v opačném případě je nazýváme *nesrovnatelnými*. Je patrné, že každá podmnožina uspořádané množiny je uspořádaná. Je-li  $x \leq y, x \neq y$ , píšeme  $x < y$ .

Příklad 1. Buď  $M$  neprázdná množina,  $\mathfrak{M}$  systém všech jejích podmnožin. Pro množiny  $A \in \mathfrak{M}, B \in \mathfrak{M}$  položíme  $A \leq B$ , když a jen když  $A \subseteq B$ . Pak  $\mathfrak{M}$  je uspořádaná množina.

Příklad 2. Buď  $M$  neprázdná množina. Pro její prvky  $x, y$  položíme  $x \leq y$ , když a jen když  $x = y$ . Takovou množinu nazveme podle Birkhoffa *kardinálním číslem*. Libovolné dva různé prvky takové množiny jsou nesrovnatelné.

Příklad 3. Buď  $M$  neprázdná uspořádaná množina, v níž není nesrovnatelných prvků. Pak  $M$  se nazývá *řetězec* nebo též *jednoduše uspořádaná množina*. Příkladem řetězce je množina složená z prvků 0, 1 takových, že  $0 < 1$ . Označíme ji symbolem  $\mathbf{2}$ .

<sup>1)</sup> Sr. G. BIRKHOFF, *Lattice Theory*, rev. ed. 1948, Chap. I § 7,8; kniha byla přeložena do ruštiny pod názvem Теория структур, 1952. Další prameny z redakčních důvodů neuvádím. Zájemci o tuto problematiku se mohou obrátit přímo na autora článku.