

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Kenneth G. Wilson

Fyzikální problémy s mnoha délkovými škálami

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 31 (1986), No. 1, 1--34

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/138103>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1986

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Fyzikální problémy s mnoha délkovými škálami

Kenneth G. Wilson

Fyzikální systémy, které se navzájem výrazně liší, jako magnety a tekutiny, mají shodný rys chování – vyskytují se v nich fluktuace ve struktuře, které zahrnují rozsáhlou oblast délek. K jejich vysvětlení byla vytvořena nová metoda nazývaná renormalizační grupa.

Jednou z nejpozoruhodnějších vlastností přírody je značná rozmanitost délkových škál tvořících strukturu světa. V oceánu můžeme například pozorovat proudy o rozsahu několika tisíc kilometrů a pohyb hladiny v globálním měřítku; existují tam ale i vlny v rozsahu velikostí od zlomku centimetru po několik metrů. Při ještě větším rozlišení je třeba dívat se na mořskou vodu jako na soustavu molekul, jejichž charakteristická délková škála je zhruba 10^{-8} centimetru. Od nejmenších struktur po největší je rozdíl v měřítku asi 17 řádů.

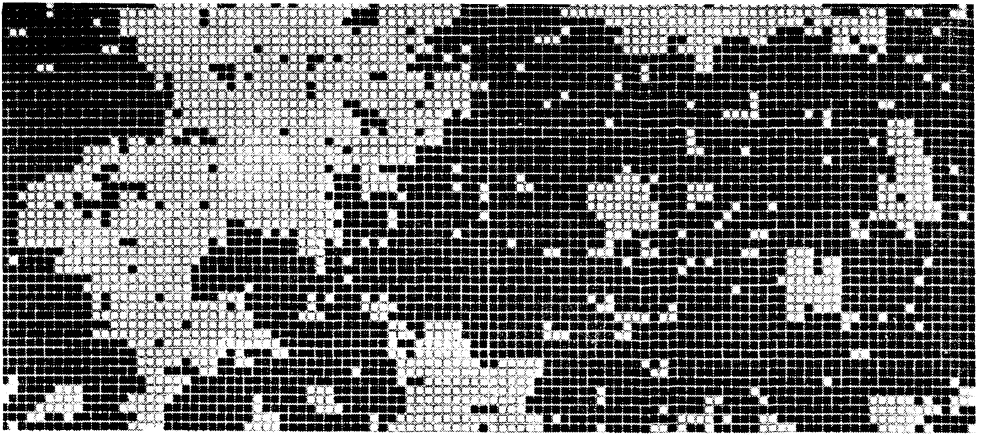
Obecně mají události vyznačující se velkým rozdílem měřítek malý vliv jedna na druhou; vzájemně nekomunikují, takže jevy související s každou ze škál mohou být popisovány nezávisle. Interakce dvou sousedních molekul vody je zcela stejná nezávisle na tom, zda molekuly jsou v Tichém oceánu nebo v čajové konvici. A co je neméně důležité, vlnu v oceánu lze popsat dostatečně přesně jako rozruch ve spojitém prostředí a nebrat při tom vůbec v úvahu molekulovou strukturu kapaliny. Úspěch téměř všech praktických fyzikálních teorií je podmíněn tím, že je možné izolovat jistý omezený rozsah délkových škál od ostatních. Kdyby bylo nutné specifikovat v rovnicích hydrodynamiky pohyb každé jednotlivé molekuly vody, teorie mořských vln by daleko přesahovala možnosti vědy 20. století.

Existuje však třída jevů, ve kterých události charakterizované různými délkovými škálami přispívají se stejnou důležitostí. Jako příklad uveďme chování vody zahřáté k bodu varu při tlaku 217 atmosfér. Při tomto tlaku voda začíná vřít až při 647 stupních Kelvina. Takováto kombinace tlaku a teploty definuje kritický bod vody, při kterém mizí rozdíl mezi kapalinou a plynem. Při vyšších tlacích existuje jenom jedna nerozlišená tekutá fáze a vodu nelze přivést do varu ani při libovolně vysoké teplotě. Poblíž kritického bodu se ve vodě vytvářejí fluktuace hustoty všech možných velikostí. Tyto fluktuace mají charakter kapek kapaliny důkladně promísených s bublinkami plynu a zároveň existují jak kapky, tak bubliny všech velikostí, od jednotlivých molekul až po celý objem nádoby, v níž je tekutina uzavřena. Přesně v kritickém bodě se velikost největších fluktuací stává nekonečnou, avšak menší fluktuace nejsou v žádném případě

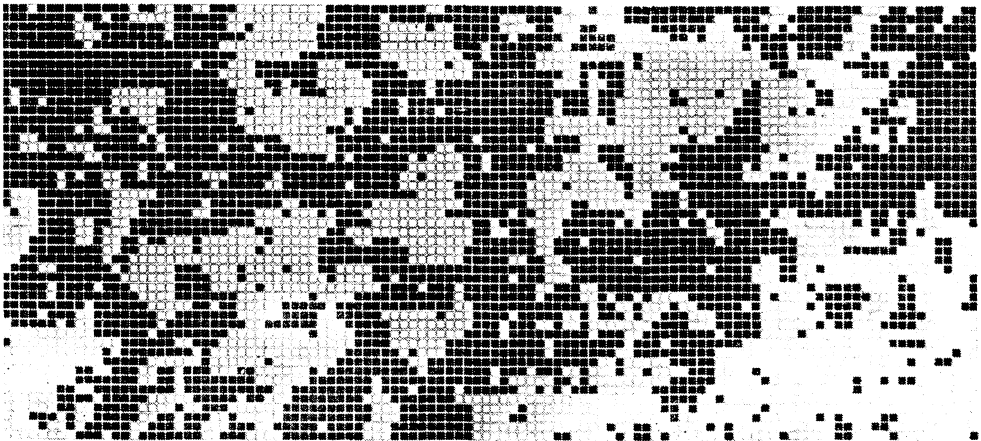
KENNETH G. WILSON: *Problems in Physics with many Scales of Lengths*. Scientific American Vol. 241 (1979), No. 2, p. 158. Přeložil Jiří RAMEŠ, obrázky podle originálu pořídila redakce.

Reprinted with permission. Copyright © 1979 by Scientific American, Inc. All rights reserved.

potlačeny. Každá teorie, která chce popsat vodu poblíž kritického bodu, musí brát v úvahu celé úplné spektrum délkových škál.



1 - 1



150 1 - 1



12 - 1

Výskyt velmi rozdílných délkových škál komplikuje celou řadu důležitých problémů v teoretické fyzice i v některých dalších oblastech vědy. Přesná řešení byla nalezena jenom pro velmi málo z těchto problémů, zatímco pro některé jsou i nejlepší aproximace k přesným řešením neuspokojivé. V uplynulém desetiletí byla vyvinuta nová metoda pro řešení problémů s rozdílnými délkovými škálami, nazývaná metoda renormalizační grupy. Tato metoda v žádném případě nevede k tomu, že složité problémy přestanou být složité, ale některé, které vzdorují všem ostatním známým přístupům, se s pomocí tohoto přístupu podařilo vyřešit.

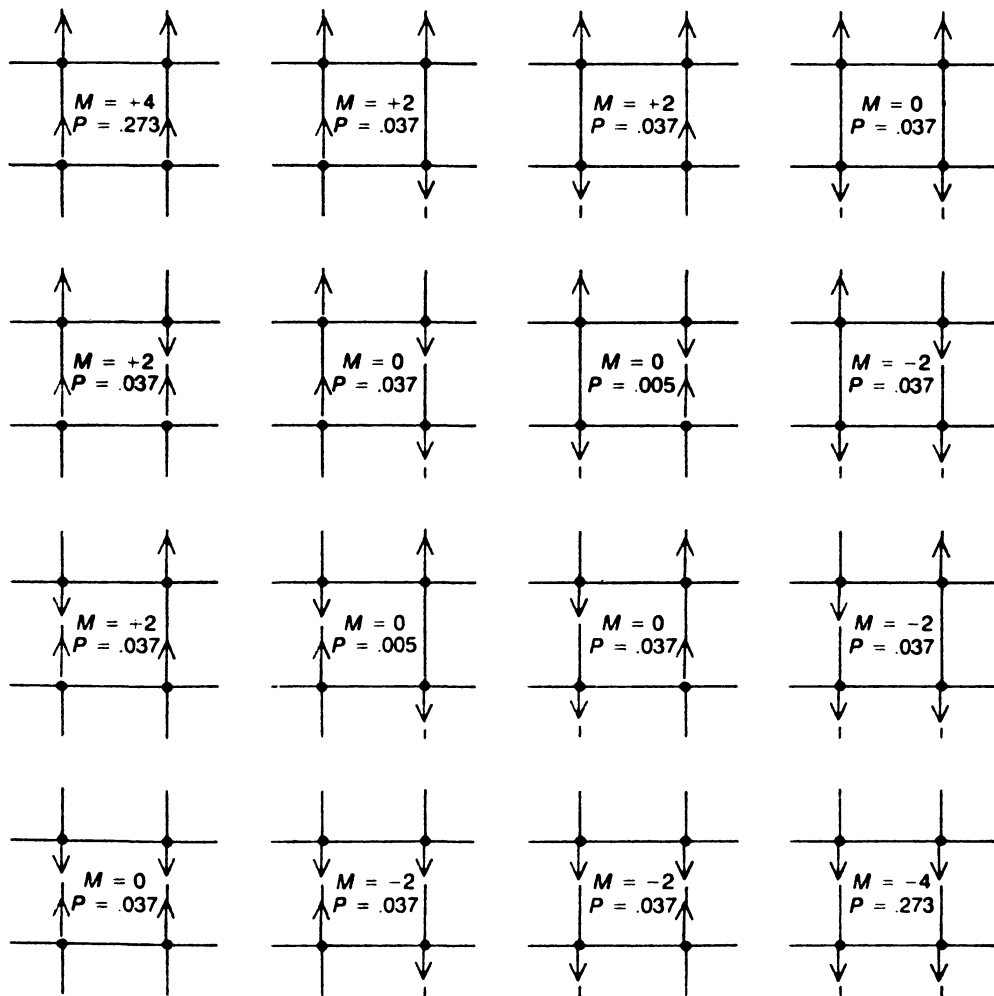
Metoda renormalizační grupy není teorií popisující přírodu, nýbrž obecnou metodou pro konstrukci konkrétních teorií. Lze ji aplikovat nejen k tekutině v kritickém bodě, ale i k feromagnetickému materiálu při teplotě, kdy dochází ke spontánní magnetizaci, ke směsi kapalin při teplotě, kdy se začínají dokonale mísit, nebo ke slitině při teplotě, kdy u atomů různých kovů vzniká pravidelné uspořádání. K dalším problémům tohoto typu patří turbulentní proudění, supravodivost a supratekutost, řetězení polymerů a vznik vázaných stavů elementárních částic nazývaných kvarky. Pozoruhodný závěr, který se zdá být renormalizační grupou potvrzen, je, že mnohé z těchto jevů, na první pohled zcela odlišné, mají na hlubší úrovni chápání identickou podstatu. Například kritické chování tekutin, feromagnetů, kapalných směsí a slitin lze popsat jedinou teorií.

Nejvhodnějším příkladem, na kterém budeme působení renormalizační grupy rozebírat, je feromagnet neboli permanentní magnet. Feromagnetické materiály mají kritický bod, nazývaný podle Pierra Curie, který studoval zhruba na přelomu století termodynamické vlastnosti feromagnetů, Curieův bod nebo Curieova teplota. Pro železo je Curieova teplota 1044 stupňů Kelvina. Při vyšších teplotách nemá železo žádnou spontánní magnetizaci. Při ochlazení zůstává magnetizace železa nulová až do okamžiku dosažení Curieovy teploty, po němž se materiál náhle stane magnetickým. Při dalším snižování teploty magnetizace spojitě vzrůstá.

Kromě magnetizace se chová v okolí Curieova bodu zvláštním způsobem i několik dalších veličin. Zajímavou veličinou je třeba magnetická susceptibilita, což je změna magnetizace vyvolaná malým vnějším polem. V dostatečné vzdálenosti nad Curieovým bodem je susceptibilita malá, protože železo si nemůže podržet žádnou magnetizaci. Daleko pod Curieovou teplotou je susceptibilita opět malá, protože materiál je už

ROZMANITOSTÍ DÉLKOVÝCH ŠKÁL jsou charakterizovány jevy, ke kterým dochází, když se feromagnetická látka ochladí na teplotu, při níž se objevuje spontánní magnetizace. Každý čtvereček na obrázku reprezentuje magnetický moment jednoho atomu látky, přičemž se předpokládá, že každý moment může být orientován pouze dvěma směry, označovanými „nahoru“ (černé čtverečky) a „dolů“ (nezaplněné čtverečky). Při vysokých teplotách (obrázek nahoře) je orientace magnetických momentů prakticky libovolná, takže v systému dochází pouze k uspořádání na krátkých vzdálenostech. Při snižování teploty (uprostřed) začínají vznikat o něco větší oblasti s většinou magnetických momentů orientovanou stejným směrem. Když teplota dosáhne kritického bodu, který se nazývá Curieova teplota nebo T_c (dole), oblasti se zvětšují až k nekonečným velikostem. Je však podstatné, že v systému zůstávají přítomny i fluktuace menších rozměrů. Z toho důvodu musí být do teoretického popisu feromagnetu zahrnuty všechny délkové škály. Tato simulace feromagnetu byla provedena na počítači Janem Tobochnikem a Stephenem Shenkerem z Cornellovy univerzity.

zmagnetizován a slabé vnější pole nemůže stav systému příliš změnit. Při teplotách blízkých 1044 stupňům Kelvina však susceptibilita roste k ostrému maximu a v samotném Curieově bodě se stává nekonečnou.



MODEL FEROMAGNETU se skládá z vektorů, tj. ze šipek pevné délky, které jsou rozmístěny ve vrcholech mřížky. Každý vektor reprezentuje spinový moment hybnosti a zároveň magnetický moment jednoho elektronu. Může být orientován nahoru nebo dolů. Sousední uzly mřížky jsou vázány takovým způsobem, že příslušné spinové vektory jsou s větší pravděpodobností paralelní než antiparalelní. Ze síly vazby, která se zmenšuje s teplotou, lze odvodit pravděpodobnost P každé možné konfigurace spinových vektorů. Na obrázku jsou zobrazeny všechny konfigurace mřížky tvořené pouze čtyřmi uzly. Celková magnetizace M každé konfigurace se dá snadno spočítat — je rovna počtu spinů nahoru minus počet spinů dolů. Magnetizaci modelu při libovolné dané teplotě lze získat vynásobením magnetizace každé konfigurace příslušnou pravděpodobností a sečtením všech výsledků. Pravděpodobnosti, které jsou na obrázku, byly počítány pro sílu vazby 0,5, což odpovídá teplotě 2 (v libovolných jednotkách). Znázorněný model se nazývá dvojrozměrným Isingovým modelem.

Příčinou existence feromagnetismu je kvantově mechanický spin elektronů. Protože každý elektron má vlastní moment hybnosti, nese i malý magnetický dipólový moment; jinými slovy, chová se jako magnet s jedním severním a jedním jižním magnetickým pólem. Pro naše účely není důležité, jakým způsobem dává spin elektronu vzniknout magnetickému momentu. Stačí mít na paměti, že spin i magnetický moment lze reprezentovat vektorem, to znamená šipkou, která definuje směr magnetického pole elektronu.

Reálný feromagnet má složitou atomovou strukturu, avšak všechny podstatné vlastnosti spinového systému je možno ilustrovat na poměrně jednoduchém modelu. Budu nyní diskutovat model, který nezahrnuje atomy ani jiné hmotné částice, ale sestává pouze ze spinových vektorů rozložených na mřížce. Pro jednoduchost budu uvažovat dvojrozměrnou mřížku – pravouhlou síť navzájem stejně vzdálených linií v ploše se spinovým vektorem v každém z průsečíků mřížkových linií. Dále budu předpokládat, že každý spin může být orientován jenom v jednom ze dvou možných směrů, kterým budu říkat například nahoru a dolů. Takovouto modelovou mříž budeme nazývat zmagnetizovanou, jestliže více než polovina z celkového počtu spinů je orientována tímtéž směrem.

Všechny elektrony mají stejný spin a stejný magnetický moment. To, co odlišuje feromagnet od jiných materiálů, je charakter vazby mezi sousedními spiny, která musí mít tendenci uspořádat je do shodného směru. Tuto tendenci lze přesněji vyjádřit výrokem, že celková energie libovolných dvou sousedních spinů musí být menší pro spiny paralelní než pro spiny antiparalelní. Vazba spinů je způsobena interakcí krátkého dosahu, což je v modelu vyjádřeno tím, že ze všech spinů jsou interakcí svázány jen spiny sousední. V pravouhlé dvojrozměrné mřížce je každý spin bezprostředně ovlivňován čtyřmi nejbližšími sousedy, žádné další spiny na něj přímo nepůsobí.

Charakter interakcí mezi spiny feromagnetu by mohl snadno svádět k závěru, že všechny spiny budou stále orientovány paralelně a materiál bude vždycky ve stavu maximální magnetizace. Takový stav je stavem s nejnižší energií a pokud by nebyly přítomny žádné další rušivé vlivy, byl by stavem skutečně nejvýhodnějším. V reálném feromagnetu však existuje jeden další vliv, který nelze zanedbat – tepelný pohyb atomů a elektronů. Při jakékoliv teplotě vyšší než absolutní nula převraccioj tepelné excitace v látce náhodně některé ze spinů, takže se mění směr spinového vektoru, a to i přes to, že překlápění spinů přivádí magnet do stavu s vyšší energií. Proto není divu, že magnetizace klesá se vzrůstající teplotou; tato závislost v sobě odráží vzrůstající tepelný chaos. To ovšem nevysvětluje, proč magnetizace není hladkou funkcí teploty, nýbrž proč při jisté konečné teplotě – v Curieově bodě – prudce přechází do nuly.

Střetávání obou protichůdných tendencí – tendence k shodné orientaci spinů a k tepelnému nepořádku – lze do modelu feromagnetu snadno zahrnout. Síla vazby mezi sousedními spiny je charakterizována číslem K , které je třeba zadat při formulaci modelu. Tepelné efekty se snadno vezmou v úvahu tím, že konstantu K budeme považovat za nepřímo úměrnou teplotě. Při použití vhodných jednotek lze sílu vazby položit rovnou přímo převrácené hodnotě teploty, což můžeme vyjádřit rovnicí $K = 1/T$.

Parametr síly vazby vyjadřuje pravděpodobnost, že dva sousední spiny jsou orientovány paralelně. Při nulové teplotě nedochází k žádným tepelným efektům a sousední

spiny jsou s jistotou paralelní; pravděpodobnost tohoto jevu je rovna jedné a síla vazby je nekonečná. Při nekonečné teplotě síla vazby klesá k nule, takže spiny vůbec neinteragují. Každý spin může v takovém případě zaujímat libovolný směr a jednotlivé spiny jsou nezávislé na svých sousedech. Pravděpodobnost toho, že dva spiny jsou orientovány paralelně, je přesně $1/2$ a stejná je i pravděpodobnost jejich antiparalelní orientace. Oblast, která nás zajímá, leží samozřejmě mezi těmito dvěma extrémy a pravděpodobnost toho, že dva sousední spiny zaujímají stejný směr, musí mít v této oblasti vždycky hodnotu mezi $1/2$ a 1 .

Předpokládejme, že máme velikou dvojrozměrnou spinovou mřížku a že orientaci některého ze spinů násilím zafixujeme směrem vzhůru. Jak to zapůsobí na ostatní spiny? Efekt na spiny ve čtyřech sousedních uzlech mřížky si lze snadno představit: Protože tyto spiny jsou přímo svázány s našim fixovaným spinem, bude pravděpodobnost jejich orientace nahoru větší než $1/2$. Míra, do které bude orientace nahoru pravděpodobnější než orientace opačná, závisí na hodnotě konstanty K , která je zase určena velikostí teploty.

Vzdálenější spiny neinteragují s fixovaným spinem přímo, ale to neznamená, že vliv zafixování spinu je omezen jenom na nejbližší sousedy. Protože spiny — nejbližší sousedé mají tendenci zaujímat orientaci nahoru častěji než dolů, způsobují podobné zvýšení pravděpodobnosti i u svých vlastních nejbližších sousedů. Tímto způsobem se vzruch může šířit přes rozlehlou oblast mřížky. Velikost vlivu, jaký má fixování jednoho spinu, lze určit pozorováním orientace mnoha spinů nalézajících se ve stejné vzdálenosti od spinu fixovaného. Jestliže změna orientace fixovaného spinu ze směru nahoru do směru dolů vede ke zvýšení počtu spinů s orientací dolů v pozorovaném souboru, řekneme, že mezi spiny existuje korelace. Maximální vzdálenost, na kterou lze takovou korelaci pozorovat, se nazývá korelační délka. Oblasti, mezi kterými je vzdálenost větší než korelační délka, lze považovat za prakticky nezávislé.

V mřížce s velmi vysokou teplotou je korelační délka blízká nule. Distribuce spinových orientací je téměř libovolná, takže průměrný počet nahoru a dolů orientovaných spinů je stejný; jinými slovy, magnetizace je nulová. Při snižování teploty (a růstu síly vazby) začíná docházet ke korelacím na větších vzdálenostech. Projevují se ve formě spinových fluktuací, to znamená oblastí, z nichž každá se skládá ze spinů orientovaných převážně jedním směrem. Průměrná magnetizace jakékoli větší oblasti je stále nulová, ale struktura mřížky je výrazně jiná než při teplotě blízké nekonečnu.

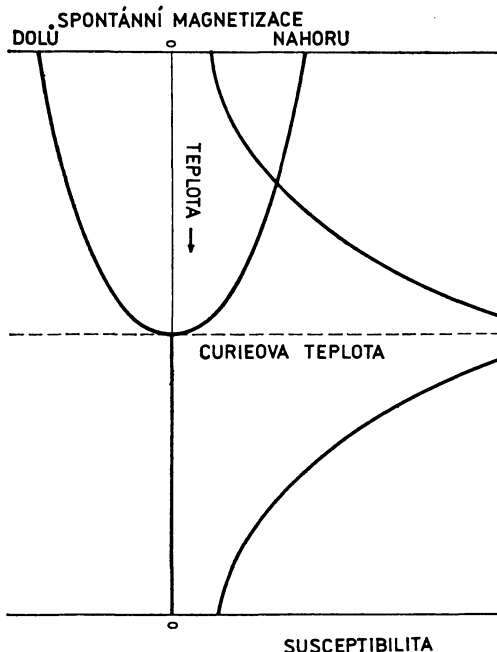
Jakmile se teplota přiblíží Curieovu bodu, korelační délka prudce vzroste. Primární interakce modelu se nezměnily — stále spojují jenom sousední uzly mřížky; avšak díky silám s krátkým dosahem došlo ke vzniku uspořádání na větší vzdálenost. Nejpodstatnější při tom je fakt, že při zvětšování velikosti maximálních spinových fluktuací nejsou menší fluktuace potlačeny, ale stávají se pouze jemnější strukturou, která je součástí struktury rozsáhlejší. Největší fluktuace nejsou oblastmi se stejnosměrným uspořádáním spinu; sestávají z mnoha menších fluktuací a lze je rozlišit jedinečně podle toho, že v takové oblasti velké fluktuace převažuje v průměru jedna spinová orientace nad druhou. V oceánu spinů orientovaných převážně nahoru tak může být ostrov spinů s orientací převážně dolů, který má na svém území jezero spinů nahoru s ostrůvkem

spinů dolů. Takováto posloupnost pokračuje až k nejmenší možné škále – jedinému spinu.

V momentě, kdy teplota nabývá přesně velikosti Curieovy teploty, se korelační délka stává nekonečnou. Libovolné dva spiny jsou korelovány bez ohledu na vzdálenost, která je odděluje. Stále však existují fluktuační všechny menších délkových škál. Systém zůstává nezmagnetizovaný, avšak stává se mimořádně citlivým k malým vnějším vlivům. Jestliže například zafixujeme jeden spin ve směru nahoru, vznikne efekt pozorovatelný na celé mřížce, totiž makroskopická magnetizace celého systému.

Pod Curieovou teplotou zůstává systém zmagnetizován dokonce bez vnějšího vlivu, avšak bezprostředně nenastává žádná změna ve vzhledu mřížky. Fluktuační malých rozměrů – zbytky jezer a ostrůvků s opačným směrem spinu – přetrvávají. Z pouhého pohledu na mřížku není patrné, že došlo ke vzniku magnetizace. Až když se systém ochladí na ještě nižší teplotu, začne být na první pohled jasné, že jedna z orientací spinů převažuje – tak, jak vzrůstající síla vazby nutí další a další spiny zaujmout orientaci shodnou s většinou. Při nulové teplotě nastane naprostá uniformita.

V tekutinách jsou analogií fluktuací spinových orientací feromagnetů fluktuační hustoty, ke kterým dochází poblíž kritického bodu. V tekutinách je možné pozorovat přítomnost fluktuací všech možných škál přímo. Když korelační délka dosáhne hodnoty několika tisíc angströmů, což je velikost srovnatelná s vlnovou délkou světla, fluktuační začnou světlo silně rozptylovat a tekutina dostává mléčné zabarvení, což je jev nazývaný kritická opalescence. Za povšimnutí stojí, že když se teplota dále přiblíží kritickému bodu a rozměr největších fluktuací se podstatně zvětší (na velikost několika milimetrů nebo centimetrů), kritická opalescence nezmizí, což je svědectvím o tom, že stále existují i malé fluktuační. U spinových systémů dochází ke stejnému jevu, ale protože feromag-



MAGNETIZACE feromagnetu se objevuje náhle při Curieově teplotě. Nad touto teplotou je počet spinů nahoru a spinů dolů stejný a magnetizace je nulová. Při teplotách pod Curieovou teplotou jsou možné dva stavy magnetizace podle toho, zda většina spinů je orientována nahoru nebo dolů. Při nepřítomnosti vnějšího magnetického pole jsou oba stavy stejně pravděpodobné. Susceptibilita feromagnetu vyjadřuje změnu magnetizace vynucenou malou změnou vnějšího magnetického pole. V Curieově bodě se susceptibilita stává nekonečnou. V blízkosti Curieova bodu vede malá změna teploty i vnějšího pole ke značné změně magnetizace.

netické materiály nepropouštějí světlo, nelze jej tak snadno demonstrovat. Přesto bylo možné kritickou opalescenci feromagnetů pozorovat, a to při rozptylu neutronů na magnetickém materiálu poblíž Curieovy teploty,

Model, který jsem právě popsal, není mým výtvozem. Je to varianta modelu zformulovaného ve dvacátých letech německými fyziky Wilhelmem Lenzem a Ernestem Isingem a nazývaného dnes Isingovým modelem. Vlastnosti systému Isingových spinů na dvojrozměrné mřížce jsou beze zbytku známy, protože pro tento model našel roku 1944 Lars Onsager z univerzity v Yale přesné řešení. Od té doby bylo nalezeno přesné řešení i pro několik dalších modelů ve dvou dimenzích (zatímco není dosud známo exaktní řešení ani pro jeden trojrozměrný model). Problémy, které vyvstávají při popisu dvojrozměrných systémů, nejsou však zdaleka triviální. Nyní budu aplikovat na dvojrozměrný Isingův model metodu renormalizační grupy tak, jako kdyby šlo o dosud nevyřešený problém, a Onsagerovo přesné řešení využiji pro kontrolu správnosti výsledků.

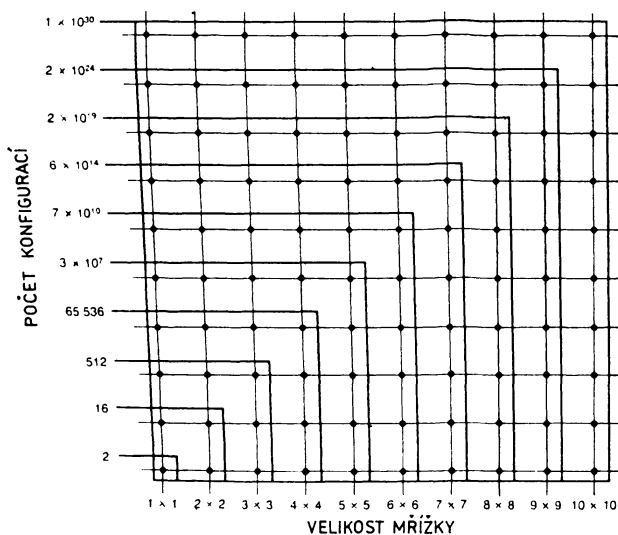
Co si máme představit pod pojmy „vyřešit“ nebo „pochopit“ model fyzikálního systému? U Isingova modelu jsou od počátku známy mikroskopické vlastnosti, neboť byly zadány při formulaci modelu. To, co je třeba hledat, jsou metody, jak předpovídat makroskopické vlastnosti systému ze známých vlastností mikroskopických. K pochopení modelu by například značně přispěly formule udávající spontánní magnetizaci, susceptibilitu a korelační délku jako funkce teploty.

Pro Isingův model není nijak zvlášť obtížné spočítat makroskopické vlastnosti každé jednotlivé spinové konfigurace. Magnetizaci lze například určit prostým spočítáním spinů nahoru a spinů dolů a odečtením jednoho výsledku od druhého. Makroskopické vlastnosti systému však neurčuje žádná jednotlivá konfigurace. K pozorovaným vlastnostem přispívají všechny konfigurace, každá úměrně své pravděpodobnosti při dané teplotě.

V principu je možné spočítat makroskopické vlastnosti přímo, a to jako sumu všech jednotlivých příspěvků. Znamená to nalézt nejprve magnetizaci každé konfigurace a potom odpovídající pravděpodobnost. Skutečná magnetizace se pak určí vynásobením každého takového páru čísel a sečtením všech výsledků tohoto násobení. Susceptibilitu a korelační délku lze spočítat pomocí procedur ne o mnoho složitějších. Společným prvkem ve všech těchto výpočtech je potřeba znát pravděpodobnosti všech možných spinových konfigurací. Jakmile je známa distribuce pravděpodobností, lze určit makroskopické vlastnosti systému přímočarým způsobem.

Jak bylo řečeno v předchozích odstavcích, pravděpodobnost, že libovolné dva sousední spiny jsou orientovány paralelně, je určena výlučně silou vazby K , která byla definována jako převrácená hodnota teploty. Jestliže pravděpodobnost, že dva sousední spiny uvažované odděleně od systému jsou orientovány paralelně, označíme p , pravděpodobnost jejich antiparalelní orientace musí být $(1 - p)$. Z pouhých těchto dvou hodnot lze spočítat relativní pravděpodobnost libovolné zadané konfigurace mřížky. Vše, co je třeba učinit, je vynásobit navzájem jednotlivé pravděpodobnosti pro každý pár nejbližších sousedů, přičemž pravděpodobnost bereme rovnou p pro paralelní spiny v páru a $1 - p$ pro spiny antiparalelní.

Představme si spinový systém tvořený pouze čtyřmi spiny umístěnými v rozích čtverce. V takové mřížce se s nejbližšími sousedy vyskytují čtyři vazby, které odpovídají čtyřem stranám čtverce. Je třeba uvažovat postupně každý pár a přiřadit mu pravděpodobnost p nebo $1 - p$ podle toho, zda jsou spiny orientovány souhlasně nebo opačně; potom se čtyři jednotlivé pravděpodobnosti vynásobí. V konfiguraci se všemi spiny nahoru jsou všechny čtyři páry rovnoběžné, takže relativní pravděpodobnost je dána součinem $p \times p \times p \times p$. Jestliže tři spiny jsou orientovány nahoru a jeden dolů, je relativní pravděpodobnost $p \times p \times (1 - p) \times (1 - p)$. Takovýto výpočet je třeba provést pro každou spinovu konfiguraci. Pro systém čtyř spinů je celkový počet konfigurací 16. Nakonec je třeba vytvořit z relativních pravděpodobností pravděpodobnost absolutní takovou úpravou každé hodnoty tak, aby suma všech 16 dílčích pravděpodobností byla rovna přesně jedné. Poněvadž síla vazby je určena teplotou a hodnoty p a $1 - p$ jsou zase určeny silou vazby, je třeba opakovat celou sekvenci výpočtů pro každou zkoumanou teplotu.



POČET SPINOVÝCH KONFIGURACÍ se prudce zvětšuje s rostoucími rozměry mřížky. Pro systém n spinů, z nichž každý může nabývat dvou hodnot, je počet konfigurací 2^n . Když je mřížka velká, stává se úkol spočítat pravděpodobnosti všech konfigurací neproveditelným. Hranici možností praktických výpočtů představuje mřížka o něco větší než čtverec 6×6 obsahující 36 spinů. Aby bylo možné pozorovat kritické chování systému poblíž Curieovy teploty, je třeba oblasti okolo 100×100 spinů, pro kterou existuje 2^{10000} konfigurací.

Tento plán na zdolání Isingova modelu je sice ambiciózní, ale nepřiliš praktický. Jestliže bychom uměli spočítat pravděpodobnost každé spinové konfigurace, bylo by možné určit pro každou zadanou teplotu magnetizaci a další makroskopické vlastnosti této konfigurace. Do problémů se však dostaneme díky počtu spinových konfigurací. V systému vytvořeném z n spinů, z nichž každý může nabývat dvou hodnot, je 2^n možných konfigurací. Tato exponenciální funkce prudce vzrůstá s rostoucím n . Jak jsem už řekl, čtyři spiny mají 2^4 , to je 16 konfigurací. Blok 3×3 s devíti spiny má 512 konfigurací a blok 4×4 65 536. Z praktických důvodů jsou takovéto výpočty možné jen do velikosti bloku 6×6 tvořeného 36 spiny, pro nějž existuje přibližně 7×10^{10} konfigurací.

Jak velkou mříž je třeba studovat pro určení kritických vlastností dvojrozměrného

Isingova modelu? Rozměr mřížky musí být nejméně tak velký jako největší fluktuace existující při dané teplotě. Při teplotách dostatečně blízkých Curieovu bodu může být korelační délka rovna stovkám jednotek mřížkové konstanty a největší fluktuace zasahují 100^2 neboli 10 000 vrcholů mřížky. Pro spinový blok této velikosti existuje $2^{10\ 000}$ možných konfigurací, což je číslo o něco větší než $10^3\ 000$. Takový výpočet by nemohl zvládnout ani nejrychlejší počítač, jaký si dovedeme představit. I kdyby takový počítač pracoval nepřetržitě od „velkého třesku“, kterým začala existence vesmíru, jeho výsledky do této chvíle by nepředstavovaly žádnou viditelnou část konečné odpovědi.

Potřebě provádět téměř nekonečné výpočty se lze vyhnout díky dvěma speciálním vlastnostem mřížky. Když je teplota systému rovna nule (takže síla vazby je nekonečná), lze zapomenout na všechny konfigurace s výjimkou dvou. Při nulové teplotě se stává nulovou pravděpodobnost, že některý spinový pár bude antiparalelní, a díky tomu je stejně nulová pravděpodobnost každé konfigurace, která obsahuje alespoň jeden antiparalelní pár. Jedinými dvěma konfiguracemi neobsahujícími ani jeden antiparalelní pár jsou ty, kde všechny spiny směřují nahoru nebo všechny dolů. Mřížka s určitostí zaujme jednu z těchto konfigurací a všechny ostatní konfigurace mají nulovou pravděpodobnost.

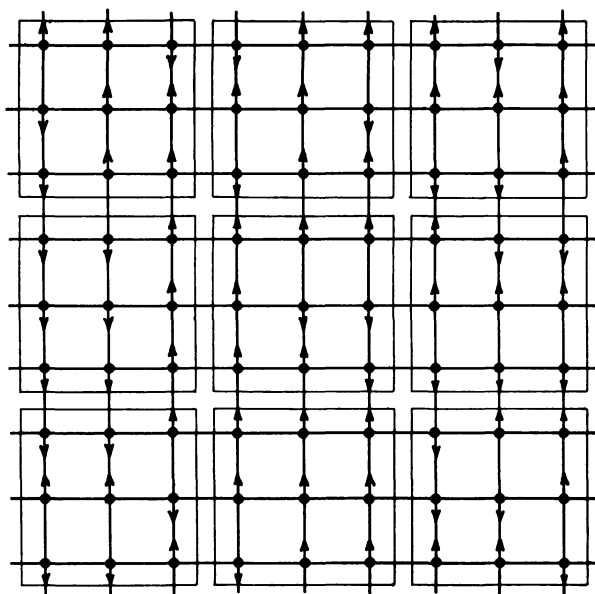
Podobně je rozdělení pravděpodobností výrazně zjednodušeno při nekonečné teplotě, při níž je síla vazby nulová. Každý spin je v tom případě zcela nezávislý na svých sousedech a jeho orientace v každém okamžiku je zcela náhodná. Díky tomu má každá konfigurace mřížky stejnou pravděpodobnost.

S využitím těchto dvou speciálních případů distribuce pravděpodobnosti je triviální spočítat přesné vlastnosti Isingova modelu při absolutní nule a při nekonečné teplotě. Dále jsou k dispozici metody pracující uspokojivě pro teploty dostatečně nízké, které lze považovat za blízké nule, nebo dostatečně vysoké, které lze uvažovat jako blízké nekonečnu. Problémy nastávají uvnitř oblasti mezi těmito dvěma extrémy. Takováto oblast je však zároveň oblastí kritického bodu. Až do nedávné doby neexistovala žádná přímá a prakticky použitelná metoda pro výpočet vlastností systému v blízkosti kritického bodu. Takovou metodu nyní poskytuje renormalizační grupa.

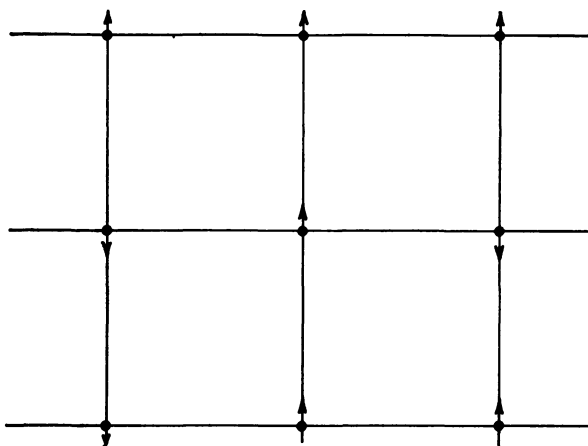
Podstatou metody renormalizační grupy je rozložit velký problém do řady menších a lépe zvládnutelných stupňů. Místo vyšetřování všech spinů v oblasti o velikosti srovnatelné s korelační délkou se vlastnosti systému na dlouhých vzdálenostech odvozují z chování několika málo veličin, které v sobě zahrnují efekty mnoha spinů. Existuje několik způsobů, jak to provést. Nyní popíšu jeden z nich, nazývaný technika blokových spinů, na němž lze principy metody vidět obzvláště jasně. Vymyslel jej Leo P. Kadanoff z Chicagské univerzity a praktický nástroj pro výpočty z něho udělali T. Niemeier a M. J. M. van Leeuwen z Delftské technické univerzity v Holandsku.

Metoda sestává ze tří základních kroků, z nichž každý musí být mnohokrát opakován. Nejdříve se mřížka rozdělí na bloky obsahující několik spinů. Pro konkrétnost budu uvažovat čtvercové bloky se třemi spiny na každé straně, takže každý blok bude obsahovat 9 spinů. Dále je třeba zvolit nějaký způsob, jak určit průměrnou hodnotu spinů v jednom bloku; celý blok se pak nahradí jediným novým spinem s velikostí rovnou průměru. Průměrnou hodnotu lze nalézt jednoduchým způsobem podle principu většiny.

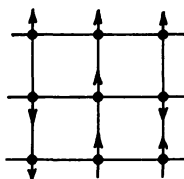
RENORMALIZAČNĚ GRUPOVÝ přístup k modelu ferromagnetu spočívá v rozštěpení neřešitelného problému s mnoha různými délkovými škálami na posloupnost jednodušších problémů, z nichž každý obsahuje jenom jednu škálu. Jedna z variant renormalizačně grupové metody, nazývaná blok-spinová transformace se skládá ze tří kroků. Nejprve se mřížka rozdělí do bloků, z nichž každý obsahuje několik spinů — v našem případě 9. Pak se každý blok nahradí jediným spinem, jehož hodnota je rovna průměrné hodnotě všech spinů bloku — zde je průměrná hodnota definována principem většiny. Tímto způsobem vznikne nová mřížka s mřížkovou konstantou rovnou trojnásobku konstanty původní a s třikrát menší hustotou spinů. Nakonec se provede návrat k původní škále vydělením všech rozměrů faktorem 3. Aby bylo možné určit pravděpodobnost každé konfigurace blokových spinů, je třeba zopakovat tento postup pro všechny několikaspinové konfigurace původní mřížky.



KONSTRUKCE BLOKŮ



NAHRAZENÍ JEDNOTLIVÝCH SPINŮ BLOKOVÝMI SPINY



PŘEŠKÁLOVÁNÍ
MŘÍŽKY

Jestliže pět nebo více původních spinů směřuje nahoru, budeme nový spin také považovat za orientovaný nahoru; v opačném případě je orientován dolů.

ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBNOTI pro systém blokových spinů se najde sečtením pravděpodobností všech konfigurací původní mřížky, které přispívají ke každé z konfigurací blokových spinů. Na obrázku je ukázán výpočet pro systém šesti spinů na trojúhelníkové mřížce. Na mřížce jsou vytvořeny dva bloky po třech spinech a každý blok je nahrazen jediným spinem s orientací určenou pomocí principu většiny. Původní šestice spinů má 64 konfigurací, které jsou rozděleny do sloupců tak, že všechny konfigurace z jednoho sloupce dávají tutéž konfiguraci blokových spinů. Například všechny konfigurace z nejlevějšího sloupce obsahují v každém bloku alespoň dva spiny nahoru, takže jim odpovídají blokové spiny oba orientované nahoru. Síla vazby původní mřížky byla zvolena jako 0,5, což dává pravděpodobnosti různých orientací nejbližších sousedů uvedené v horní části obrázku. Z této sady čísel lze spočítat pravděpodobnost každé konfigurace původní mřížky. Pak se pravděpodobnosti v každém sloupci sečtou a získá se pravděpodobnost jedné konfigurace blokových spinů. Blokspinové pravděpodobnosti nejsou shodné s pravděpodobnostmi původní mřížky, což znamená, že síla vazby, a tedy i teplota, jsou také rozdílné.

Výsledkem těchto dvou operací je nová mřížka, jejíž mřížková konstanta je třikrát větší než konstanta mřížky původní. Třetím krokem metody je návrat k původní škále vydělením všech rozměrů faktorem 3.

Tyto tři kroky definují transformaci renormalizační grupy. V důsledku této transformace zmizí ze systému všechny fluktuace v orientaci spinů o velikosti menší než velikost bloku. V našem modelu jsou díky zprůměrování spinů v každém bloku vyhlazeny všechny fluktuace spinů o rozsahu menším než tři mřížkové jednotky. Je to, jako kdybychom se na mřížku dívali nezaostřenou lupou, takže menší detaily se ztrácejí, zatímco větší zůstávají beze změny.

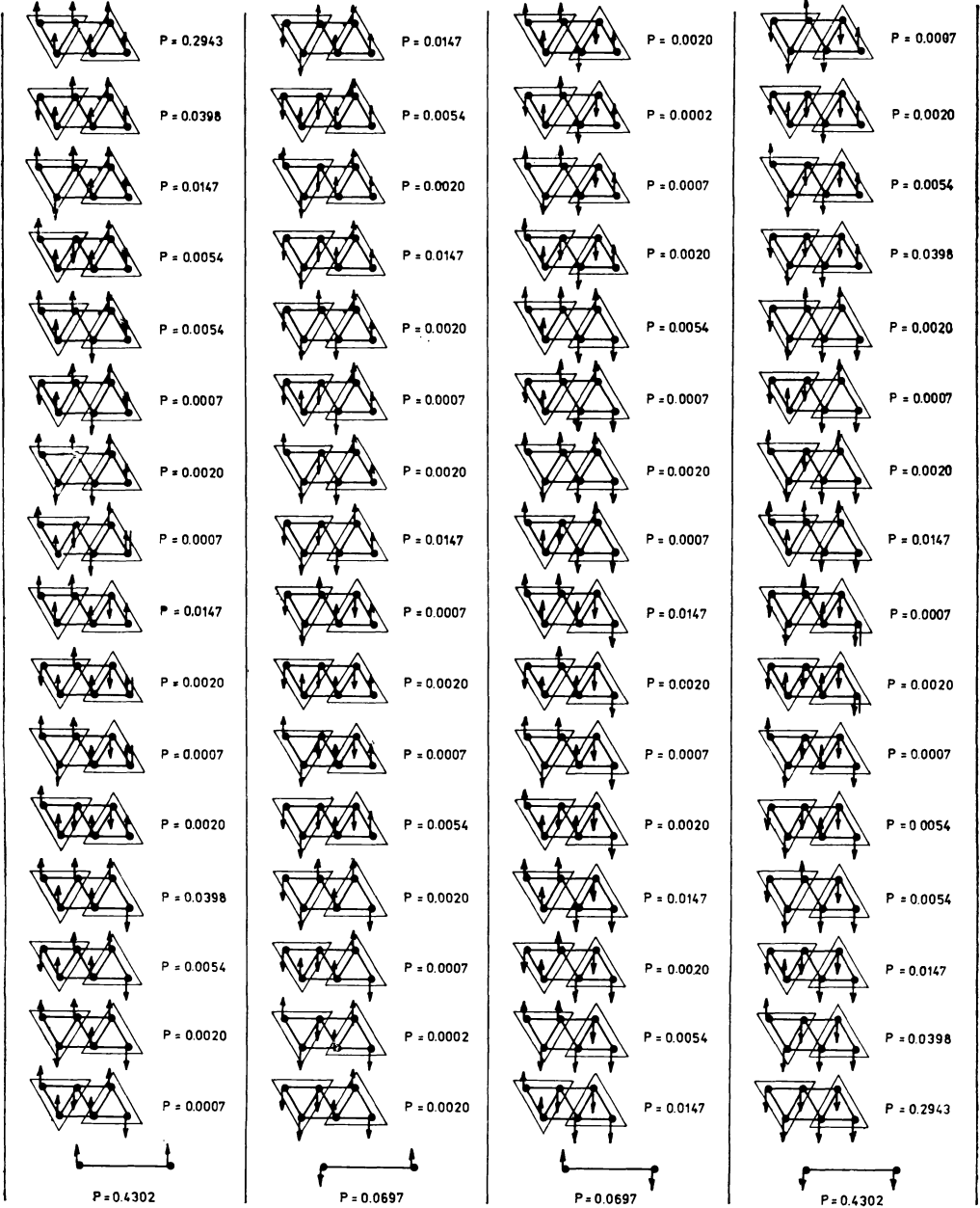
Nestačí však zopakovat tento postup pro každou konfiguraci původní mřížky – to, co nás zajímá, je opět rozdělení pravděpodobnosti. Předpokládejme, že nyní zkoumáme jenom malou část původní mřížky sestávající z 36 spinů. Tuto oblast lze rozdělit do čtyř bloků. Ze spinů oblasti lze vytvořit 2^{36} , to je okolo sedmnácti miliard konfigurací. Po provedení blokspinové transformace je 36 původních spinů nahrazeno čtyřmi spinovými bloky, pro které existuje celkem 16 konfigurací. Spočítat pravděpodobnosti všech konfigurací původních 36 spinů je právě tak na hranici praktických možností. Z výsledků takového výpočtu ihned plyne pravděpodobnost 16 konfigurací blokových spinů. Lze ji zjistit uspořádáním všech konfigurací původní mřížky do 16 tříd podle toho, která konfigurace blokových spinů vznikne z původní konfigurace po uplatnění principu většiny. Celková pravděpodobnost pro každou jednotlivou konfiguraci blokových spinů se pak získá sečtením pravděpodobností všech konfigurací původní mřížky z dané třídy.

Může se zdát, že tímto postupem se vlastně nic nezískává. Jestliže dokážeme spočítat úplné rozdělení pravděpodobnosti pro systém 36 spinů, nedovíme se nic nového tím, že zredukujeme tento systém na menší mřížku čtyř blokových spinů. Poblíž kritického bodu je pořád ještě nutné uvažovat mnohem větší mřížky, sestávající například z 10 000 spinů místo z 36, a rozdělení pravděpodobnosti pro blokové spiny vytvořené z takového mřížky neumíme spočítat, protože konfigurací je příliš mnoho. Jak však nyní uvidíme, existuje metoda, jak získat užitečnou informaci z malého souboru blokových spinů. Je to metoda umožňující studovat chování systému zahrnujícího rozsáhlou oblast mřížky, aniž by bylo nutné explicitně se zabývat konfiguracemi všech spinů této oblasti.

PRÁVDĚPODOBNOSTI KONFIGURACÍ NEJBLIŽŠÍCH SOUSEDŮ V PŮVODNÍ MŘÍŽE



PRÁVDĚPODOBNOST ŠESTISPINOVÝCH KONFIGURACÍ V PŮVODNÍ MŘÍŽE



PRÁVDĚPODOBNOST KONFIGURACÍ BLOKOVÝCH SPINŮ - NEJBLIŽŠÍCH SOUSEDŮ

Každý blokový spin představuje devět spinů původní mřížky. Soubor blokových spinů lze však také považovat za spinový systém jako takový, s vlastnostmi, které je možno vyšetřovat stejnými metodami jako u původního modelu. Dá se předpokládat, že mezi blokovými spiny existují vazby, které závisejí na teplotě a které naopak určují pravděpodobnost každé existující spinové konfigurace. Na první pohled bychom si mohli myslet, že vazby mezi blokovými spiny jsou stejné jako u původní mřížky Isingových spinů, to znamená, že jde o interakce s nejbližším sousedem se silou určenou parametrem K , který je roven převrácené hodnotě teploty.

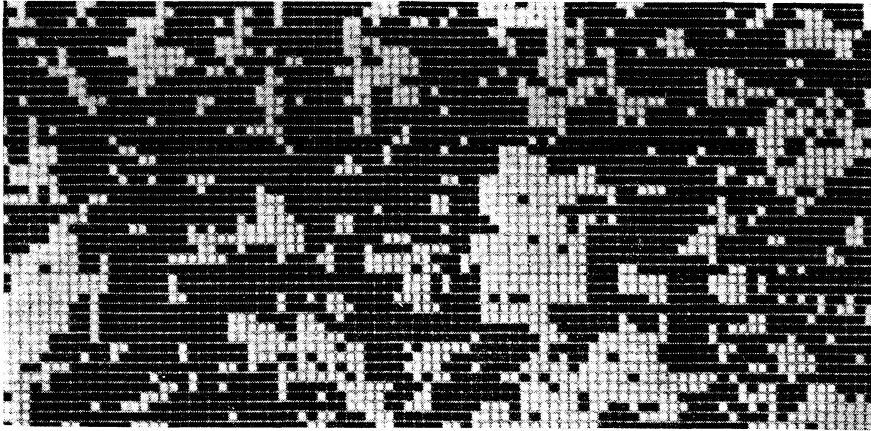
Tuto domněnku lze snadno prověřit, protože je známo rozdělení pravděpodobnosti pro konfigurace alespoň malé části systému blokových spinů — získali jsme je z konfigurací původní mřížky při definování pojmu blokových spinů. Při tom se ukáže — poněkud překvapivě —, že jde o domněnku nesprávnou. Blokové spiny nejsou vázány stejnou vazbou jako spiny v původním modelu. Předpokládáme-li jenom interakci nejbližších sousedů a sílu vazby rovnou K , dostaneme nesprávný soubor pravděpodobností pro blokové spiny.

Jestliže parametry původního modelu dobře nepopisují systém blokových spinů, je třeba zavést nějaký nový soubor vazeb. Principem, na jehož základě se tyto nové interakce formulují, je požadavek, aby nové interakce reprodukovaly tak přesně, jak je to jen možné, pozorované distribuce pravděpodobnosti. Obecně tím musí dojít ke změně v síle vazby mezi nejbližšími sousedy, to znamená, že K začne nabývat nových hodnot. Navíc je nyní třeba zavést i vazby s delším dosahem, které nebyly zahrnuty v původní definici Isingova modelu. Může se například ukázat, že je nutné uvažovat vazbu mezi spiny v protilehlých vrcholech čtverce. Může také nastat přímá interakce mezi třemi nebo čtyřmi spiny najednou. Je možné, že se vyskytne potřeba zavést i vazby s ještě delším dosahem. Lze tedy považovat blokové spiny za systém na mřížce, ale je to systém naprosto odlišný od systému původního. Protože základní vazbové para-

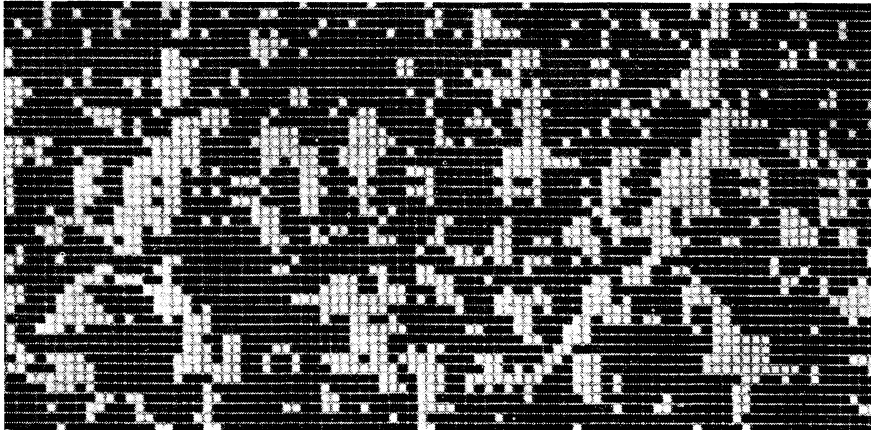
BLOKSPINOVÁ TRANSFORMACE se nechává opakovaně působit na spinovou mřížku, čímž se při každém kroku odhaluje chování systému na větší škále. Simulace na počítači, která byla provedena autorem, začala souborem přibližně 236 000 spinů. Černé čtverečky na obrázku reprezentují spiny nahoru, nezaplňené čtverečky spiny dolů. Byly zvoleny tři různé hodnoty počátečních teplot — nad Curieovou teplotou T_c , v bodě T_c a menší než T_c . Transformace začíná rozdělením původní mřížky do bloků 3×3 . Každý blok je nahrazen jediným spinem, jehož hodnota se řídí principem většiny. Tak vznikne mřížka z blokových spinů první generace. Postup se pak zopakuje s blokovými spiny první generace v roli výchozí mřížky. Vzniklé spiny druhé generace poslouží jako počáteční konfigurace pro další krok transformace a tak dále. Už před třetím krokem je počet spinů dostatečně malý na to, aby se všechny vešly na obrázek, a po čtvrtém kroku zbývá pouze 36 spinů, z nichž každý reprezentuje přes 6000 bodů původní mřížky. Po prvním kroku dochází díky středování hodnot k vyhlazení všech fluktuací, jejichž velikost je menší než tři mřížkové jednotky. Druhý krok odstraní fluktuace mezi 3 a 9 mřížkovými jednotkami, třetí mezi 9 a 27 a tak dále. Když je počáteční teplota nad T_c , spiny začínají vypadat s každou iterací stále neuspořádaněji a fluktuace větších rozměrů mizí. Když je teplota menší než T_c , jsou spiny stále uspořádanější a přežívající fluktuace jsou opět malých rozměrů. Když je však počáteční teplota přesně T_c , zůstávají fluktuace velkých rozměrů přítomny ve všech stadiích. Protože blokspinová transformace neovlivňuje při Curieově teplotě strukturu systému na velkých vzdálenostech, říkáme, že systém je při této teplotě ve fixním bodě.

$\tau = .997_c$

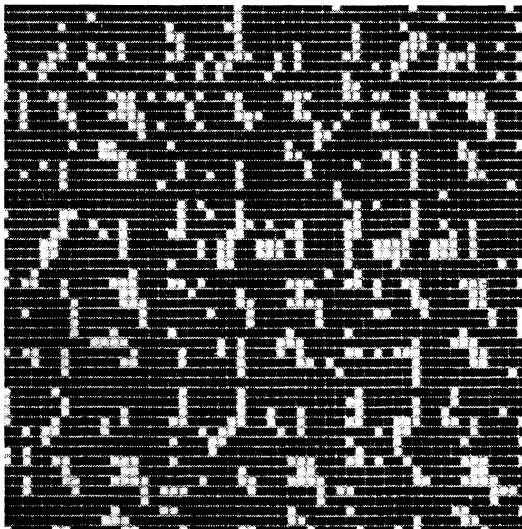
PŮVODNÍ MŘÍŽKA



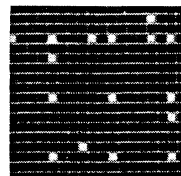
BLOKOVÉ SPINY PRVNÍ GENERACE



BLOKOVÉ SPINY DRUHÉ GENERACE



BLOKOVÉ SPINY
TŘETÍ GENERACE

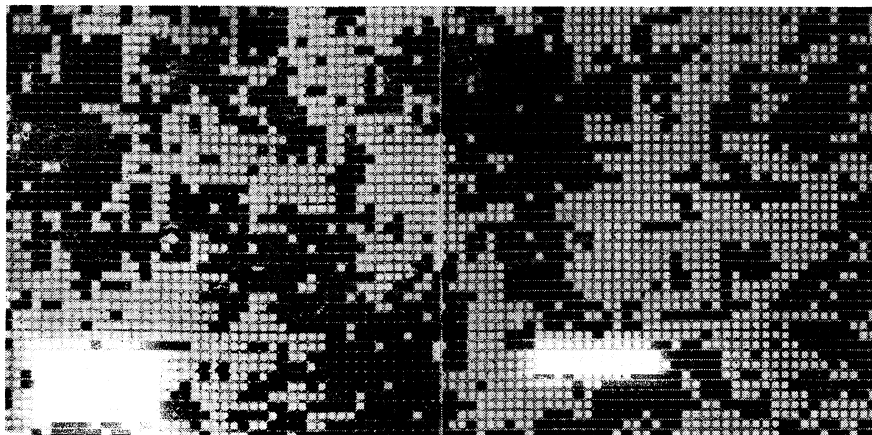


BLOKOVÉ
SPINY
ČTVRTÉ
GENERACE

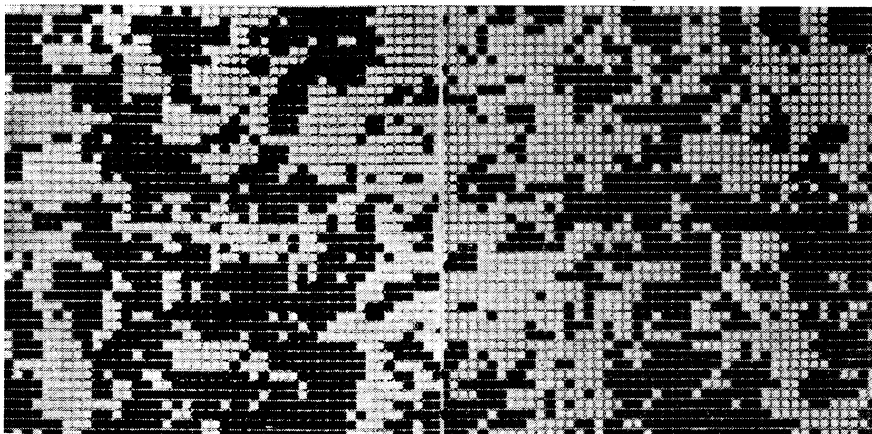


$T = T_c$

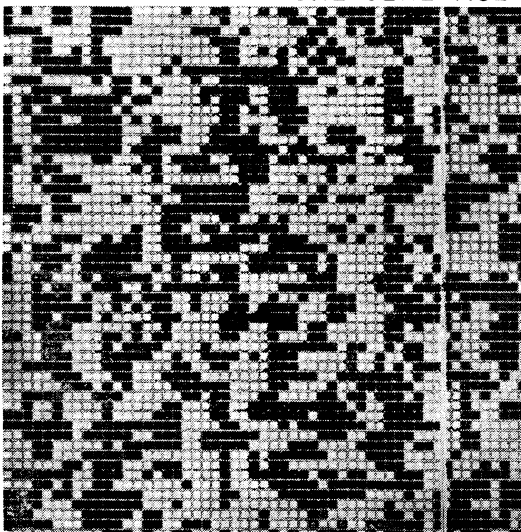
PŮVODNÍ MŘÍŽKA



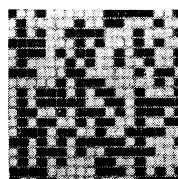
BLOKOVÉ SPINY PRVNÍ GENERACE



BLOKOVÉ SPINY DRUHÉ GENERACE



BLOKOVÉ SPINY TŘETÍ GENERACE

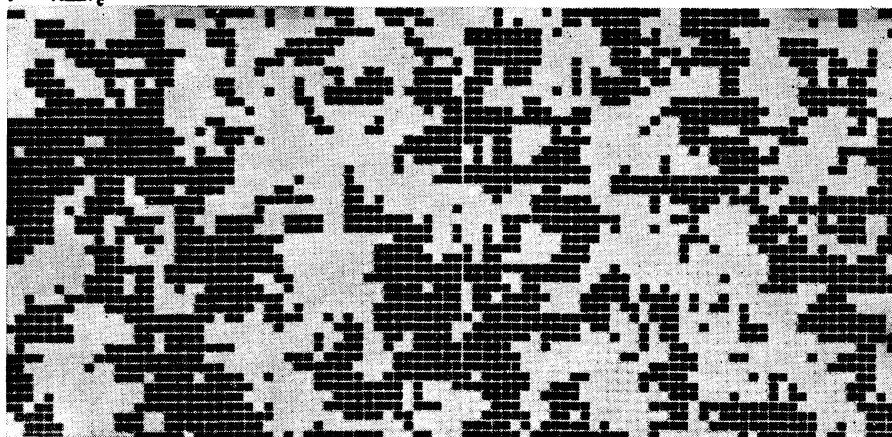


BLOKOVÉ SPINY ČTVRTÉ GENERACE

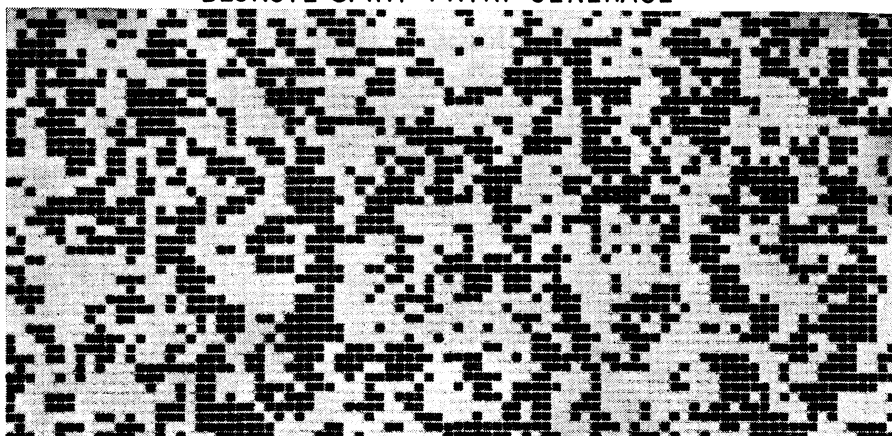


$T = 1.22T_c$

PŮVODNÍ MŘÍŽKA



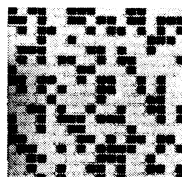
BLOKOVÉ SPINY PRVNÍ GENERACE



BLOKOVÉ SPINY DRUHÉ GENERACE



BLOKOVÉ SPINY TŘETÍ GENERACE



BLOKOVÉ SPINY ČTVRTÉ GENERACE



metry mají rozdílné hodnoty, je při tom důležité, že mřížka blokových spinů má jinou teplotu než původní Isingův model.

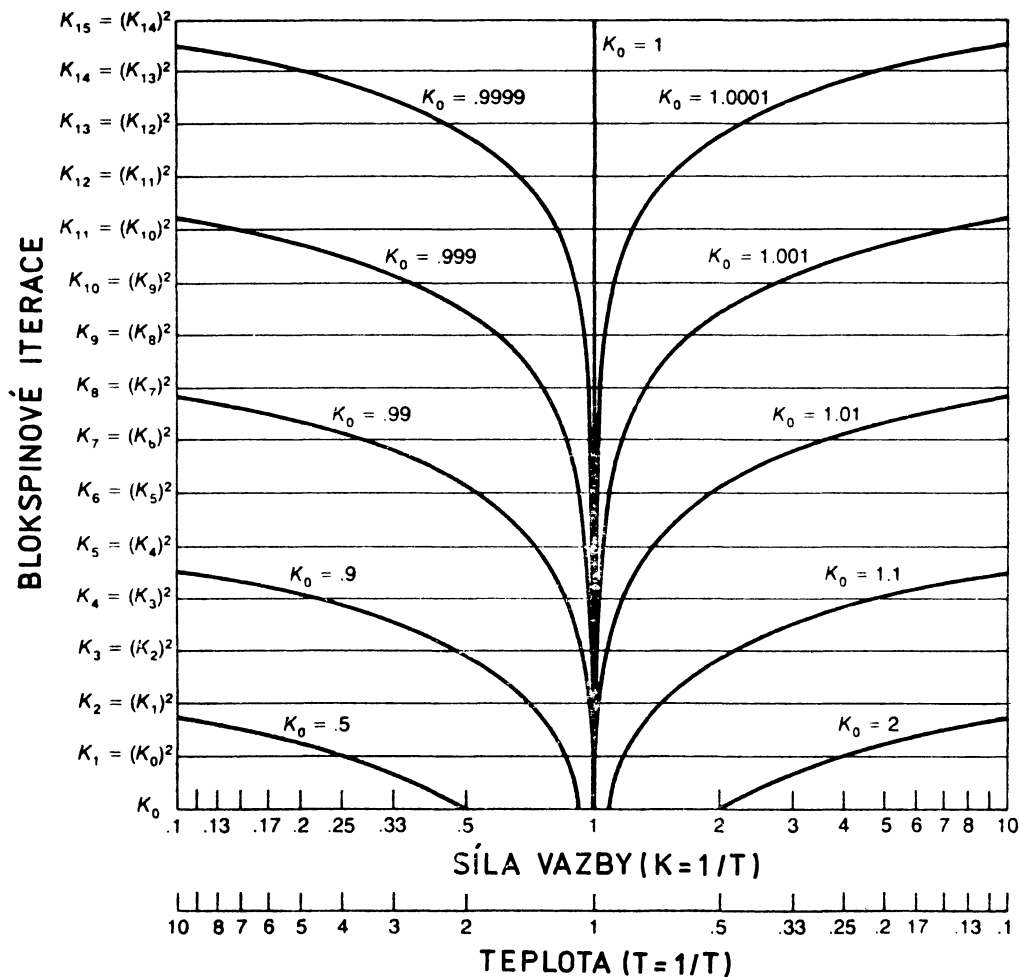
Jakmile byl nalezen soubor vazbových parametrů, které správně popisují rozdělení pravděpodobnosti blokových spinů, lze z blokových spinů sestavit mřížku libovolné velikosti. Nová mřížka je stejného typu jako mřížka původní, ale pravděpodobnost dané orientace spinu v každém vrcholu je nyní určena nově nalezenými vazbovými parametry, a nikoli jediným parametrem původního Isingova modelu. Provést výpočet metodou renormalizační grupy znamená nyní opakovat celou proceduru znovu a znovu, vždy s novým systémem blokových spinů v úloze výchozí mřížky. Opět se vytvoří bloky devíti spinů a v některé malé oblasti, jakou je například čtverec 36 spinů, se najdou pravděpodobnosti všech možných konfigurací. S pomocí tohoto výpočtu se pak definuje rozdělení pravděpodobnosti pro druhou generaci blokových spinů, jejichž orientace je opět určena principem většiny. Při zkoumání blokových spinů druhé generace se ukáže, že vazbové parametry se opět změnilly, takže je znovu třeba přiřadit každému parametru novou hodnotu. Jakmile jsou tyto nové hodnoty známy, je možné zkonstruovat další mřížkový systém (třetí generace) a celý postup potom znovu opakovat.

Podstatná vlastnost této cyklické operace záleží v tom, že dává informaci o chování odlišných, ale přesně definovanými vztahy svázaných spinových systémů, v nichž fundamentální délková škála je s každým krokem větší a větší. První blokspinová transformace vyhladí fluktuace nejmenších rozměrů, ale fluktuace o něco větší, přibližně v rozsahu tří původních mřížkových konstant, jsou jasněji patrné. Po druhé transformaci představuje každý blokový spin 81 spinů z bloku 9×9 původní mřížky a dochází k vystředování všech fluktuací až po tuto velikostní škálu, takže zbývají jen fluktuace větší než 9 mřížkových jednotek. Následující krok vede k vyhlazení všech fluktuací s rozměry mezi 9 a 27 mřížkovými jednotkami, další mezi 27 a 81. Nakonec jsou vyhlazeny fluktuace všech velikostí až po korelační délku. Výsledný spinový systém popisuje pouze ty vlastnosti původního Isingova systému, které se týkají velkých vzdáleností; všechny efekty fluktuací na menších vzdálenostech byly potlačeny.

O užitečnosti techniky blokových spinů se lze přesvědčit prostým okem, a to jednoduchým porovnáním různých transformačních fází modelu. Pouhý pohled na konfiguraci Isingových spinů těsně pod Curieovou teplotou stěží odhalí, že model je mírně zmagnetizován. Při takové teplotě je jen malý přebytek jedné spinových orientací nad druhými a možnost pozorovat tento přebytek je znesnadněna mnoha fluktuacemi menších rozměrů. Po několikanásobném provedení blokspinové transformace však menší fluktuace zmizí a magnetizace na velké škále se stává očividnou.

Fyzikální smysl blokspinové transformace je zřejmý ze způsobu, jakým se mění vazby mezi spiny. Pravidla pro odvození nových vazeb ze starých jsou často komplikovaná, ale účinky této změny lze ilustrovat na jednoduchém příkladu. Ačkoli následující předpoklad není realistický, budu rozebírat model, ve kterém nebude třeba zavádět žádné vazby s dosahem větším než původní interakce nejbližších sousedů. Jedinou změnou vazby bude změna hodnot parametru K , což je ekvivalentní změně teploty. Nechť má navíc tato změna teploty jednoduchý tvar: V každé fázi procedury položíme sílu vazby nové mřížky rovnu kvadrátu síly vazby staré mřížky. Označíme-li nový vazbový parametr K' , bude pro něj platit vztah $K' = K^2$.

Předpokládejme, že v nějakém počátečním stavu je K rovno $1/2$ (což znamená, že jsme přiřadili teplotě hodnotu 2 v libovolných, blíže neurčených jednotkách). V „řídce“ mřížce vytvořené po aplikaci blokspinové transformace bude K nahrazeno K' s hodnotou $1/2^2$, to je $1/4$. Opakování transformace vede postupně k hodnotám $1/16$, $1/256$



SOUČÁSTÍ RENORMALIZAČNĚ GRUPOVÉ TRANSFORMACE je změna vazby mezi spiny. Změna síly vazby, ke které dochází při každé iteraci, může být různého charakteru, ale zde se omezíme na jednoduchý příklad: Jestliže síla vazby původní mřížky je dána hodnotou K , je síla vazby nové mřížky K^2 . Každá vazba s počáteční hodnotou menší než 1 musí vést k nulové limitě. Mezní hodnota $K = 1$ zůstává i po libovolně vysokém počtu opakování transformace nezměněna. Protože teplota může být definována (ve vhodných jednotkách) jako převrácená hodnota síly vazby, lze na renormalizačně grupovou transformaci pohlížet jako na zformulování vztahu mezi původní mřížkou a novou, „zředitou“ mřížkou, mající obecně odlišnou sílu vazby, a tedy jinou teplotu. Pouze ve fixním bodě, který odpovídá Curieově teplotě, zůstávají vazba a teplota invariantní s hodnotou 1.

atd., které tvoří posloupnost prudce konvergující k nule. Po každé transformaci přechází spinový systém v nový systém, který má nejenom řidší mřížku, ale také slabší vazbu mezi spiny. Poněvadž K je rovno $1/T$, teplota po každém kroku narůstá a mřížka v limitě přechází k nekonečné teplotě a libovolným spinům.

Jestliže za počáteční hodnotu vazbového parametru vezmeme 2 (takže teplota je rovna $1/2$), vazba po každé dílčí transformaci vzrůstá. Po první blokspinové transformaci je síla vazby 4, potom 16, pak 256. Po nekonečně krocích se vazba stává nekonečnou. Zároveň samozřejmě klesá teplota a systém se blíží ke stavu s nulovou teplotou, při které jsou všechny spiny orientovány jedním směrem.

Je třeba zdůraznit, že zde nejde o zkoumání jednoho spinového systému při různých teplotách. Nic není ve skutečnosti ohříváno ani ochlazováno. Spíše se dá říci, že na každém stupni je vytvářen nový systém, který se od předchozího liší rozdílnou sadou vazeb mezi spiny. Chování nové mřížky na dlouhých vzdálenostech tak odpovídá chování, jaké bychom pozorovali v původní mřížce při odlišné teplotě.

Existuje jedna počáteční hodnota K , která nevede k řadě konvergující k nekonečnu ani k nule, a to hodnota $K = 1$. Poněvadž $1^2 = 1$, zůstává K' rovno K bez ohledu na to, kolikrát se transformace opakuje. Jestliže $K = 1$, řekneme, že systém je ve fixním bodě, kde postupné uplatňování transformace renormalizační grupy zanechává beze změny všechny podstatné vlastnosti mřížky. Hodnoty $K = 0$ a $K = \infty$ ve skutečnosti také představují fixní body, neboť kvadrát nuly je stále nula a kvadrát nekonečna je nekonečno. Nula a nekonečno se však považují za triviální kritické body, zatímco hodnota $K = 1$ odpovídá kritickému bodu ve vlastním slova smyslu.

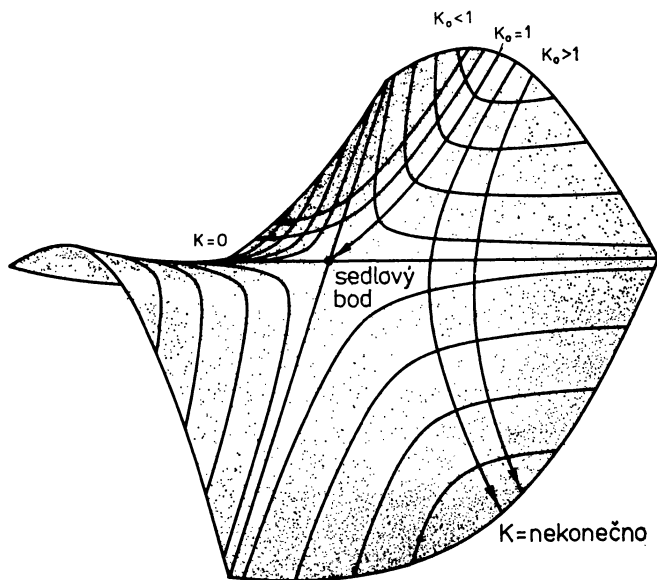
V našem rozboru techniky blokových spinů byly všechny účinky transformace vyjádřeny pomocí jediného parametru, a to síly interakce mezi nejbližšími sousedy K . Ve skutečnosti transformace zavádí mnoho dalších parametrů, z nichž každý odpovídá postupně vazbě na delší vzdálenosti. Všechny možné kombinace hodnot těchto parametrů lze reprezentovat geometricky pomocí vícerozměrného prostoru, v němž vzdálenost měřená ve směru jednotlivých dimenzí odpovídá hodnotám různých parametrů. Každý počáteční stav spinového systému a každá jeho blokspinová transformace jsou reprezentovány bodem jisté nadplochy v tomto parametrickém prostoru.

Při geometrickém popisu metody renormalizační grupy vyniká zvláště názorně význam fixních bodů. Pro dvojrozměrný Isingův model má povrch v parametrickém prostoru charakter horské krajiny s dvěma ostrými štíty a dvěma hlubokými propastmi. Hřebenová linie, která spojuje vrcholy, a spádnice, která spojuje propasti, se vzájemně protínají v půli cesty v sedlovém bodě (viz obrázek). Jedna propast znázorňuje fixní bod při $K = 0$, druhá fixní bod při $K = \infty$. Kritický fixní bod leží v částečně nestabilním rovnovážném bodě v sedle.

Transformaci systému z jednoho stavu do druhého lze nyní reprezentovat jako pohyb kuličky kutálející se po ploše. Představme si film znázorňující rozfázovaný pohyb kuličky s jednosekundovými intervaly mezi jednotlivými záběry. Každý záběr nechť odpovídá efektu jednoho kroku blokspinové transformace. Příčinou toho, že si můžeme představovat kuličku v pohybu, je provádění transformace, avšak rychlost a směr kuličky jsou zcela určeny sklonem plochy v každém bodě, kterým kulička prochází.

Předpokládejme, že kulička je na počátku poblíž vrcholu jedné hory těsně vedle hřebenové linie. Nejprve se bude pohybovat rychle, protože hora je v okolí vrcholu strmá, a bude směřovat zhruba do oblasti sedlového bodu. Jakmile se kulička přiblíží k sedlu, sklon svahu se zmírní a kulička zpomalí svůj pohyb, ale nikdy se zcela nezastaví. Naopak poněvadž začala svůj pohyb mimo hřebenovou linii, ve skutečnosti nikdy nedosáhne přesného sedlového bodu. Místo toho se prudce odkloní na stranu a začne se opět zrychlovat, tentokrát při sjíždění do propasti.

Trajektorie kuličky je totožná s křivkou, po níž se pohybuje bod reprezentující systém Isingových spinů opakovaně transformovaný blokspinovou metodou. Počáteční poloha těsně mimo hřebenovou linii odpovídá počátečním hodnotám vazbových parametrů při teplotě těsně pod kritickou teplotou nebo těsně nad ní. V našem zjednodušeném příkladě s jediným parametrem to znamená, že hodnota K je buď mírně větší, nebo poněkud menší než 1. Položit vazbový parametr rovný jedné znamená zvolit počáteční polohu kuličky přesně na hřebenové linii. Kulička pak směřuje přímo do sedlového bodu, to je do kritického fixního bodu. Pohyb je opět nejprve prudký a postupně se zpomaluje, když se kulička blíží k sedlu. Tentokrát však kulička zůstane v rovnovážném bodě mezi dvěma svahy. I po libovolně vysokém počtu dílčích transformací zůstává ve fixním bodě.



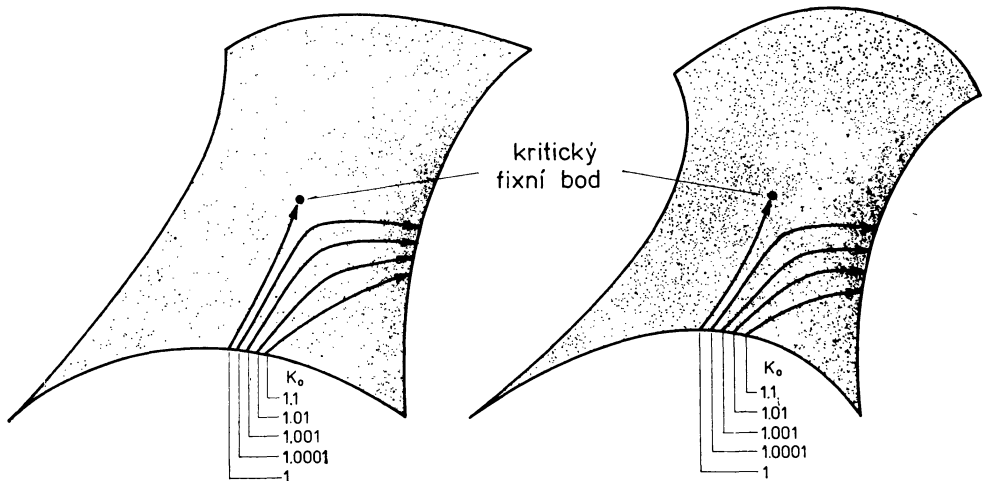
VÝVOJ SPINOVÉHO systému jako důsledek opakované renormalizačně grupové transformace lze znázornit jako pohyb bodu po nadploše zkonstruované v hypotetickém více-rozměrném prostoru; jde o tzv. parametrický prostor. Tvar nadplochy je obecně určen všemi vazbami mezi blokovými spiny; v našem případě uvažujeme pouze vazbu mezi nejbližšími sousedy K . Plocha má dva vrcholy a dvě jámy, mezi nimiž je sedlový bod. Trajektorie, kterou opisuje bod reprezentující stav spinového systé-

mu, je beze zbytku určena sklonem plochy. Počáteční hodnota K mírně větší než 1 odpovídá počáteční poloze poněkud odchýlené na jednu stranu od hřebenové linie, která spojuje oba vrcholy. Při uskutečňování blokspinových transformací se bod pohybuje dolů s kopce, projde poblíž sedlového bodu a pokračuje do jedné z jam, která odpovídá nekonečnému K . Počáteční hodnota K o něco menší než 1 vede k podobné trajektorii na druhé straně hřebenové linie, která končí v druhé jámě odpovídající $K = 0$. Když je hodnota K přesně 1, bod zůstává po celou dobu na hřebenové linii a dostává se do rovnovážné polohy v sedlovém bodě. Obě jámy jsou fixními body (protože hodnoty $K = 0$ a $K = \infty$ se při opakovaných transformacích nemění), avšak takovéto fixní body se považují za triviální. Sedlovým bodem je definován kritický fixní bod.

Volbou počáteční velikosti K dostatečně blízké kritické hodnotě lze dosáhnout toho, že trajektorie na sedlové ploše v parametrickém prostoru prochází okolo sedlového bodu libovolně blízko. V námi uvažovaném příkladě, kde kritická hodnota K je 1, může počáteční velikost K být například 0,9999, což je číslo, které musíme několikrát umocnit na druhou, než se nějak viditelně změní. Z toho vyplývá, že trajektorie se dostane velmi těsně ke kritickému fixnímu bodu před tím, než se zakříví směrem k prostasti odpovídající vysokým teplotám.

Zkoumáním většího počtu takových trajektorií lze zmapovat topografii parametrické nadplochy v okolí sedlového bodu. Tím, co určuje, jak se systém přibližuje k fixnímu bodu a jak se od něho vzdaluje, je zakřivení nadplochy. Se znalostí zakřivení lze spočítat, jak se vlastnosti systému mění při změně počátečních hodnot vazbového parametru a teploty. A to je přesně informace potřebná pro chápání kritických jevů.

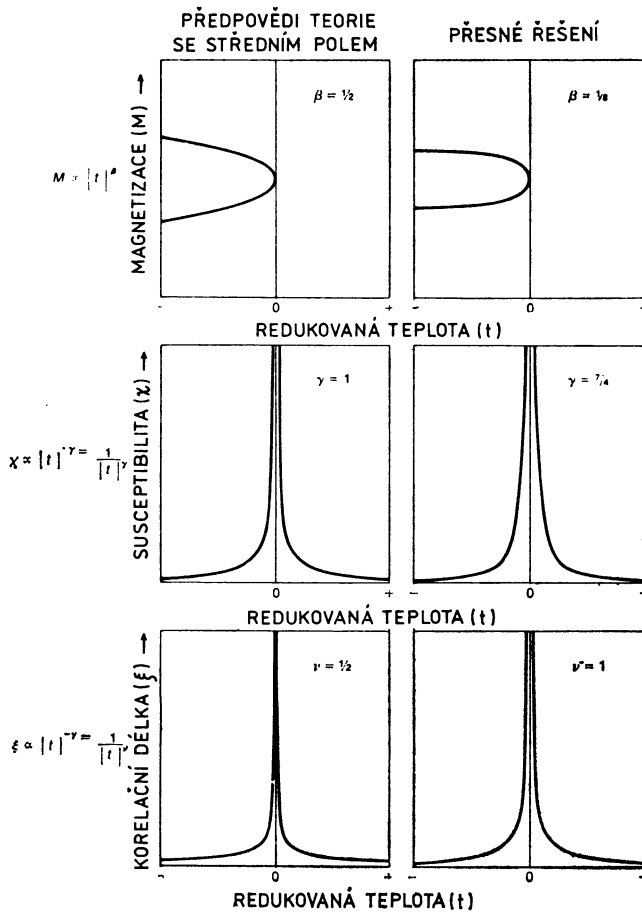
Makroskopické vlastnosti termodynamického systému poblíž kritického bodu jsou určeny teplotou. Přesněji řečeno, vlastnosti jako spontánní magnetizace, susceptibilita a korelační délka jsou funkcemi rozdílu, o který se teplota systému liší od kritické teploty T_c . Z tohoto důvodu je výhodné definovat kritickou teplotu takovým způsobem, že všechny kritické body jsou vzhledem k teplotě ekvivalentní. Vhodnou veličinou je redukováná teplota t , definovaná jako rozdíl mezi skutečnou a kritickou teplotou vydělený kritickou teplotou – t je tedy rovna $(T - T_c)/T_c$. Na běžné teplotní stupnici,



SKLON PARAMETRICKÉHO POVRCHU v okolí kritického fixního bodu určuje makroskopické vlastnosti Isingova modelu. Jestliže znázorníme trajektorie pro mnoho počátečních hodnot K poblíž kritické hodnoty (která je v našem případě $K = 1$), je sklon plochy v sedlovém bodě faktorem, který určuje, jak rychle se trajektorie odkloní směrem k triviálnímu fixnímu bodu $K = 0$ nebo $K = \infty$. Jestliže povrch je dostatečně plochý (obrázek vlevo), trajektorie s počáteční hodnotou K jako 1,01 projde ve velmi těsné blízkosti sedlového bodu. Jestliže je povrch více zakřiven (obrázek vpravo), analogická trajektorie se ohýbá směrem do jámy prudčeji. Poněvadž teplota je rovna převrácené hodnotě K , sklon poblíž fixního bodu určuje, jak se vlastnosti systému změní při odchýlení teploty od teploty kritické.

jakou je například stupnice Kelvinova, nabývají kritické teploty různých systémů různých číselných hodnot, ale redukovaná teplota je stejná pro všechny systémy, totiž nula.

Všechny kritické vlastnosti jsou úměrné absolutní hodnotě redukované teploty v nějaké mocnině. Problém, jak popsat kritické jevy, se tak redukuje na určení velikosti této mocniny, nebo, jinak řečeno, na nalezení kritických exponentů. Například magnetizace spinového systému M je dána vztahem $M \sim |t|^\beta$, kde β je kritický exponent a kde svislé čáry znamenají absolutní hodnotu t . Magnetická susceptibilita je úměrná $1/|t|^\gamma$, kde γ je další exponent. Korelační délka souvisí s třetím exponentem, v vztahem stejného tvaru je úměrná $1/|t|^\nu$.



KRITICKÉ EXPONENTY vyjadřují závislost makroskopických vlastností na tom, do jaké míry se teplota systému odlišuje od kritické teploty. Tato teplotní závislost se nejlépe vyjádří pomocí redukované teploty t , definované vztahem $t = T - T_c/T_c$. Všechny makroskopické vlastnosti jsou pak úměrné absolutní hodnotě t v nějaké mocnině. Exponent této mocniny se nazývá kritickým exponentem dané veličiny. Exponenty a mocninné závislosti v grafech na levé straně obrázku jsou výsledky předpovědi teorie se středním polem, která nebere v úvahu fluktuační efekty. Exponenty v grafech na pravé straně jsou získány z přesného řešení pro dvojrozměrný Isingův model, které našel roku 1944 Lars Onsager z univerzity v Yale. Exponenty charakterizují změnu vlastností systému při změně teploty nebo síly vazby. Tato informace je obsažena ve sklonu nadplochy v parametrickém prostoru poblíž kritického fixního bodu. Exponenty mohou být ze sklonu plochy určeny a výpočty provedené autorem a dalšími pro dvojrozměrný Isingův model vedly k hodnotám blízkým výsledkům Onsagerova řešení.

Prvními pokusy zformulovat matematický popis kritických jevů byly teorie typu známého nyní jako teorie se středním polem. První z nich byla vytvořena v roce 1873 J. D. van der Waalsem pro vysvětlení fázových změn v tekutinách. Teorie magnetických fázových přechodů byla navržena roku 1907 Pierrem Weisssem. V roce 1937 zformuloval L. D. Landau z Akademie věd SSSR obecnější typ teorie se středním polem; tím byl vytvořen rámec pro studium mnoha různých fyzikálních systémů. Ve všech takovýchto teoriích je stav libovolné vybrané částice určen vlastnostmi prostředí jako celku, takovými jako například makroskopická magnetizace. Obecně přispívají všechny částice systému stejnoměrně k síle v každém bodě, což je ekvivalentní předpokladu, že síly mají nekonečný dosah.

Teorie se středním polem jsou kvalitativně úspěšné. Vysvětlují důležité vlastnosti fázových diagramů tekutin a feromagnetů včetně nejvýznamnější z nich, a to existence kritických bodů. Avšak kvantitativní předpovědi jsou mnohem méně uspokojivé: teorie dávají nesprávné hodnoty kritických exponentů. Pro β , exponent příslušný spontánní magnetizaci, dává metoda středního pole hodnotu $1/2$, tj. magnetizace se mění jako druhá odmocnina z redukované teploty. Pro exponent γ , související se susceptibilitou, vychází hodnota 1, takže susceptibilita by měla být úměrná $1/|t|$. Pro ν , exponent u korelační délky, vychází $1/2$, takže tato veličina by se měla chovat jako $1/\sqrt{|t|}$.

Exponenty spočítané pomocí teorie se středním polem vedou k plauzibilnímu tvaru každé z funkcí. Magnetizace má při všech teplotách pod kritickým bodem dvě možné hodnoty ($+\sqrt{t}$ a $-\sqrt{t}$) a nad kritickým bodem mizí. Susceptibilita i korelační délka se blíží k nekonečnu pro t blížící se zprava i zleva k nule. Je však známo, že konkrétní hodnoty exponentů získané ze středního pole jsou nesprávné.

Pro dvojrozměrný Isingův model jsou kritické koeficienty přesně známy z Onsagerova řešení. Správné hodnoty jsou $\beta = 1/8$, $\gamma = 7/4$ a $\nu = 1$, což se podstatně liší od předpovědi teorie se středním polem a vede k závěru, že skutečný systém má podstatně odlišné chování. Magnetizace je například úměrná nikoli druhé, ale osmé odmocnině z redukované teploty t . Obdobně susceptibilita je dána převrácenou hodnotou nikoli t , ale t v mocnině 1,75, což znamená, že divergence u kritického bodu je strmější a silnější.

Příčinu tohoto kvantitativního selhání teorií se středním polem není těžké zjistit. Nekonečný dosah sil uvažovaný v těchto teoriích není ani průměrnou aproximací skutečnosti. Ne všechny spiny přispívají stejně – nejbližší sousedé jsou mnohem důležitější než kterékoli z ostatních spinů. Tutéž námitku lze vyjádřit i jinak: Teorie se středním polem nejsou schopny brát v úvahu fluktuace v orientaci spinů nebo případně v hustotě tekutiny.

Při výpočtu metodou renormalizační grupy jsou kritické exponenty určeny sklonem parametrické nadplochy v okolí fixního bodu. Sklon plochy graficky reprezentuje rychlost změny, a tak sklon poblíž fixního bodu určuje rychlost, s jakou se vlastnosti systému mění, když se teplota (nebo vazbový parametr) pohybuje v malém rozmezí okolo kritické hodnoty. Popsat takovou změnu systému s teplotou je právě úlohou kritických koeficientů; je tedy pochopitelné, že mezi velikostí exponentů a sklonem plochy existuje vztah.

Renormalizačně grupové výpočty pro dvojrozměrný Isingův model provedlo několik autorů. V roce 1973 využili Niemeier a van Leeuwen blokspinové metody ke studiu

vlastností systému Isingových spinů zkonstruovaného na trojúhelníkové mřížce. Já sám jsem aplikoval na čtvercovou mřížku poněkud odlišnou renormalizačně grupovou techniku, nazývanou spinová decimace. Při spinové decimaci se místo sestavování bloků z několika spinů drží všechny spiny mřížky až na několik fixní a přitom se počítá rozdělení pravděpodobnosti pro tyto zbývající spiny. Tyto výpočty byly mnohem komplikovanější než náš výše popsaný modelový výpočet. V mé práci bylo například třeba zahrnout 217 různých vazeb mezi spiny. Kritické exponenty získané těmito výpočty však souhlasí s Onsagerovými hodnotami s přesností přibližně 0,2 procenta.

Protože pro dvojrozměrný Isingův model je známo přesné řešení, je aplikace renormalizační grupy na něj akademickou záležitostí. Pro systém Isingových spinů na trojrozměrné mřížce však přesné řešení není k dispozici. Cyril Domb z University College v Londýně a mnoho dalších vyvinuli metodu pro nalezení přibližných hodnot exponentů v trojrozměrném případě. Metoda spočívá v tom, že se nejdříve určí s velkou přesností vlastnosti systému při vysoké teplotě, a potom jsou tyto veličiny extrapolovány ke kritické teplotě. Dosud nejlepší výsledky získané touto metodou dávají hodnoty exponentů $\beta = 0,33$, $\gamma = 1,25$ a $\nu = 0,63$.

Ačkoli extrapolace od vysokoteplotních řešení vede k dobré aproximaci kritických exponentů, prakticky nedovoluje porozumět chování systému v okolí kritického bodu názorně. Renormalizačně grupový výpočet dává v podstatě tytéž hodnoty exponentů, ale umožňuje navíc pochopit důležité univerzální rysy kritického chování.

Dvě důležité skutečnosti týkající se exponentů trojrozměrného Isingova modelu stojí za zdůraznění. Za prvé, hodnoty exponentů se liší od hodnot pro dvojrozměrný model. V teoriích se středním polem naopak nemá dimenze prostoru vliv na výsledky, takže kritické exponenty mají tytéž hodnoty v libovolném prostoru. Druhým překvapivým zjištěním je, že exponenty nejsou nutně celá čísla nebo zlomky malých celých čísel, jako je tomu v teoriích se středním polem. Mohou nabývat dokonce i iracionálních hodnot.

Jestliže nás překvapuje, že kritické exponenty jsou ovlivňovány dimenzí prostoru, je stejně pozoruhodné, že některé další vlastnosti modelu nemají na exponenty absolutně žádný vliv. Příkladem takové nepodstatné vlastnosti je struktura mřížky. Na chování dvojrozměrného Isingova modelu nemá žádný vliv, zda mřížka je pravouhlá, jako tomu bylo v mé práci, nebo trojúhelníková jako v modelu zkoumaném Niemeierem a van Leeuwenem. Kritické exponenty jsou stejné. V důsledku téže vlastnosti má v případě reálného feromagnetu velké množství různých krystalových struktur totožné kritické chování.

Nedůležitost struktury mřížky a jiných makroskopických vlastností lze pochopit na základě intuice. Změna tvaru mřížky má velký vliv na chování na škále srovnatelné s mřížkovou konstantou, avšak při zvětšování škály se význam tohoto efektu zmenšuje. V renormalizačně grupových výpočtech jsou fluktuace s typickou velikostí mřížkové konstanty vyhlazeny po prvních několika málo krocích, a tak modely s mnoha rozdílnými mřížkami mají stejné kritické chování. Renormalizační grupa dovoluje pochopit stejnou velikost kritických exponentů v mnoha různých systémech jako důsledek topografie nadplochy v parametrickém prostoru. Každá mřížková struktura je reprezento-

Tabulka

Třída univerzality	Teoretický model	Fyzikální systém	Parametr uspořádání
$d = 2$ $n = 1$	Isingův model ve dvou rozměrech	Tenké povrchové vrstvy	Povrchová hustota
$n = 2$	XY model ve dvou rozměrech	Tenká vrstva hélia 4	Amplituda supratekuté fáze
$n = 3$	Heisenbergův model ve dvou rozměrech		Magnetizace
$d > 2$ $n = \infty$	„Sférický“ model	Žádný	
$d = 3$ $n = 0$	Neprotínající se náhodné procházky	Konformace polymerů	Hustota konců řetězců
$n = 1$	Isingův model ve třech rozměrech	Jednoosý feromagnet	Magnetizace
		Tekutina blízko kritického bodu	Rozdíl mezi hustotami fází
		Směs kapalin	Rozdíl koncentrací
		Slitina blízko přechodu uspořádaný – neuspořádaný stav	Rozdíl koncentrací
$n = 2$	XY model ve třech rozměrech	Planární feromagnet	Magnetizace
		Hélium 4 poblíž supratekutého přechodu	Amplituda supratekuté fáze
$n = 3$	Heisenbergův model ve třech rozměrech	Izotropní feromagnet	Magnetizace
$d \leq 4$ $n = -2$		Žádný	
$n = 32$	Kvantová chromodynamika	Kvarky uvnitř protonů, neutronů apod.	

vána rozdílnou pozicí v parametrickém prostoru, ale při kritické teplotě odpovídá každé mřížce bod někde na hřebenové linii. Při opakované renormalizačně grupové transformaci konvergují všechny takové systémy do stejného fixního bodu, totiž do kritického bodu.

HYPOTÉZA UNIVERZALITY říká, že rozdílné fyzikální systémy mají v blízkosti kritických bodů stejné chování. Ve většině případů jsou jedinými faktory, které určují kritické vlastnosti, počet prostorových dimenzí d a počet dimenzí parametru uspořádání n . Pro magnetické systémy je parametrem uspořádání magnetizace a počet dimenzí tohoto parametru je dán počtem komponent potřebných k popisu spinového vektoru. Většina systémů se stejnými hodnotami d a n patří do stejné třídy univerzality a má shodné kritické exponenty. Například feromagnetů připomínající trojrozměrný Isingův model tekutiny, směsi kapalin a některé slitiny patří vesměs do třídy s $d = 3$ a $n = 1$. Grafy popisující jejich vlastnosti v blízkosti kritického bodu by měly mít stejný tvar. Interpretace některých dalších hodnot d a n je méně zřejmá a systémy hodnoty jako $n = -2$ mohou sice být definovány matematicky, ale neodpovídají žádnému známému fyzikálnímu systému. XY modely a Heisenbergovy modely jsou podobné Isingovu modelu, ale popisují feromagnetů, jejichž spinové vektory mají postupně dvě a tři komponenty.

Představu, že některé parametry jsou pro kritické jevy irelevantní, lze rozšířit i na jiné systémy než feromagnetů. Tekutina poblíž kritického bodu má například stejné vlastnosti jako trojrozměrný Isingův model feromagnetu. Abychom porozuměli této shodě, je třeba nalézt určitou korespondenci mezi vlastnostmi tekutiny a feromagnetu. Magnetizaci, která je dána počtem spinů vzhůru minus počet spinů dolů, odpovídá v tekutině rozdíl hustot – hustota kapalně fáze minus hustota páry. Stejně jako magnetizace mizí při Curieově teplotě, mizí při kritické teplotě tekutiny rozdíl hustot. Tyto veličiny – magnetizace a rozdíl hustot – se nazývají parametry uspořádání příslušných systémů. Susceptibilita magnetu, což je změna magnetizace při malé změně vnějšího magnetického pole, je analogická stlačitelnosti tekutiny, to je změně hustoty způsobené malou změnou tlaku. Stejně jako susceptibilita i stlačitelnost se v kritickém bodě stává nekonečnou. Kritické chování tekutiny a trojrozměrného Isingova modelu jsou identické v tom, že jim odpovídá stejná nadplocha v parametrickém prostoru. Systémy mají různé výchozí pozice na nadploše, ale směřují do téhož sedlového bodu, a mají tedy stejné kritické exponenty.

Podobnost v kritickém chování tekutin a feromagnetů je příkladem platnosti obecné hypotézy nazývané univerzalita kritických bodů. Podle této hypotézy určují kritické chování většiny systémů pouze dvě veličiny – počet prostorových dimenzí a dimenzionalita parametru uspořádání. Tyto veličiny se označují písmeny d a n . Předpokládá se, že všechny systémy mající stejné hodnoty d a n jsou reprezentovány toutéž nadplochou v parametrickém prostoru a mají stejné kritické exponenty. Řekneme, že takové systémy patří do stejné třídy univerzality.

Není obtížné určit počet dimenzí prostoru, ale určení dimenzionality parametru uspořádání vyžaduje opatrnější přístup. Ve spinových systémech, kde parametrem uspořádání je magnetizace, je n rovno počtu komponent potřebných pro zadání spinového vektoru. Vektor Isingova spinu se dá orientovat podél jenom jedné osy, a proto má jenom jednu komponentu. Parametr n Isingova modelu je roven jedné. Spinový vektor, který může zaujímat libovolnou orientaci v rovině, má dvě komponenty, které jsou obvykle určeny projekcemi vektoru na dvojici os, které rovinu definují. Podobně

vektor, který může směřovat kamkoli v trojrozměrném prostoru, má tři komponenty, takže n je rovno třem.

Pro trojrozměrný Isingův model je $d = 3$ a $n = 1$. Běžné tekutiny patří do stejné třídy univerzality. Prostor, ve kterém je tekutina, má nesporně tři dimenze. Parametr uspořádání – rozdíl v hustotě mezi kapalnou a plynnou fází – je veličinou, která je určena pouze svou velikostí, a má tedy jenom jednu komponentu. Lze ji popsat jediným číslem stejně jako hodnotu Isingova spinu.

Do této třídy univerzality patří i několik dalších fyzikálních systémů. Směs dvou kapalin, například oleje a vody, vykazuje kritické chování poblíž teploty, kde obě kapaliny ve směsi se začínají dokonale mísit; tato teplota se nazývá bod konsoluce. Při teplotách nižších než bod konsoluce se směs rozdělí do dvou fází a parametr uspořádání je definován jako rozdíl koncentrace obou fází, jako další veličina, kterou lze vyjádřit jediným číslem. U slitiny jako mosaz dochází k přechodu mezi uspořádanou fází, kde oba kovy tvořící slitinu obsazují střídavě a rovnoměrně uzly regulární mřížky, a neuspořádanou fází, ve které je distribuce komponent méně pravidelná. Parametrem uspořádání takového systému je opět rozdíl koncentrace, takže $n = 1$. Dá se očekávat, že všechny tyto systémy mají stejné kritické exponenty jako trojrozměrný Isingův model. Platí to i pro některé takové reálné feromagnet, které se nejsnadněji zmagnetizují ve směru jenom jedné z os. Existující experimentální údaje tyto předpovědi potvrzují.

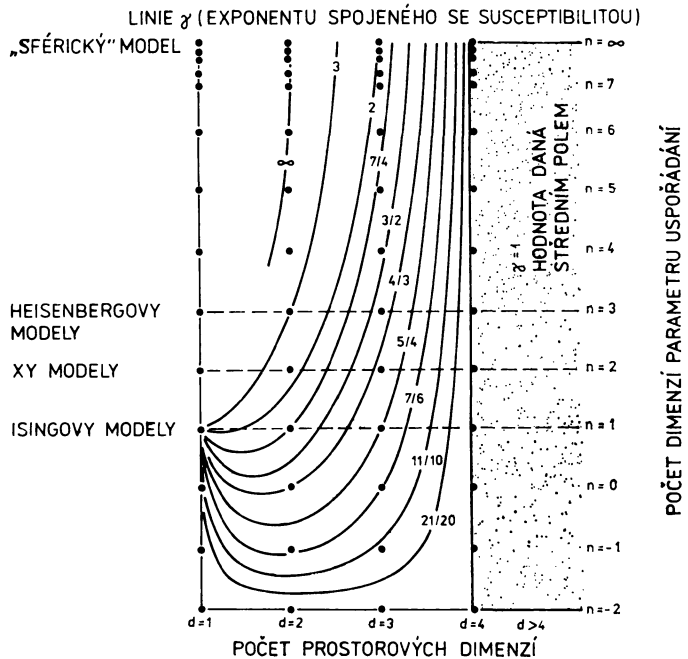
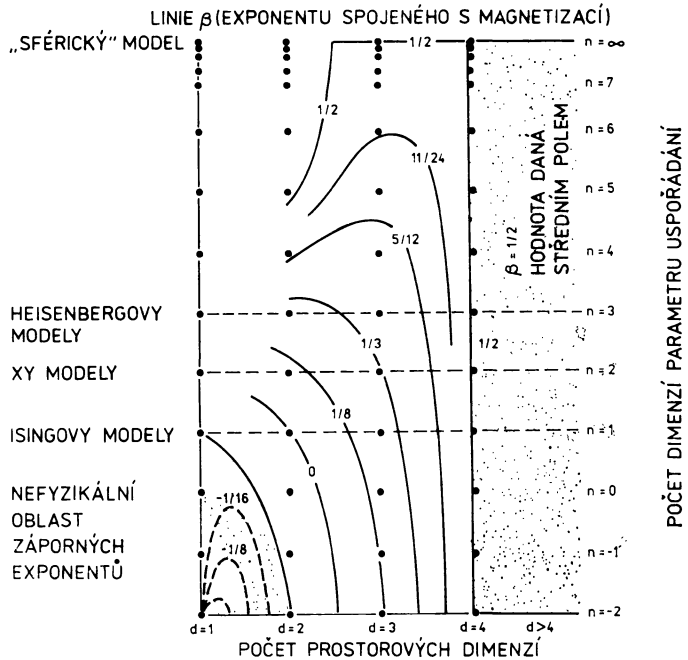
Hypotéza univerzality by byla triviální, kdyby kritické exponenty nabývaly pouze hodnot celých čísel nebo prostých zlomků jako $1/2$. Takové exponenty se vyskytují v mnoha fyzikálních zákonech, kde není žádný rozumný důvod k postulování nějakého vztahu mezi nimi. V teoriích gravitace i elektromagnetismu se setkáváme se zákonem převrácených kvadrátů (exponent rovný -2), avšak taková koincidence ještě nedokazuje, že obě síly mají něco společného. Zdá se však, že souhlas hodnot exponentů má mnohem hlubší význam, jestliže nejde o celá čísla, ale o hodnoty jako $0,63$. To, že takovýchto velikostí nabývají exponenty mnoha různých systémů, nemůže být náhoda. Svědčí to naopak o tom, že všechny detaily fyzikální struktury, které odlišují tekutinu od magnetu, jsou méně důležité než geometrické vlastnosti popsané parametry d a n .

Dvojměrný Isingův model ($d = 2$, $n = 1$) je typickým představitelem třídy systémů, které jsou omezeny na dvojměrný prostor. Příkladem takového systému je tenká vrstva kapaliny nebo plyn adsorbovaný povrchem pevné látky. Běžný feromagnet patří do třídy s $d = 3$ a $n = 3$, to znamená, že mřížka je trojrozměrná a každý spin má tři komponenty, takže může být orientován libovolným směrem. Když jsou spiny omezeny tak, aby mohly ležet jenom v rovině, třída univerzality se redukuje na $d = 3$, $n = 2$. Do téže třídy patří i přechod hélia 4 do supratekutého stavu a supravodivé přechody různých kovů.

Jiné třídy univerzality mají hodnoty d a n , jejichž interpretace je poněkud méně očividná. Příklad s $d = 4$ je zajímavý pro fyziku elementárních částic, kde jedna z dimenzí odpovídá časové ose. Pro teoretickou spinovou mřížku nazývanou sférickým modelem, kde jednotlivý spin může nabývat libovolné velikosti a jenom součet všech spinů je omezen, je n efektivně nekonečno. Nepřekrývající se náhodná procházka bodo-

vou mřížkou, to je náhodná procházka, která nikdy neprochází tímtež bodem mřížky více než jednou, popisuje řetězení dlouhořetězcového polymeru v prostoru. Pierre Gilles de Gennes z Collège de France ukázal, že tento problém náleží do třídy univer-

VARIACE KRITICKÝCH EXPONENTŮ s počtem rozměrů prostoru (d) a parametru uspořádání (n) vede k předpokladu, že systémy z různých tříd univerzality mají rozdílné kritické vlastnosti. Exponenty mohou být vyjádřeny jako spojitá funkce d a n , třebaže fyzikálně realizovatelné jsou pouze systémy s celočíselnými hodnotami počtu dimenzí. V prostoru se čtyřmi a více rozměry nabývají všechny kritické hodnoty předpovídáných teorií se středním polem. Tyto grafy připravil Michael E. Fisher z Cornellovy univerzity.



zality s $n = 0$. V teoretických modelech může n nabývat dokonce hodnoty -2 , ačkoliv fyzikální význam záporného počtu vektorových komponent není ani trochu názorný.

Jediné hodnoty d a n , které mohou mít přímý a názorný fyzikální smysl, jsou hodnoty celočíselné. Mimo veškerou pochybnost se to zdá být zejména v případě d , protože na prostor s neceločíselným počtem dimenzí je těžké i jen pomyslet. V renormalizačně grupových výpočtech však d a n vystupují ve vztazích, ve kterých se mohou v jistém rozsahu měnit spojitě. Lze dokonce namalovat graf, do kterého se hodnoty kritických exponentů vynášejí jako spojitě funkce d a n . Exponenty jsou dobře definované nejen pro celočíselné dimenze, ale i pro všechny hodnoty mezi celými čísly. Z grafu je vidět, že exponenty se blíží hodnotám daným teorií se středním polem, pokud se počet prostorových dimenzí blíží čtyřem. Pro d rovné přesně 4 a při všech vyšších hodnotách jsou výsledky středního pole přesné. Tato skutečnost vedla k důležité renormalizačně grupové výpočetní metodě. V této metodě se počet prostorových dimenzí bere jako $4 - \varepsilon$, kde ε je číslo, které se považuje za malé. Kritické exponenty lze pak vyjádřit pomocí nekonečné řady, jejíž členy zahrnují vyšší a vyšší mocniny ε . Jestliže ε je menší než 1, nabývají vysoké mocniny ε malých hodnot a dostatečné přesnosti přiblížení lze dosáhnout zanedbáním všech členů nekonečné řady až na několik prvních.

Tato výpočetní metoda, nazývaná epsilonový rozvoj, byla objevena Michaelem E. Fisherem z univerzity v Cornellu a mnou. Je to obecná metoda pro řešení problémů, které se původně daly řešit pomocí středního pole, a je přirozeným rozšířením Landauovy teorie. Její výsledky mají charakter korekcí k výsledkům daným teorií se středním polem. Technika blokových spinů je názornější, ale metoda epsilonových rozvoje má větší prediktivní sílu.

To, že kritické exponenty se s rostoucím počtem prostorových dimenzí blíží hodnotám středního pole, příliš nepřekvapuje. Fundamentální předpoklad teorie se středním polem záleží v tom, že na velikost síly v každém bodě mřížky mají vliv podmínky v mnoha dalších bodech. Avšak s přibývajícím počtem prostorových dimenzí se zvětšuje počet nejbližších sousedů. V jednorozměrné mřížce má každý bod pouze dva nejbližší sousedy, v dvojrozměrné čtyři, v trojrozměrné šest a v čtyřrozměrné mřížce osm. S rostoucím počtem dimenzí začíná tedy fyzikální situace stále více odpovídat základní hypotéze teorie se středním polem. Zůstává však naprostou záhadou, proč právě $d = 4$ je ostrou hranicí, nad kterou jsou exponenty středního pole přesné.

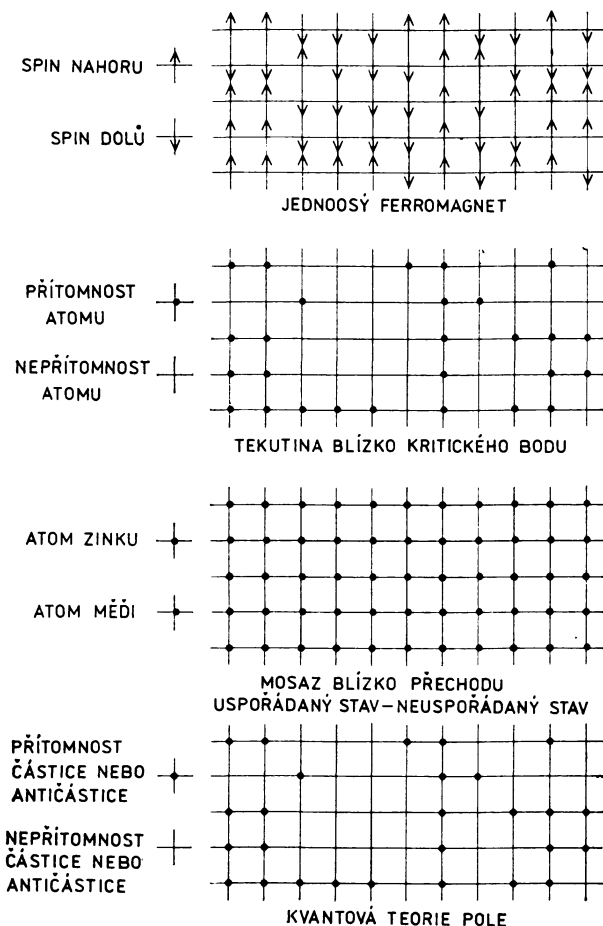
V tomto článku jsem diskutoval především aplikace renormalizační grupy na kritické jevy. Tato technika se však vůbec neomezuje jenom na problémy podobného druhu a ve skutečnosti ani nevznikla v souvislosti s nimi.

Procedura nazývaná renormalizace se objevila ve 40. letech tohoto století jako součást kvantové elektrodynamiky, moderní teorie interakcí mezi elektricky nabitými částicemi a elektromagnetickým polem. Potíže, které se vyskytly při formulaci teorie, lze chápat jako typické problémy několika různých délkových škál. Po nějaký čas to vypadalo, jako by náboj elektronu předpovídaný kvantově mechanickými teoriemi byl nekonečný, což je v příkrém rozporu s výsledky měření. Renormalizovatelná teorie elektromagnetismu se nekonečna nezbavuje — naopak, elektron je definován jako bodová částice, jejíž „holý“ náboj je nekonečný. V kvantové elektrodynamice však holý náboj způsobuje, že se v okolním vakuu vytváří náboje opačné polarity, které většinu původní

nekonečné hodnoty vyruší, takže to, co zbude, je malý „skutečný“ náboj měřený v běžných experimentech.

Představme si testovací částici, pomocí níž se dá měřit náboj elektronu z libovolně malé vzdálenosti. Na velké vzdálenosti částice „cítí“ známý konečný náboj, který je dán rozdílem mezi holým a indukovaným nábojem. Když však částice postupně proniká stínícími vrstvami, měřená hodnota náboje se zvětšuje a při nulové vzdálenosti se stane nekonečnou. Renormalizační procedura dává možnost odečíst nekonečný stínící náboj od nekonečného holého náboje tak, že výsledkem je konečná veličina.

V 50. letech poukázalo několik autorů, mezi nimi Murray Gell-Mann a Francis E. Low, na to, že renormalizační procedura zavedená v kvantové elektrodynamice není jednoznačná, a navrhli obecnější formulaci, která představuje nejstarší verzi renormalizační grupy. V jejich aplikaci této metody na kvantovou elektrodynamiku se objevuje matematická formule, která určuje velikost náboje v libovolné vzdálenosti od elektronu. Formule je potom vyšetřována pro případ, kdy vzdálenost, na které se provádí měření, je v limitě rovna nule. Libovůle procedury spočívá ve volbě počáteční vzdálenosti. Lze pro ni vybrat jakoukoli hodnotu, aniž by to mělo vliv na konečný



MŘÍŽKOVÝ SYSTÉM může být interpretován nejen jako model feromagnetu, ale i dalších fyzikálních systémů, ve kterých se vyskytují fluktuace s mnoha škálami. Isingův model popisuje jednoosý feromagnet, to je takový feromagnet, u kterého je preferována jedna osa magnetizace. Lze jej však aplikovat i k tekutině poblíž kritického bodu, kde každý bod mřížky je buď obsazen atomem, nebo je prázdný, takže fluktuacemi jsou variace v hustotě. Podobnou strukturu má dále slitina jako mosaz, kde každý bod mřížky je obsazen jedním nebo druhým typem atomu kovu. Ve všech těchto systémech jde o termální fluktuace. V kvantových teoriích pole popisujících interakce elementárních částic jsou přítomny kvantové fluktuace vakua, které vedou k spontánnímu vznikání a zanikání párů částice — antičástice. Zjednodušená varianta kvantové polní teorie může být zformulována na mřížce za předpokladu, že ke kreaci a k anihilaci částic a antičástic může docházet pouze v uzlových bodech mřížky.

výsledek, takže existuje nekonečný soubor ekvivalentních renormalizačních procedur.

Matematický pojem „grupa“ je definován jako soubor transformací, které splňují určité požadavky: výsledek skládání libovolných dvou transformací musí být opět členem daného souboru. Příkladem transformací tvořících grupu jsou rotace, protože složením libovolných dvou rotací vzniká opět rotace. V případě renormalizační grupy to znamená, že procedura se může skládat z nekonečného počtu iterací, neboť aplikovat proceduru dvakrát po sobě znamená totéž, co nechat působit výsledek složení dvou transformací. Ve skutečnosti by se renormalizační grupa správně měla nazývat pologrupou, protože pro ni nejsou definovány inverzní transformace. Důvod, proč tomu tak je, je zřejmý, když si vzpomeneme na aplikaci blokspinové techniky na dvojrozměrný Isingův model. Blok devíti spinů se dá zhustit do jednoho průměrného spinu, ale z blokového spinu nelze zrekonstruovat původní konfiguraci, neboť došlo ke ztrátě jisté podstatné informace o systému.

Verze renormalizační grupy rozebíraná v tomto článku se od Gell-Mannovy a Lowovy verze liší z několika stránek. Starší verze renormalizačně grupové techniky se hodí pouze pro problémy, ke kterým lze přistupovat jednou z tradičních metod fyziky – nalezením určitého přibližného vyjádření pro chování systému a vylepšováním aproximací rozvojem řešení do poruchových řad. Navíc původní formulace umožňuje změnu jenom jedné veličiny – ve výše zmíněném příkladu kvantové elektrodynamiky je to náboj elektronu. Z toho plyne, že nadplocha v parametrickém prostoru není mnohazměrná „krajina“, ale pouhá linie. Moderní verze renormalizační grupy, kterou jsem zavedl v roce 1971, umožňuje zabývat se mnohem širším spektrem fyzikálních problémů. Navíc, a to je neméně důležité, dává renormalizační proceduře fyzikální smysl, třebaže se dříve zdála být čistě formální záležitostí.

V několika uplynulých letech jsem se snažil aplikovat novější verzi renormalizační grupy k jednomu z problémů ve fyzice elementárních částic. Jde o problém, jak popsat interakci kvarků, hypotetických elementárních částic, o kterých se předpokládá, že jsou subčásticemi protonů, neutronů, a množství podobných částic. V jistém smyslu jde o problém stejný jako původní problém renormalizace kvantové elektrodynamiky; po jiné stránce je to problém právě opačný.

V kvantové elektrodynamice se ukazuje, že náboj elektronu s klesající vzdáleností roste. V interakci kvarků je vlastnost analogická elektrickému náboji nazývána barvou, což byl důvod, proč teorie interakcí mezi kvarky byla pojmenována kvantovou chromodynamikou. Jestliže je barevný náboj zkoumán z blízké vzdálenosti, zdá se, že s klesající vzdáleností mizí. V důsledku toho dva kvarky, které jsou velmi blízko sebe, neinteragují skoro vůbec – vazba mezi nimi je slabá. Na druhé straně, jestliže jsou kvarky od sebe odtahovány, efektivní barevný náboj vzrůstá a vazba mezi kvarky se stává pevnější. Zatímco elektron indukuje ve svém okolí kompenzující náboj, zdá se, že kvark indukuje barevný náboj téže polarity, který se na velkých vzdálenostech skládá s jeho vlastním nábojem. Běžně se přijímá hypotéza, že efektivní vazba mezi kvarky roste nade všechny meze, když vzdálenost mezi nimi přesáhne průměr protonu, to je přibližně 10^{-13} cm. Jestliže je tomu skutečně tak, kvarky by bylo možno vytrhnout z protonu jenom při vynaložení nekonečné energie. Kvarky by byly trvale uvězněny.

Jedním ze způsobů, jak znázornit vazbu kvarků, je zkonstruovat mezi nimi myšlené siločáry. Síla vazby je pak úměrná počtu čar protínajících libovolný povrch mezi částicemi na jednotku plochy. U elektronů se v případě, že částice jsou daleko od sebe, siločáry rozestupují do prostoru, takže na jednotku plochy připadá menší počet čar. Hustota čar se zmenšuje se čtvercem vzdálenosti, což dává známý zákon převrácených čtverců pro elektromagnetickou sílu. U kvarků se naopak podle převládající hypotézy siločáry nerozptylují do prostoru, ale zůstávají soustředěny do tenké trubičky nebo také struny, která přímo spojuje kvarky. V důsledku toho zůstává počet čar na jednotku plochy stejný bez ohledu na to, jak velká je vzdálenost, a kvarky nelze od sebe oddělit. Ačkoliv tato představa o uvěznění kvarků je intuitivně přitažlivá, poskytuje pouze kvalitativní vysvětlení. Nikdo dosud nebyl schopen získat uvěznění kvarků z fundamentální teorie kvantové chromodynamiky.

Problém uvěznění je problémem s mnoha škálami délky a energie, a lze tedy očekávat, že je možné použít k jeho řešení renormalizačně grupových metod. Podařilo se mi zformulovat modelovou verzi problému, ve které jsou kvarky rozmístěny v uzlech mřížky ve čtyřrozměrném prostoru a jsou spojeny „strunami“, které směřují podél linií spojujících vrcholy. Mřížka je zcela umělou strukturou, která nemá v reálném prostoru žádnou analogii, a musí proto nakonec z teorie zcela úplně vymizet. Toho je možno dosáhnout posláním mřížkové konstanty k nule.

Stejně jako při studiu feromagnetických systémů, i k mřížce kvarků a strun se aplikuje posloupnost renormalizačně grupových transformací. To umožňuje zkoumat interakci kvarků na větších vzdálenostech. Otázka, na kterou hledáme odpověď, je, zda při zvětšování délkové škály zůstávají siločáry uvězněny do trubičkovitých vláken, nebo se rozptylují po mřížce. Výpočty jsou na hranicích možností současné generace počítačích strojů. Výsledky dosud nemám.*)

Existuje množství dalších problémů, které jsou na pohled vhodné pro řešení metodou renormalizační grupy, ale nebyly dosud vyjádřeny takovým způsobem, aby se daly takto řešit. Při perkolaci tekutiny pevnou strukturou, jako prosakování vody půdou nebo kávy kávovou sedlinou, dochází ke vzniku shluků tekutiny s mnoha velikostními škálami. Notoricky obtížným problémem, který vzdoruje snahám o matematický popis už po více než sto let, jsou turbulence v tekutinách. Jde při tom opět o problém s mnoha charakteristickými velikostmi. Například v atmosféře zahrnují turbulentní proudy velikosti od malých prachových vírů až po hurikány.

Jeden z problémů, který metodě renormalizační grupy neodolal, je Kondův efekt, jev z oblasti fyziky pevných látek, nazvaný podle japonského fyzika Jun Konda. K efektu dochází v nemagnetických kovech, jako je měď, znečištěných malou koncentrací magnetických atomů. Nejjednodušší teoretické představy vedou k předpovědi, že elektrický odpor takového kovu se bude spojitě zmenšovat s klesající teplotou. Ve skutečnosti

*) Výzkumy v tomto směru od napsání článku (1979) značně pokročily. Výsledky komplikovaných numerických výpočtů se zdají nasvědčovat tomu, že v mřížkové verzi kvantové chromodynamiky zůstávají siločáry uzavřeny do trubičkovitých vláken, a že tedy dochází k uvěznění kvarků při libovolném zvětšování délkové škály mřížky. — Pozn. překl.

však odpor dosahuje při určité konečné teplotě minimální hodnoty a při dalším zmenšování teploty opět roste. Této anomálii nebyla nikdy připisována mimořádná důležitost, protože se nedalo předpokládat, že její vysvětlení by objasnilo obecnější vlastnosti pevných látek, ale přesto poutala pozornost fyziků po více než 40 let a vždycky se zdála být za hranicemi možností právě dostupných metod. Podstata problémů spočívá v tom, že vodivostní elektrony v kovu mohou mít různé energie v rozsahu několika elektronvoltů, ale poruchy v této energii hrají významnou roli až do měřítek okolo 10^{-4} elektronvoltage. Problém byl s konečnou platností vyřešen v roce 1974, kdy jsem provedl renormalizačně grupový výpočet elektronových energií při všech teplotách až po absolutní nulu.

Jiná série renormalizačně grupových výpočtů z nedávné doby je významná tím, že poskytla předpovědi, které byly přímo potvrzeny experimentem. Výpočty se týkají modelu spinů na mřížce s $d = 2$ a $n = 2$, tj. dvojrozměrné mřížky dvojrozměrných spinů. Bylo dokázáno, že v takovém spinovém systému nemůže existovat žádná fáze s uspořádáním na dlouhých vzdálenostech, ale renormalizačně grupové výpočty provedené J. M. Kosterlitzem z univerzity v Birminghamu a Davidem J. Thoulessem z univerzity v Yale ukázaly, že systém přesto prudce mění své vlastnosti při kritické teplotě. Tyto výsledky byly použity ke studiu tenkých vrstev supratekutého hélia 4, které patří do stejné třídy univerzality s $d = 2$ a $n = 2$. Kosterlitz a David R. Nelson z Harvardské univerzity konkrétně předpověděli existenci nespojitého skoku v hustotě supratekuté frakce v tenké vrstvě. Takovýto skok byl potom experimentálně pozorován Johnem D. Reppy z Cornellu i dalšími a potvrdilo se, že skok má předpovídanou velikost.

Při vší práci, která byla dosud do renormalizační grupy vložena, se může zdát, že získané výsledky jsou poněkud skromné. Je však třeba mít na paměti, že problémy, na které se metoda dala úspěšně použít, patří mezi vůbec nejobtížnější problémy ve fyzice. Kdyby tomu tak nebylo, patrně by se už dávno podařilo vyřešit je jednoduššími metodami. Podstatné množství dosud nevyřešených problémů ve fyzice má opravdu své kořeny v různosti škál. Nejslibnější cesta k jejich vyřešení, i když to není zdaleka cesta snadná, spočívá v dalším zlepšování metod renormalizační grupy.