Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jaroslav Nešetřil

Historická perspektiva konečné matematiky

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 31 (1986), No. 1, 35--43

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138102

Historická perspektiva konečné matematiky

Jaroslav Nešetřil, Praha

Úvodem

V současné době jsme svědky intenzívního rozvoje mnoha matematických disciplín. Domnívám se, že zvláštní místo v tomto vývoji zaujímá oblast matematiky zabývající se konečnými množinami. Dalo by se říci, že jsme svědky neočekávaného vpádu konečné matematiky do tradičního světa matematiky. Pojmy jako konečná geometrie, graf, polytop, kombinatorická hra, kombinatorický algoritmus, které byly dříve na okraji zájmu nebo nebyly vůbec známy, se dnes staly běžnými nebo vstupují do povědomí matematiků.

Pěkně to vystihl Walter Feit v komentáři ke knize o konečných jednoduchých grupách [7]: „Padesátá léta byla obdobím prosperity abstrakce v matematice, dominovala zvláště abstraktní algebra. Po téměř celé století bylo hlavním cílem matematiků porozumět nekonečnu a naučit se ho používat. V padesátých letech nejdůležitější činností mnoha matematiků bylo vybudovat obecné teorie a nekonečné konstrukce. ... Mnozí matematikové byli tehdy toho názoru, že otázky týkající se konečných objektů nejsou ani zajímavé ani důležité."

V posledních desetiletích došlo však k výrazné změně. Lze spekulovat, proč k tomuto „vpádu" došlo. Každého samozřejmě napadne rozvoj počítačů. Ale důvodů bude více a některé podněty přišly například z biologie a psychologie. Zdá se, že je předčasné tyto trendy hodnotit. Možná, že však lze snáze pochopit a popsat počátky tohoto vývoje. O to se pokusím v této přednášce.

Konečná matematika, řekněme hlavně kombinatorika, byla vždy součástí matematických znalostí. Jako disciplína je však stará (nebo mladá) zhruba 50 let. Přirozeně i předtím se matematikové zabývali otázkami kombinatorického charakteru, ale považovali je více za hadanky, hříčky, tedy za okrajové záležitosti. Kdybychom si chtěli pomoci paralelou, tak tomu bylo asi podobně, jako když v počátcích teorie pravděpodobnosti byly jednou z hlavních motivací hazardní hry.

To, že matematici považovali otázky konečné matematiky za hříčky, bylo způsobeno hlavně povahou těchto otázek: šlo o elementární problémy, které neumožňovaly využití nebo rozvinutí „vyšších" teorií, které jsou vlastní matematické metodě. (Tím míním například zavedení nových organických pojmů, nalezení elegantních důkazů a vytyčení nových souvislostí plynoucích z dosažené abstrakce.)

Domnívám se, že první problémy a věty z konečné matematiky, které vzbudily široký zájem matematiků, vznikly ve 30. letech. A nebylo jich tak mnoho. Dnes lze říci, že to byly přesně dva okruhy problémů:

Rozšířený text přednášky proslovené na sjezdech JČSMF a JSMF v Gottwaldově v říjnu 1984.

I. Komplikovaná struktura rozkladů (velkých) konečných množin.

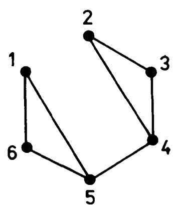
II. Problém geometricky reprezentovaných grafů.

V mém krátkém čase mi dovolte zmínit se o obou těchto problémech. Popíši, jak se vyvíjely za posledních 50 let.

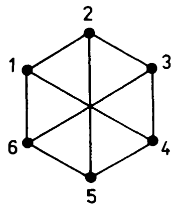
I. Problém rozkladů

Začneme příkladem: Představme si šest lidí, třeba na večírku. Některé dvojice lidí se navzájem znají a tuto situaci vyznačme plnou čarou spojující příslušné kroužky (viz obr. 1a), 1b)). Existuje velmi mnoho možností (více než 1000), jak takový večírek může vypadat. Platí však podivná skutečnost, že na každém z možných večírků najdeme buď trojici známých (jako v případě grafu 1a) nebo trojici osob, které se navzájem neznají (jako v případě grafu 1b)).

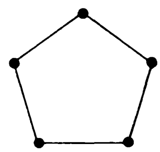
To je pozoruhodné tím více, že pro večírky skládající se z pěti osob již tato věta neplatí. Vidíme to z příkladu na obrázku 1c).



Obr. 1a.



Obr. 1b.


Obr. 1c.

V roce 1930 dokázal anglický matematik F. Ramsey větu, která uvedenou hříčku zobecňuje. Poznamenejme, že problém večírku nebyl Ramseyovou motivací, tou byla matematická logika, přesněji teorie modelů. Formulace Ramseyovy věty není zrovna jednoduchá, ani dnes po více než padesáti letech.

RAMSEYOVA VĚTA [18]

Pro jakákoliv přirozená čísla p, k, n existuje přirozené číslo N s těmito vlastnostmi: Jestliže X je množina s alespoň N prvky, jestliže $\binom{X}{p}$ označuje množinu všech p-bodových podmnožin v X a jestliže $\mathscr{A}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{A}_k$ je libovolný rozklad množiny $\binom{X}{p}$, potom vždy existuje podmnožina Y množiny X tak, že Y má alespoň n prvků a navíc množina $\binom{Y}{p}$ náleží již některé třídě $\mathscr{A}_i$ rozkladu.

Označme $r(p, k, n)$ minimální číslo N, pro které platí tvrzení Ramseyovy věty.

Příklad večírku, který jsem výše uvedl, odpovídá případu $p = k = 2$, $n = 3$, $N = 6$. Současně jsme ukázali, že nemůže platit $r(2, 2, 3) < 6$, a tedy $r(2, 2, 3) = 6$.

Ramseyova věta vykazuje vlastnosti, které ji zřetelně odlišují od hříčky a které působí příjemně na abstraktně orientovanou mysl. Učiňme několik poznámek, proč tomu tak je.*)

a) Složitost

Ani formulace ani důkaz věty není jednoduchý. Tak například i dnes je málo knih, v nichž je věta uvedena i s důkazem (ačkoliv ve většině kombinatorických textů je uvedeno alespoň její znění). Dá se říci, že formulace Ramseyovy věty musí být nutně složitá, protože jde o tvrzení elementární. V této poznámce je obsaženo víc, než se zdá na první pohled. Kombinatorické algoritmy mají většinou krátký zápis, ale komplikovanou vnitřní strukturu.**)

b) Obsah

Na druhé straně má uvedená věta intuitivní smysl a odráží hlubokou strukturální vlastnost konečných struktur. Kořeny tvrzení sahají až k Dirichletovu přihrádkovému principu, což je případ $p = 1$. V tom případě ovšem $r(1, k, n) = k(n - 1) + 1$.***)

Ramseyova věta má charakter kombinatorického principu; s trochou nadsázky by se dalo dokonce říci „přírodního zákona". V mnoha aplikacích se věta vyskytuje v této formě: Každý velký systém musí obsahovat jistou pravidelnost. Jak výstižně řekl Theodore Motzkin: úplný nepořádek je nemožný.

c) Souvislosti, aplikace

Věta vznikla v netriviálních souvislostech a vlastně okamžitě našla zajímavé aplikace. Souvisejí s ní i další známé věty, hlavně z kombinatorické teorie čísel. Jmenujme alespoň větu Schurovu (1916) a známou větu Van der Waerdenovou (1927) o aritmetických posloupnostech. Nejstarší podobný výsledek (odhlédneme-li od Dirichletova principu) náleží Hilbertovi (1892)****). Tyto souvislosti a aplikace pokračují až do dnešní doby a zasahují do mnoha oblastí. Některé netradiční aplikace jsou uvedeny v článku [14].

d) Neefektivnost

Ramseyova věta přináší mnoho dalších problémů. Tak například čísla $r(p, k, n)$,

*) Ramseyova věta nikdy nebyla pokládána za hříčku a nalezla záhy aplikace. Dokladem toho jsou časově bezprostředně navazující práce Erdöse a Szekerese (1935) a Skolema (1935).

**) Kombinatorickým algoritmům je věnována kniha L. Kučery: *Kombinatorické algortimy*, SNTL 1983.

***) Je snadné nahlédnout, že platí $r(p, k, n) = n$ pro každá kladná celá čísla p, k a n, kde $n \leqq p$. Kromě těchto snadných případů jsou známy pro $p \geqq 2$ pouze tři netriviální hodnoty, a to již zmíněná $r(2, 2, 3) = 6$, $r(2, 3, 3) = 17$ a $r(2, 2, 4) = 18$. Podrobnosti lze nalézt v knize autora *Teorie grafů*, SNTL 1979.

****) Uvedené věty se týkají rozkladů přirozených čísel. Pro představu čtenáře formulujme první dva výsledky:

VĚTA SCHUROVA: Pro každé přirozené číslo k existuje přirozené číslo N_1 takové, že pro libovolný rozklad $\mathscr{A}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{A}_k$ množiny $\{1, 2, \ldots, N_1\}$ jedna ze tříd rozkladu obsahuje alespoň jednu trojici čísel tvaru $x, y, x + y$.

VĚTA VAN DER WAERDENOVA: Pro každé k a každé n existuje přirozené číslo N_2 takové, že pro libovolný rozklad $\mathscr{A}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{A}_k$ množiny $\{1, 2, \ldots, N_2\}$ jedna ze tříd rozkladu obsahuje aritmetickou posloupnost délky n.

Tyto věty mají kombinatorické pozadí. Je vyjádřeno výsledkem uvedeným v práci A. Hales, R. I. Jewett: *Regularity and Positional Games*, Trans. Amer. Math. Soc. *106* (1963), 222—229.

jejichž existenci věta zaručuje, není snadné určit a ani k jejich odhadu není možno přistupovat naivním způsobem. Např. platí tento klasický výsledek Erdöse (1947)

$$r(2, 2, n) \geqq 2^{n/2}$$

a obecně je znám odhad

$$r(p,2,n) \geqslant \left. 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^{cn}}}}} \right\} p-1$$

pro vhodnou konstantu $c > 0$.

Tyto a podobné odhady ukazují na značnou neefektivnost Ramseyovy věty a naznačují, že při jejím studiu je třeba postupovat důmyslně. Na tom není dosti. Nedávno Paris a Harrington (viz [17]) modifikovali definici čísel $r(p, k, n)$ tak, že příslušná nová čísla, která označili $r^*(p, k, n)$, rostou asymptoticky rychleji než jakákoliv rekurzívní funkce $N \to N$.*) To ukazuje, že Ramseyova věta je na pomezí dokazatelnosti v teorii konečných množin. Podrobnosti se lze dočíst v knize [8].

e) Obecná teorie – Ramseyovy třídy

Ramseyova věta se stala počátkem intenzívního výzkumu, který je živý dodnes. Svědectví o tom podává kniha [8] (ale i ona je v mnohém již „klasická", srv. [15]). Pokud jde o výsledky z poslední doby, uveďme, že se například podařilo charakterizovat v podstatě všechna strukturální rozšíření Ramseyovy věty.**)

II. Problém geometricky reprezentovaných grafů

Domnívám se, že neřešené problémy, tj. otevřené otázky, představují do značné míry matematikův svět. Problémy přejímají v matematice v jistém smyslu roli experimentu ve fyzice a jsou momentem, kdy matematik konfrontuje svůj um s vnějším světem. Říká se, že problémy jsou kořením matematiky a pěkné problémy nepochybně určují vývoj celých oblastí.

---

*) Paris a Harrington definovali symbol $r^*(p, k, n)$ jako minimální přirozené číslo N s touto vlastností:
Pro libovolný rozklad $\mathscr{A}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{A}_k$ množiny všech p-prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, N\}$ existuje množina $Y \subseteq \{1, \ldots, N\}$ a index i tak, že $\binom{Y}{p} \subseteq \mathscr{A}_i$, Y má alespoň n prvků a navíc počet prvků Y je větší nebo roven minimálnímu prvku množiny Y.

Existenci čísel $r^*(p, k, n)$ je možno snadno dokázat ze spočetné analogie Ramseyovy věty pomocí principu kompaktnosti. Na druhé straně tuto existenci nelze dokázat v teorii konečných množin. To plyne například z asymptotického chování čísel $r^*(p, k, n)$ zmíněného v textu.

**) Nechť K je třída nějakých objektů, v nižje definován pojem podobjektu. Pro $A, B \in K$ označme $\binom{B}{A}$ množinu podobjektů objektu B, které jsou izomorfní s A. Řekněme, že třída K má A-Ramseyovskou vlastnost, jestliže pro každý objekt $B \in K$ a přirozené číslo k existuje objekt $C \in K$ s následující vlastností: Pro libovolný rozklad $\mathscr{A}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{A}_k$ množiny $\binom{C}{A}$ existuje objekt $B' \in \binom{C}{B}$ tak, že $\binom{B'}{A} \subseteq \mathscr{A}_i$ pro některé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.
Ramseyovský problém je vyřešen v úplnosti pro třídy relačních systémů daného typu v [15] a v J. Nešetřil, V. Rödl: *Ramsey classes of set systems*, Journal of Combinatorial Theory A, *34* (1983), 183–201.

Není pochyby, že vývoj kombinatoriky v tomto století byl ovlivně jedním dílčím problémem — vlastně hříčkou — problémem čtyř barev. Tento problém je všeobecně známý, v poslední době vyvolalo pozornost jeho nestandardní vyřešení pomocí počítače [1].*)

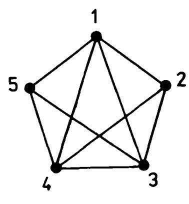
Vraťme se však do 30. let.

Problém čtyř barev byl v té době již zhruba 80 let starý a přesto nebyl zaznamenán žádný větší pokrok v jeho řešení (viz [2] pokud jde o historii a přístupy k problému). Byla to dostatečně dlouhá doba, aby hříčka vzbudila pozornost mnoha matematiků, mezi nimiž již byla některá prominentní jména, jako Birkhoff a Minkowski.

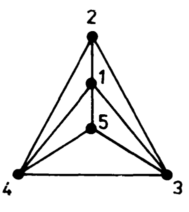
Nebyl to však sám problém čtyř barev, který vyvolal největší pozornost a měl největší význam pro další vývoj. Šlo spíše o dílčí problém, o tzv. *problém charakteristiky rovinných grafů.* Dovolte mi k tomu krátký úvod.

Graf je konečná množina prvků (vrcholů grafu) spolu s jistou množinou E dvoubodových podmnožin množiny V(hran grafu). Každý graf je možno geometricky znázornit v rovině nebo na nějaké ploše (ať již orientovatelné nebo neorientovatelné, např. na anuloidu). Je to možné provést tak, že vrcholy odpovídají bodům plochy a hrany obloukům na ploše. Graf nazveme rovinný (vnořitelný do plochy P), jestliže existuje jeho znázornění takové, že oblouky odpovídající hranám se nekříží (mohou se pouze dotýkat). Tak např. graf G s množinou vrcholů $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ a s 9 hranami $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 5\}$ lze znázornit, jak je uvedeno na obr. 2a, a přesto je rovinný, neboť jej lze znázornit rovněž způsobem uvedeným na obrázku 2b.

Obr. 2a.



Obr. 2b.



Problém čtyř barev je otázka, zda vrcholky libovolného rovinného grafu lze obarvit čtyřmi barvami tak, že žádná hrana nemá své koncové vrcholy obarveny stejnou barvou.

Ve 30. letech napadlo několik matematiků najednou a nezávisle na sobě, že problém je možná proto tak obtížný, že vlastně nevíme, jakých objektů (grafů) se týká.

Uvědomme si, že definice rovinného grafu neposkytuje ani teoretický návod, jak rozhodnout, zda graf je rovinný, či nikoliv. Dnes víme, že je to otázka důležitá i z praktického hlediska — vzpomeňme např. problematiku tištěných spojů — a studiem konkrétních geometrických objektů se zabývá celá rychle rostoucí oblast počítačové geometrie.

Ve 30. letech byla otázka méně technicky formulována: Existuje kombinatorická (tj. negeometrická) charakteristika rovinných grafů?

Takovou charakteristiku nalezli hned tři matematici: Kuratovski, Whitney a Mac Lane, a to zcela rozdílnými způsoby. Charakteristika Mac Lanea (viz [12]) byla ve stylu

*) Viz rovněž článek J. Bosáka: *Ako bol vyriešený problém čtyroch farieb,* PMFA *24,* 1979, 181—201.

homologické algebry a neuvádím ji. Charakteristika Whitneyho byla důmyslnější a historicky závažnější. Whitney definoval nový pojem, pojem matroidu M a ukázal, že tento pojem připouští duální definici. Duální matroid označil M^*. Dále ukázal, že každému grafu G lze přiřadit jistý matroid $M(G)$. Konečně Whitney dokázal, že graf G je rovinný, právě když duální matroid $M^*(G)$ jemu přiřazeného matroidu $M(G)$ je opět matroidem nějakého grafu. Idea matroidu, která leží na pomezí mezi algebrou, geometrií a kombinatorikou, se ukázala být neobyčejně plodná. Dnes je tento pojem centrálním pojmem kombinatorické optimalizace – viz [20]. Možno dokonce říci, že je to jeden z hlavních pojmových přínosů konečné matematiky.*)

Tento pojem měl od počátku široké souvislosti a je zajímavé připomenout, že byl anticipován Van der Waerdenem a ještě dříve O. Borůvkou, který některé jeho vlastnosti izoloval při řešení problému návrhu minimální sítě [3].

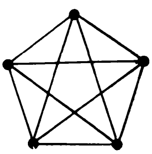
Ovšem v jistém smyslu nejlepší a také nejpřirozenější charakteristiku podal Kuratovski. Představme si, že chceme charakterizovat rovinné grafy. Uvažujme: Jestliže graf (V, E) je rovinný, potom použitím Eulerova vzorce dostáváme, že nemůže mít mnoho hran, přesněji $|E| \leqq 3|V| - 6$. To znamená, že velký úplný graf není rovinný, například již graf K_5, uvedený na obr. 3, není rovinný.

Je zřejmé, že každý podgraf rovinného grafu je opět grafem rovinným. Dále operace dělení hrany, kterou jsem naznačil na obrázku 4, zachovává vlastnost být, resp. nebýt rovinným grafem. (Graf, který vznikne z jiného grafu několika takovými operacemi, nazveme *dělením* původního grafu).

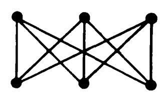
Tedy žádné dělení úplného grafu s 5 vrcholy není podgrafem rovinného grafu. Tento graf však není jediným zlým trpaslíkem překážejícím rovinnosti. Při troše cviku lze najít další příklad, a to graf $K_{3,3}$, viz obr. 5.

Existují ještě nějací další zlí trpaslíci? Odpověď dává Kuratovského věta (1930) [11].

Graf G je rovinný, právě když neobsahuje žádné dělení grafu K_5 nebo $K_{3,3}$.

Obr. 3. 

Obr. 4. 

Obr. 5. 

*) Pro pohodlí čtenáře uveďme jednu z možných definic matroidu: Matroid na konečné množině X je určen celočíselnou funkcí r_M definovanou na potenční množině $\mathcal{P}(X)$ množiny X, která má tyto tři vlastnosti:

i. $r_M(Y') \leqq r_M(Y)$ kdykoliv $Y' \subseteq Y \subseteq X$,

ii. $r_M(Y \cup \{x\}) \leqq r_M(Y) + 1$ pro libovolnou podmnožinu Y množiny X,

iii. $r_M(Y \cup Z) + r_M(Y \cap Z) \leqq r_M(Y) + r_M(Z)$ pro libovolné podmnožiny Y, Z množiny X.

Funkce r_M se nazývá pořádková funkce matroidu M. Je-li A matice s řádky $r_1, \ldots, r_m$, potom lze definovat matroid M na množině $\{1, 2, \ldots, m\}$ předpisem $r_M(I)$ = hodnost matice určené množinou řádků $\{r_i; i \in I\}$. Tímto příkladem byl motivován název pojmu. Ne každý matroid si však lze představit tímto způsobem. Duální matroid M^* definujeme pomocí pořádkové funkce $r_{M^*}(Y) = |Y| - r_M(Y) + r_M(X - Y)$. Zde je třeba ověřit podmínky i., ii., iii.

Je to krásná věta s nelehkým důkazem.*)

Navíc je tato věta jedním z historicky prvních případů tzv. dobré charakteristiky [5], pojmu, který sehrál v 60. letech klíčovou roli při analýze pojmu složitosti algoritmu, viz [4].**)

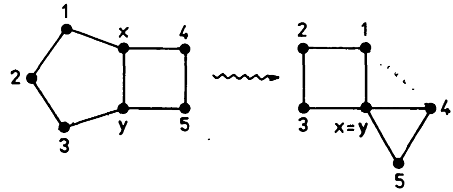
O desetiletí později byla Kuratovského věta modifikována výhodnějším způsobem. Tato modifikace je založena na těchto vlastnostech rovinných grafů:

— podgraf rovinného grafu je rovinný,

— kontrakce hrany převádí rovinný graf na rovinný graf.

Kontrakcí hrany přitom rozumíme operaci znázorněnou na obrázku 6.

Obr. 6.



Z fyzikální představy o stahování hrany do bodu je zřejmé, že rovinnost grafu se kontrakcí jeho hrany neporuší.

Tato pozorování vedla k definici minoru (Tutte [19]): Graf H nazveme *minorem* grafu G, jestliže v G existuje podgraf G', který lze postupným kontrahováním hran převést na graf H.

Tato podivná definice, definice geometricko-topologická a navíc samoduální,***) se ukázala jako velmi šťastná, jak uvidíme z dalšího.

Především je možno modifikovat Kuratovského větu takto:

Graf G je rovinný, právě když žádný z grafů K_5 a $K_{3,3}$ není minorem grafu G.

Jinak řečeno, třídu rovinných grafů je možno vyjádřit pomocí konečně mnoha (totiž dvou) zakázaných minorů.

Takovou větu nazýváme větou o *konečné bázi.*

Kuratovského věta byla v této podobě zobecňována a mnoho dalších zkušeností bylo získáno při studiu matroidů.

Další významné věty o konečné bázi byly dokázány v 50. letech Tuttem a v 70. letech Seymourem.****) Na druhé straně již pro některé jednoduše definované třídy nebylo známo, zda mají konečnou bázi, či nikoliv. Známými problémy se stala hypotéza Vászonyiho a posléze nejobecnější hypotéza Wagnerova, která až udivuje svou smělostí (Wagner cca 1940):

*) Nejjednodušší důkaz podal nedávno C. Thomassen. Je uveden např. ve skriptech autora: *Kombinatorika I. — grafy*, SPN 1983.

**) Viz rovněž článek autora: *Kombinatorické konstrukce, jejich složitost a praktický význam*, PMFA 1, *XXIII* (1978), 16—27.

***) Pojem minoru je možno analogicky definovat pro matroidy. Platí, že matroid M je minorem matroidu N, právě když duální matroid M^* je minorem duálního matroidu N^*.

****) Přehled o tomto směru výzkumu nalezne čtenář v knize L. Kučery a autora: *Algebraické metody diskrétní matematiky*, SNTL (1986?).

Nechť $\mathscr{K}$ je třída grafů, která je uzavřena vzhledem k minorům. (Tím míníme toto: jestliže $G \in \mathscr{K}$ a H je minorem G, potom rovněž $H \in \mathscr{K}$). *Potom $\mathscr{K}$ má konečnou bázi.*

Na první pohled by se zdálo, že tuto domněnku lze snadno vyvrátit. Je to však úžasný problém.

Uvědomme si například, že třída grafů vnořitelných bez křížení do dané plochy je uzavřená vzhledem k minorům (viz opět fyzikální smysl kontrakce). Kdyby hypotéza byla pravdivá, potom by pro každou plochu P existoval konečný seznam trpaslíků $G_1, \ldots, G_k$, znemožňujících vnořitelnost bez křížení daného grafu do plochy P.

Jak jsme viděli, pro rovinu existují dva zlí trpaslíci. Pro projektivní rovinu jich už existuje přibližně sto.*) A pro anuloid ani nebylo donedávna známo, zdali jich existuje konečně nebo nekonečně mnoho.

Pro studium těchto otázek byla vyvinuta technika tzv. dobře kvaziuspořádaných množin (WQO). Zde kvaziuspořádaná množina je dobře kvaziuspořádaná, nemá-li nekonečný klesající řetězec a je-li každá množina vzájemně neporovnatelných prvků konečná.

Teorie WQO byla kultivována od 50. let a má v konečné kombinatorice podobně prominentní místo jako teorie rozkladových vět. Našly se dokonce spojovací články mezi oběma teoriemi.

Bylo ukázáno, že mnoho přirozeně definovaných tříd a relací má vlastnost WQO. Platí to například pro třídu všech slov nad konečnou abecedou (Higman [9]) nebo pro třídu všech stromů (Kruskal [10], Nash-Williams [13]).**)

Ale přes všechnu snahu a dílčí výsledky staré problémy odolávaly. Vlastně nikdo ani neočekával, že se v úplnosti vyřeší.

Nedávno se metody teorie WQO podařilo obohatit o některé myšlenky, analogické metodám teorie matroidů (opět!) a možno říci, že byla vytvořena nová obecná teorie vytváření grafových struktur.

Rovněž na kombinatorickém semináři řešíme uvedenou problematiku již několik let.***) Jsem velmi rád, že se nám podařilo úspěšně se zapojit do tohoto mezinárodního výzkumu. Tím spíše, že tento trend vyvrcholil v tomto roce důkazem správnosti Wagnerovy hypotézy (Robertson, Seymour 1984):

Třída všech konečných grafů je dobře kvaziuspořádaná vzhledem k relaci „být minorem“.

Odtud plyne (a je to v podstatě věta ekvivalentní):

Každá třída grafů uzavřená vzhledem k minorům má konečnou bázi.

Důkaz je opravdu velmi složitý a bude asi rozdělen do více prací, které už začaly

---

*) Viz H. Glover, P. Huneke, C. S. Wang: *103 graphs that are irreducible for the projective plane*, J. Comb. Th. B *27* (1979), 332—370.

**) Zde třída konečných slov je uspořádána relací „být podslovem“ a třída stromů je uspořádána relací „obsahovat dělení“.

***) Viz např., práci R. Thomas: *Graphs without K_4 and Well quasi-ordering*, vyjde J. Comb. Th. B. Práce obsahuje nejsilnější známou větu týkající se dobře kvaziuspořádaných množin nekonečných grafů.

vycházet. Tedy pro každou plochu existuje věta Kuratovského typu. Je to velký úspěch – domnívám se, že celé matematiky.

Rád bych uvedl ještě několik poznámek na závěr.

Popsali jsme dva problémy a sledovali jsme jejich vývoj až do dnešní doby. Připouštím, že jsem vybral příklady zvláště krásné a vlastně tak trochu netypické. Kombinatorika však dnes obsahuje mnoho příkladů, které třebaže nesahají do 30. let, jsou podobně hluboké a matematicky zajímavé. Pro mnoho lidí je konečná matematika probíráním jednotlivých případů a nanejvýš počítáním s kombinačními čísly. Chtěl jsem nastínit, jaká je dnes doopravdy.

Dovolte mi ještě jednu poznámku k výpočetní technice. Z hlediska kombinatoriky jsou počítače požehnáním. Prakticky vše, co bylo vybudováno od 30. let, co se dlouho připravovalo, našlo uplatnění ať již v teorii nebo v praxi počítačů.

Kombinatorika se stala teorií množin pro počítače.

Literatura

[1] K. Appel, W. Haken: *Every Planar Map is Four Colourable.* Bull. Amer. Math. Soc. *82* (1976), 711—712.

[2] N. Biggs, E. K. Lloyd, R. J. Wilson: *Graph Theory 1736—1936.* Oxford Univresity Text 1976.

[3] O. Borůvka: *O jistém problému minimálním.* Práce Mor. přírodověd. spol. v Brně 3, sv. *3* (1926), 37—58.

[4] S. A. Cook: *An Overview of Computational Complexity.* Communications ACM, *26* (1983), 401—408.

[5] J. Edmonds: *Paths, Trees and Flowers.* Canad. J. Math. *17* (1965), 127—136.

[6] P. Erdös: *Some remarks on the Theory of Graphs.* Bull. Amer. Math. Soc. *53* (1947), 292—294.

[7] W. Feit: *Recenze knihy Finite Simple Groups.* Bull. Amer. Math. Soc. *8* (1983), 120—124.

[8] R. Graham, B. Rothschild, J. Spencer: *Ramsey Theory.* Wiley, 1980.

[9] G. Higman: *Ordering by divisibility in abstract algebras.* Proc. London Math. Soc. *2* (1952), 326—336.

[10] J. B. Kruskal: *Well quasiordering, the Tree Theorem and Vászonyi's Conjecture.* Trans. Amer. Math. Soc. *95* (1960), 210—225.

[11] K. Kuratowski: *Sur le problème courbes gauches en topologie.* Fund. Math. *15* (1930), 271—283.

[12] Mac Lane: *A structural characterization of planar combinatorial graphs.* Duke Math. J. *3* (1937), 340—472.

[13] C. St. J. A. Nash-Williams: *On well-quasiordering infinite trees.* Proc. Cambridge Phil. Soc. *61* (1965), 697—720.

[14] J. Nešetřil: *Some non-standard Ramsey-like applications.* Theoret. Comp. Sci., 1984.

[15] J. Nešetřil, V. Rödl: *A Structural Generalization of Ramsey Theorem.* Bull. Amer. Math. Soc. *83* (1977), 127—128.

[16] J. Nešetřil, V. Rödl: *Partition Theory and its Applications.* In: *Surveys in Combinatorics.* Cambridge Univ. Press (1979), 96—156.

[17] J. Paris, L. Harrington: *A Mathematical Incompleteness in Peano Arithmetic.* In: *Handbook of Mathematical Logic.* North Holland (1977), 1133—1142.

[18] F. P. Ramsey: *On a Problem of Formal Logic.* Proc. London Math. Soc. *30* (1930), 264—286.

[19] W. Tutte: *Lectures on Matroids. J. Res. Nat. Bur. Stand. Sect.* ser. B, *69* (1965), 1—47.

[20] B. L. van der Waerden: *Beweis einer Baudetschen Vermutung.* Nieuw Arch. Wisk. *15* (1927), 212—216.

[21] D. Welsh: *Matroid theory.* Academic Press, 1974.

[22] H. Whitney: *On the Abstract Properties of Linear Dependence.* Amer. J. Math. *54* (1932), 150—168.