Charles Ehresmann
Tendence k jednotě v matematice

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 17 (1972), No. 3, 121--129

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138037

POKROKY MATEMATIKY, FYZIKY A ASTRONOMIE
ROČNÍK XVII — ČÍSLO 3

TENDENCE K JEDNOTĚ V MATEMATICE*)

CHARLES EHRESMANN, Paříž

Ačkoliv matematické výsledky se obvykle považují za pravdy, které nepodléhají proměnám, matematika není pevným souborem vět či snad poněkud se rozrůstajícím souborem vět, které jsou východiskem pro více či méně složitá cvičení i pro četné aplikace v jiných vědách, ale je doopravdy živou vědou, která dnes je v období prudkého vývoje. Dnešní doba je dobou rychlého rozrůstání se matematiky, třebaže můžeme rozpoznat i významné tendence k jednotě.

Jde o týž vývoj, který vede k nové literatuře, v níž román nemusí mít zápletku, k abstraktní hudbě, komponované někdy samočinným počítačem, k abstraktnímu sochařství a malířství, které se nesnaží zobrazit reálné objekty obvyklým způsobem. A tentýž vývoj k abstrakci vede k jistému druhu matematiky, která je méně motivována možnostmi svých aplikací, ale mnohem více je založena na hluboké touze nalézt v každém problému jeho skutečnou podstatu, odhalit onu obecnou strukturu, na níž tento problém závisí. To nepřekvapuje, neboť matematika je s uměním značně spřízněna; matematická teorie musí být nejen přesná, ale musí také uspokojovat naši mysl svou jednoduchostí, harmonií i krásou — a krásná teorie je stejně tak inspirovaným výtvorem jako nějaké umělecké dílo.

Pro matematiky „platónského ducha" je jejich práce motivována tím, že se v dané situaci snaží nalézt její pravou strukturu a že studují takovouto abstraktní strukturu samu o sobě. Pro matematika zaměřeného více prakticky je cílem jeho úsilí vyřešení nějakého předem vybraného problému, jenž vznikl v čisté nebo aplikované matematice, a to jakýmikoliv prostředky, které má k dispozici, přičemž se co možno nejdále vyhýbá zavádění nových obecných pojmů. Ale všichni matematici se shodují v tom, že hodnota nějaké matematické práce se nejlépe prokáže její podnětností pro nová vyšetřování, a že hlavní oblastí aplikací matematiky je matematika samotná.

Až donedávna mnozí filosofové, mezi nimi i BERGSON, hovořili o matematice jako o vědě, která se zabývá jen čísly a veličinami obyčejného prostoru, ale toto pojetí není již zcela adekvátní a odpovídá více či méně matematice starých Řeků.

*) Přednáška na slavnostní večeři uspořádané katedrou matematiky kansaské university v Lawrence dne 25. dubna 1966. Publikováno v *Cahiers de topologie et géométrie différentielle, VIII*, 1—7 (1966).

Pro Řeky byla matematika aritmetikou, tj. vědou o přirozených číslech, a geometrií, tj. zkoumáním figur a poměrů geometrických veličin v obyčejném prostoru. Jejich geometrie byla fakticky axiomatickou teorií, domnívali se však, že axiómy jsou dány „evidencí" a ve skutečnosti implicitně užívali více axiómů, než explicitně uváděli. Můžeme být překvapeni tím, že Řekové nikdy nezavedli pojem reálného čísla, ačkoliv EUDOXOVA teorie poměrů veličin se podstatně nelišila od definice reálného čísla, kterou podal DEDEKIND o více než dvacet století později. Takováto abstrakce spočívající v tom, že třídu dříve známých objektů (v tomto případě racionálních čísel) považujeme za nový objekt, byla však jejich myslím zcela cizí. Dokonce ani Archimédes, který objevil nové obory jako statiku a hydrodynamiku a otevřel cestu k teorii integrování, se nezabýval myšlenkou na abstraktní definici reálných čísel. Po jeho smrti nastává období, v němž se popudy k badatelské činnosti zdají být vyčerpány, a matematika dřímala během celého středověku.

Opětovné oživení přišlo se zavedením nových druhů čísel — čísel záporných a imaginárních — italskými matematiky šestnáctého století a se zavedením algebraické symboliky (VIETE). Řekové sice měli jistý druh geometrické algebry, ale neměli žádnou algebraickou symboliku, a proto se jejich práce velmi obtížně čtou.

Nový impuls přišel pak od DESCARTA a FERMATA, kteří sjednotili algebru a geometrii v analytickou geometrii. Problém přesné definice a výpočtu tečny ke křivce, který byl již dříve řešen v některých velmi speciálních případech (např. pro Archimédovu spirálu), mohl být nyní účinně studován a vedl NEWTONA a LEIBNIZE k objevu diferenciálního počtu. Zdá se, že Leibniz tušil mnohé z budoucího vývoje matematiky. Nejenže jasně zavedl pojem funkce jako matematického objektu a připravil tak cestu k funkcionální analýze, ale ve své neuskutečněné teorii univerzálních charakteristik snil o odhalení algebraické struktury všech věcí a o zavedení univerzálního algoritmu k jejímu vyjádření. Stejně tak nebyl spokojen s Descartovou analytickou geometrií, která používá libovolně nějakou souřadnou soustavu, a nejasně předvídal pro geometrii jistý vnitřní algoritmus; tento jeho sen lze považovat za částečně uskutečněný v lineární a Grassmannově algebře. Jeho ideje však naneštěstí příliš předběhly svoji dobu a Leibniz neměl žádné přímé následovníky, kteří by šli vytrvale touto cestou. Jeho práce v diferenciálním a integrálním počtu byly však přece přijaty, a to včetně jeho symboliky, a tyto dva obory se staly hlavní oblastí matematiky na dlouhé období.

Další pokrok pramenil z objevu neeuklidovských geometrií v 19. století (LOBAČEVSKIJ, BOLYAI). Všechna stará omezení matematiky byla nyní prolomena: euklidovská geometrie nebyla již dále vynucena vnímáním, ale byla lidským výtvorem založeným na axiómech; a bylo možné vymyslit mnohé jiné axiomatické systémy. Kantovo „a priori" naší koncepce prostoru současně zastaralo. Jaká byla nyní podstata geometrie? Sjednocující a zobecňující pojem pro geometrie té doby byl objeven v pojmu prostoru s tranzitivní transformační grupou, přičemž euklidovské geometrii přísluší grupa euklidovských pohybů. Tak se geometrie stala teorií invariantů a kovariantů transformačních grup. Ve skutečnosti se však tato definice vztahuje pouze na geometrie homogenních prostorů a již tehdy se objevovaly nové geometrie a pociťovala se potřeba i jiných zobecnění. To vedlo nakonec k definici topologických prostorů, které tvoří přirozené prostředí pro všechny otázky týkající se spojitosti, limit a aproximací a zdůrazňují rovněž společnou strukturu, která je podkladem pro většinu problémů analýzy a geometrie.

V téže době se objevila CANTOROVA teorie množin a stávala se čím dále tím více sjednocujícím základem celé matematiky. Byla to nová abstrakce. Nadále, říká Cantor, „matematika je zcela svobodná ve svém rozvoji a její pojmy musí být pouze bezesporné a musí být spojeny s dříve zavedenými pojmy prostřednictvím přesných definic". Ačkoliv krátce nato byly objeveny paradoxy, které ohrožovaly celou teorii množin, a tedy i celou budovu matematiky, Cantorovo mistrovské dílo otevřelo cestu k modernímu matematickému myšlení.

Svoboda ve tvorbě matematických teorií vedla od počátku našeho století k množství nových typů struktur, které jsou uvažovány na množinách. Vedle různých typů algebraických struktur (jako grupy, okruhy, tělesa, pologrupy, moduly, algebry, Lieovy algebry atd.) existují struktury teorie míry a teorie pravděpodobnosti a četná zjemnění topologických struktur: uniformní struktury, metrické prostory, topologické variety, diferencovatelné a analytické variety s nejrůznějšími typy infinitezimálních struktur jako Riemannovy struktury a konexe, algebraické variety atd. Spojením různých struktur na téže množině se vytvářejí nové struktury jako Lieovy grupy, topologické vektorové prostory, Banachovy prostory, Hilbertovy prostory, normované algebry atd. Tyto struktury byly většinou zavedeny pro potřeby čisté matematiky, ale je přirozené, že budou mít stále více aplikací v ostatních oborech, jakmile budou obecněji známy, a že počet uživatelů matematiky bude neustále vzrůstat.

Po zavedení všech těchto různých typů struktur se hluboce pociťovala potřeba sjednocení; kdyby totiž po období prudkého rozvoje nepřišla nějaká sjednocující teorie, mohli by matematikové fatálně směřovat k užívání různých, vzájemně neslučitelných jazyků, podobně jako stavitelé babylonské věže.

Uváží-li se podobnost všech těchto teorií, dosáhne se jistého sjednocení tím, že se zavede obecná definice struktury či přesněji druhu struktur na množinách. Tato idea přísluší BOURBAKIMU a je základem uspořádání i obsahu jeho pojednání *Eléments de Mathématiques*. Dvě původní matematické struktury, množina přirozených čísel a euklidovský prostor, jsou-li zavedeny axiomaticky, odpovídají pevným druhům struktur na množinách, tj. všechny struktury takového druhu jsou vzájemně izomorfní. Ty druhy struktur, které byly zavedeny v novější době (např. grupy nebo topologie), nejsou již takto pevné.

Teorie struktur na množinách připouští obecnější a axiomatickou formu v rámci teorie kategorií a funktorů, přičemž teorie kategorií se zdá být nejcharakterističtější jednotící tendencí v současné matematice; z tohoto důvodu soudím, že v krátkém čase ji bude nutno přednášet na universitách podobně jako ostatní základní disciplíny, a to stejně brzo jako lineární algebru nebo topologii.

Kategorie je třída spolu s částečně definovaným kompozičním zákonem, který splňuje jisté axiómy. Grupa je speciální kategorie, jejíž všechny prvky jsou invertibilní a která má jednu jednotku; nejtypičtějšími kategoriemi jsou však kategorie sestávající ze zobrazení, jejichž prvky jsou zobrazení mezi množinami spolu s obvyklým skládáním zobrazení. Axiómy pro abstraktní kategorie jsou naznačeny těmito kategoriemi, které sestávají ze zobrazení. Prvek nějaké kategorie se nazývá morfismus místo zobrazení a kreslí se jako šipka od jedné jednotky, svého zdroje, k jiné jednotce, svému cíli. Tento obecný pojem morfismu zobecňuje tak pojem zobrazení, který Dedekind považoval za základní nástroj celé matematiky.

Funktory jsou zobrazení mezi kategoriemi slučitelná s kompozičním zákonem. Současně jsou i morfismy jisté kategorie, tj. kategorie všech funktorů. Obvyklé homomorfismy mezi strukturami daného druhu struktur na množinách jsou morfismy nějaké kategorie a tato kategorie připouští kanonický funktor do jisté kategorie sestávající ze zobrazení; je to tzv. zapomínající funktor, tj. funktor, který zapomíná struktury a pamatuje si pouze množiny, na nichž jsou tyto struktury definovány. Tak například máme zapomínající funktor z kategorie spojitých zobrazení mezi topologickými prostory nebo zapomínající funktor z kategorie homomorfismů mezi grupami.

Zaujmeme-li abstraktnější hledisko, můžeme dále uvažovat nějaký funktor p z kategorie H do kategorie C. Nějaká jednotka (nebo objekt) S kategorie H se pak bude nazývat strukturou vzhledem k funktoru p neboli p-strukturou na jednotce $p(S)$ kategorie C. Kategorie H se tedy uvažuje jako kategorie morfismů mezi p-strukturami. Překvapuje, že většinu výsledků, které byly získány pro určité druhy struktur na množinách, lze začlenit do obecné teorie p-struktur, v níž se definují a studují podstruktury, faktor-struktury, volné struktury, součiny a součty systémů struktur, induktivní a projektivní limity funktorů atd. V současné době, kdy je již dána tato definice p-struktury jako přesného matematického objektu, matematické vyšetřování, jak věřím, bude se méně soustřeďovat na studium nějaké zadané p-struktury nebo i zadaného funktoru p; místo toho bude jeho cílem definovat takové třídy funktorů p, aby pro odpovídající p-struktury platila jistá věta, která byla dříve získána pro nějaký speciální funktor p. Jakmile jednou porozumíme pravým důvodům pro platnost této věty, pak zpravidla nahlédneme, že jen několik málo z jejích předpokladů je opravdu nezbytných, takže třída funktorů p, na něž lze ideu této věty rozšířit, obsahuje mnohé další funktory vedle funktoru původního. Například věta o kompaktifikaci topologického prostoru, o úplném obalu uniformního prostoru, konstrukce volné grupy, volného modulu nebo obecněji volné algebraické struktury generované danou množinou jsou vesměs speciální případy abstraktní existenční věty o volných p-strukturách.

Je přirozené, že právě popsané schéma je pouze hrubé. Fakticky je to pouze tvořivá síla každého matematika, která mu umožňuje odhalovat nové zajímavé třídy funktorů. Jak jsme viděli, jeden z charakteristických tvůrčích procesů v matematice spočívá v tom, že třídu dříve definovaných objektů uznáme za nový objekt. Tím, že začínáme studovat třídy a funktory, dospěli jsme vlastně do stadia stejného druhu, ale vyššího stupně, a až se tato nová teorie opět dostatečně zamotá a ztratí svoji přirozenou jednoduchost, nebude nezbytné objevit nějaké sjednocení vyššího stupně? Nehodláme se pokoušet o zodpovědění této otázky. Nahlížíme teď stále čím dále tím více, že matematika je nikdy neukončená tvorba, která nemusí ospravedlňovat svoji existenci důležitostí a rozšiřujícím se počtem svých aplikací; matematika není jen „buldozerem pro fyziku". Může poskytovat klíč k pochopení celého vesmíru ve snaze sjednocovat všechno lidské myšlení od přírodních věd až po filosofii.

Přeložil Ivan Kolář

DOSLOV I.

O AUTOROVI

V předchozím článku podává Ch. Ehresmann na poměrně malém prostoru hluboký a zasvěcený pohled na některé obecné otázky současné matematiky. Pokud se čtenáři zdá tento pohled příliš jednostranný, měl by znovu uvážit, že autor si neklade za cíl hovořit o současné matematice vůbec, ale že se zaměřuje na ty tendence, které výrazně přispívají k jednotě matematiky. A protože podstatná zásluha na praktickém úsilí o sjednocování matematiky přísluší právě N. Bourbakimu (tj. skupině převážně francouzských matematiků, která se označila tímto pseudonymem), je přirozené že se v článku objevují mnohé tzv. „bourbakistické" ideje. Nechci ovšem nikterak tvrdit, že některé části článku nevyjadřují autorovy subjektivní názory a stanoviska (ostatně hovořit objektivně o současnosti bývá nesnadné). Aby si čtenář případně mohl snadněji utvářet vlastní názor na tyto otázky, připojuji na žádost redakce několik informací o autorovi a o charakteru jeho vědecké činnosti.

Charles Ehresmann (* 19. 4. 1905), patří k předním současným francouzským matematikům. Studoval v Paříži, pak působil na universitě ve Strasbourgu (za války krátkodobě v Clermont-Ferrandu) a od r. 1955 je profesorem na pařížské universitě. Úředně je uváděn jako profesor algebraické topologie, ale rozsah jeho vědecké činnosti je značně širší. Tuto činnost lze zhruba rozdělit do tří období, přičemž v prvním období se autor zabývá převážně algebraickou topologií, v druhém základy diferenciální geometrie a ve třetím teorií kategorií. Ehresmann byl členem bourbakistické skupiny (je např. autorem kapitoly o multilineární algebře v druhé knize základní řady). Obecný charakter Ehresmannovy vědecké práce lze nejlépe charakterizovat jeho vlastními slovy z předchozího článku. Platí o ní vskutku, že „jejím cílem není vyřešení nějakého předem vybraného problému, který vznikl v čisté nebo v aplikované matematice", a to navíc ještě „jakýmikoliv prostředky, které jsou k dispozici a se snahou vyhnout se co možno nejdále zavádění nových pojmů", ale je opravdu motivována snahou „nalézt v dané situaci její pravou strukturu a studovat tuto abstraktní strukturu samu o sobě". Jistěže to není běžný obraz o typické práci matematikově (pokud ovšem představa „typického matematika" by vůbec měla právo na existenci). Přehlédneme-li však Ehresmannovo vědecké dílo, nelze neuznat, že tuto koncepci realizuje na vynikající úrovni a imponujícím způsobem. Při tomto pojetí badatelské práce nacházíme ovšem v jeho pracích spíše definice než teorémy. Avšak jeho výsledky významně přispěly k vytvoření obecného pojmu fibrovaného prostoru, Ehresmann podal přesnou definici konexe na hlavním fibrovaném prostoru, zavedl jet (vyslov „džet“ nebo „žet“) jako základní pojem diferenciální geometrie vyššího řádu, vyjasnil pojem Lieovy pseudogrupy, poukázal na možnost obecnější definice druhu struktur v rámci teorie kategorií a o některých dalších jeho idejích z této oblasti se lze dočíst přímo v předchozím článku. Takováto činnost nejenže podstatně přispívá ke sjednocování matematiky, ale ovlivňuje významně i rozvoj konkrétních matematických teorií.

V Ehresmannových vědeckých pracích najdeme též mnohé konkrétní projevy jeho přesvědčení o spřízněnosti matematiky a umění. Pro studované pojmy rád volí obrazné (možno říci i „poetické“) názvy, soubor svých separátů nazval *Esquisses d'un folklore de géométrie différentielle*, do předmluvy ke své knize *Catégories et structures* zařadil i sonet, atd.

Závěrem bych ještě uvedl poznámku k autorovu způsobu citace známé Cantorovy věty, že nadále „matematika je zcela svobodná ve svém rozvoji a...“. Tuto svobodu nelze ovšem chápat jako libovůli; ostatně již zbývající část této věty fakticky říká, že matematická teorie musí být poslušna zákonů logiky, v kterých se v nejobecnější formě obrážejí zákonitosti objektivní reality. A jestliže se v tvůrčím matematickém procesu právě tvorba nových pojmů často projevuje jako důležitý nástroj pro řešení daných problémů i jako příprava účinných prostředků k řešení dalších podobných problémů, svědčí to jen o aktivním charakteru našeho poznávacího procesu a ne o nějaké „absolutní“ svobodě vědeckého bádání v matematice. Podrobný výklad základních otázek spojených s předmětem a metodou matematiky najde čtenář ve 2. vydání *Velké sovětské encyklopedie* v heslu „Matematika“, které napsal významný sovětský matematik A. N. Kolmogorov.

Ivan Kolář

DOSLOV II.

NĚKOLIK POZNÁMEK O TEORII KATEGORIÍ

Byl jsem požádán, abych připojil k předchozímu článku Ch. Ehresmanna několik slov o základních principech a pojmech teorie kategorií. Na několika málo stránkách není možno podat ani velmi stručný přehled výsledků a aplikací tak rozsáhlé teorie. Mohu se tedy jen pokusit naznačit, oč jde. Čtenář, který má již o teorii kategorií jakési představy, zde sotva najde něco nového.

„Podívejte se na zobrazení!“ je motto, kterým jeden ze zakladatelů tohoto oboru S. Eilenberg*) vyjádřil základní myšlenku teorie. Oč zde v podstatě jde? Stojím-li

*) První práce věnovaná teorii kategorií byla publikována S. Eilenbergem a S. MacLanem v r. 1945.

před úlohou týkající se nějakých matematických objektů a zobrazení mezi nimi, bývá výhodné podívat se především na to, co se dá zjistit již ze struktury přítomných zobrazení – případně i přeformulovat danou úlohu na úlohu o zobrazeních – dříve než se začneme zabývat prvky daných objektů. (Např. problém zjistit barevnost grafu můžeme převést na otázku, jak velký musí být úplný graf bez smyček, aby do něho bylo již možno zobrazit daný graf zobrazením zachovávajícím hrany.)

Ilustrujme si to na tomto příkladu:

Vezměme kartézský součin $X = X_1 \times X_2$ dvou množin. Platí:

(P) Existují zobrazení $p_i X$ do X_i $(i = 1, 2)$ taková, že ke každé množině Y a každým dvěma zobrazením f_i množiny Y do X_i $(i = 1, 2)$ existuje právě jedno zobrazení f Y do X takové, že $p_i f = f_i$ $(i = 1, 2)$

(p_i jsou dána předpisem $p_i(x_1, x_2) = x_i$; f je potom dáno předpisem $f(y) = (f_1(y), f_2(y))$). Snadno vidíme, že touto podmínkou (P) je již kartézský součin až na vzájemně jednoznačné zobrazení charakterizován. Přitom se vůbec nemluví o prvcích množin X_1, X_2, X. Kdyby nám šlo jen o kartézský součin množin, mnoho bychom nezískali, neboť popis $X_1 \times X_2$ jako množiny dvojic je jednodušší a navíc určitější. Vezměme však podmínku (P) a nahraďme v ní slovo množina slovem grupa, slovo zobrazení slovem homomorfismus. Dostaneme až na izomorfismus charakteristiku obvyklého součinu grup. Dosadíme-li za slova množina a zobrazení výrazy topologický prostor a spojité zobrazení, dostáváme charakteristiku obvyklého součinu topologických prostorů. Nyní již začíná být výhoda takové charakteristiky patrnější, a to hned ve dvou směrech:

a) Je často pohodlnější pracovat třeba se součinem topologických prostorů jako s prostorem, k němuž existují spojitá zobrazení vyhovující naší podmínce, než ho popisovat jeho vnitřní strukturou. Ještě výraznější je to v případě součinu mnoha prostorů (pak stačí nahradit dvojici indexů v (P) příslušným potřebným počtem).

b) Objeví se souvislost mezi pojmy a konstrukcemi z různých oborů.

Tento druhý aspekt věci možná lépe vynikne na dalším jednoduchém příkladu: Retraktem topologického prostoru X se nazývá, jak známo, jeho podprostor A, k němuž existuje spojité zobrazení X do A, ponechávající prvky z A na místě. Snadno vidíme, že až na homeomorfismus je tato situace charakterizována tím, že

(R) existují spojitá zobrazení j prostoru A do prostoru X a r prostoru X do prostoru A taková, že $r . j$ je identický homeomorfismus A.

Nahraďme zde slovo prostor výrazem Abelova grupa, výraz spojité zobrazení slovem homomorfismus, homeomorfismus slovem izomorfismus. Až na izomorfismus dostáváme charakteristiku toho, že A je direktním sčítancem X. Toto jednoduché pozorování nám přinejmenším napovídá, že mezi chováním retraktů v topologických úvahách a chováním direktních sčítanců v úvahách o Abelových grupách budou jakési analogie.

Uvedené příklady mají společný rys. Stojí zde na jedné straně jakési schéma, na druhé straně útvary sestávající z objektů a význačných zobrazení nějaké teorie (prostory a spojitá zobrazení, grupy a homomorfismy), které se do tohoto schématu vkládají. Takovým útvarům se říká kategorie. Přesněji, kategorie $\mathfrak{K}$ sestává ze dvou tříd $\mathfrak{K}_o$ a $\mathfrak{K}_m$ (prvky první z nich se nazývají objekty, prvky druhé morfismy), ke každému morfismu je určena uspořádaná dvojice objektů, nazývaných jeho definičním oborem a oborem hodnot (v obvyklé symbolice se skutečnost, že morfismus α má definiční obor A a obor hodnot B, zapisuje formulí $\alpha: A \to B$) a na $\mathfrak{K}_m$ je definována částečná operace skládání (obvykle zapisováno $\alpha \, . \, \beta$, nebo prostě $\alpha\beta$) tak, že platí

(i) pro $\alpha: A \to B$ a $\beta: C \to D$ má $\beta \, . \, \alpha$ smysl, právě když $B = C$

(ii) skládání je asociativní

(iii) ke každému objektu A existuje morfismus 1_A takový, že $1_A \, . \, \alpha = \alpha$, $\alpha \, . \, 1_A = \alpha$ kdykoli je skládání definováno.

Tedy např. máme kategorie

množin a všech jejich zobrazení,

topologických prostorů a jejich spojitých zobrazení,

grup a homomorfismů,

uspořádaných množin a monotonních zobrazení,

topologických grup a spojitých homomorfismů.

Nemusí tomu ovšem být vždy tak jako v uvedených příkladech, kde objekty jsou množiny s nějakou strukturou a morfismy některá zobrazení mezi nimi. Velmi důležitý je tento příklad: Vezměme částečně uspořádanou množinu $(X, \leqq)$ a položme $\mathfrak{K}_o = X$, za morfismy vezměme dvojice $(x, y) : x \to y$ takové, že $x \leqq y$, skládání definujme přepisem $(y, z) \, . \, (x, y) = (x, z)$. (Všimněte si též, že schéma (P) zde charakterisuje infimum dvojice prvků.) Jiným příkladem kategorie je pologrupa s jednotkou (má jediný objekt) a opět jiného rázu je třeba kategorie topologických prostorů a tříd vzájemně homotopických zobrazení, která je velmi důležitá v algebraické topologii.

V úvodu ke knize *Abelian categories* poznamenává P. Freyd velmi výstižně, že podobně jako v topologii jde více o spojitá zobrazení než o prostory, jde v teorii kategorií více o funktory a jejich transformace než o kategorie. (Ostatně Ch. Ehresman hovoří o teorii kategorií a f u n k t o r ů.) Seznamme se v rychlosti s těmito dvěma pojmy. Kovariantní (resp. kontravariantní) funktor z kategorie $\mathfrak{K}$ do kategorie $\mathfrak{L}$ je dvojice zobrazení $\mathfrak{K}_o$ do $\mathfrak{L}_o$ a $\mathfrak{K}_m$ do $\mathfrak{L}_m$, označovaných obvykle stejným symbolem, zde třeba F, pro která platí

(i) pro $\alpha: A \to B$ je $F(\alpha): F(A) \to F(B)$ (resp. $F(B) \to F(A)$)

(ii) $F(1_A) = 1_{F(A)}$

(iii) $F(\alpha \, . \, \beta) = F(\alpha) \, . \, F(\beta)$ (resp. $F(\beta) \, . \, F(\alpha)$).

Tak např. přiřazení množiny $X \times X$ množině X a zobrazení $f \times f$ (definovaného předpisem $(f \times f)(x, y) = (f(x), f(y))$ zobrazení f, je funktor z kategorie množin do téže kategorie, vytváření duálních vektorových prostorů a konjugovaných zobrazení je (kontravariantní) funktor z kategorie vektorových prostorů a lineárních zobrazení do sebe, přiřazování homologických grup prostorům a indukovaných homomorfismů spojitým zobrazením jsou funktory z kategorie topologických prostorů do kategorie Abelových grup, funktory mezi částečně uspořádanými množinami, pojímanými jako kategorie (viz výše), jsou prostě monotónní zobrazení. K důležitému případu zapomínajících funktorů, o nichž hovoří Ch. Ehresmann, se ještě za okamžik vrátíme.

Jsou-li F a G funktory z $\mathfrak{R}$ do $\mathfrak{L}$, transformací τ: $F \to G$ rozumíme systém $(\tau^A)_{A \in \mathfrak{R}_o}$ morfismů z $\mathfrak{L}$ takový, že pro každý morfismus α: A $\to$ B z $\mathfrak{R}$ platí

$$\tau^B . F(\alpha) = G(\alpha) . \tau^A .$$

Pojem transformace zachycuje kromě jiného představu „zobrazení, kde každý ví, o co jde, i když definiční obor a obor hodnot nejsou specifikovány" – např. vezměme identický funktor I kategorie množin do sebe a dříve popsaný funktor kategorie množin do sebe přiřazující $X \times X$ k X, označme ho Q. Je patrné, že „diagonální zobrazení" je vlastně transformace I do Q. Ale nejde jen o to. Kdo se jen chvíli zabývá teorií kategorií, brzy zjistí, že se s transformacemi setkává v matematice při vhodném úhlu pohledu na každém kroku (např. homomorfismy algeber jsou vlastně transformace mezi funktory).

Ještě k zapomínajícím funktorům, o nichž se zmiňuje Ch. Ehresmann. Jde o funktory přiřazující třeba topologickým prostorům nebo algebrám jejich nosné množiny a spojitým zobrazením nebo homomorfismům nosná zobrazení, tedy funktory z té které kategorie do kategorie množin a všech zobrazení, ale též o funktory zapomínající ze struktury jen část, jako např. funktor z kategorie topologických grup do kategorie grup zapomínající spojitost nebo třeba funktor z kategorie uniformních prostorů do kategorie topologických prostorů zapomínající stejnoměrnost. Důležitou částí teorie kategorií je teorie tzv. konkrétních kategorií, v níž se zkoumají kategorie spolu s pevně danými zapomínajícími funktory.

Na závěr bych chtěl ještě připojit dvě poznámky. Bourbakiho přístup k definici struktury na množině, o němž mluví Ch. Ehresmann, se dnes již zdá být zastaralý. Je jej možno nahradit účinnějším a nadto jednodušším, využije-li se právě kategorických metod. Další věc, o níž se chci zmínit, je skutečnost, že teorie kategorií se u nás velmi intenzívně pěstuje a že seminář teorie kategorií na Universitě Karlově dosáhl svými pracemi (zvláště z teorie struktur a konkrétních kategorií) značného mezinárodního uznání.

Aleš Pultr