Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Marta Volfová; František Kuřina

Stanovisko I. M. Jagloma k Papyho knize Mathématique Moderne

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 11 (1966), No. 6, 376--383

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138022

pro řadu důvodů (finanční, odchod z hlavních měst...) velmi nepopulární. Další odrazování studentů od studia fyziky vychází jednak z toho, že fyzika je považována za velmi obtížný předmět, jednak z obecného názoru, že zaměstnání vyžadující určitou manuální zručnost mají nízkou úroveň. Konečně i jednou z hlavních příčin nedostatku studentů fyziky na afrických universitách je velký počet stipendií vypisovaných pro absolventy středních škol zámořskými universitami.

Zmíněný nedostatek studentů je základní faktor, který zabraňuje dalšímu růstu fyzikálních kateder a odráží se i v úrovni středních škol. Dokud se podstatně nezvýší počet absolventů přírodovědných oborů, do té doby učitelský sbor středních škol (secondary school) nebude moci být doplňován kvalifikovanými učiteli a tím i počet a úroveň studentů přicházejících na universitu studovat fyziku budou nízké.

K uvedeným potížím spojeným s výukou fyziky na afrických školách a universitách přistupují i obtíže vznikající z nedostatečného obecného základu studentů. Je to zaviněno především nedostatkem obecné mechanické a odborné zkušenosti z dětství, kulturní tradicí a v neposlední řadě i nutností vyučovat fyzice v druhém (ne mateřském) jazyce, tj. v angličtině či francouzštině. Zvláštní úlohu při tom ovšem má i všeobecná nemajetnost studentů. Na druhé straně v afrických zemích je velká potřeba absolventů universit a techniků v zemědělství, v začínajícím průmyslu a v ostatních oborech aplikovaných věd. Tato potřeba v blízké budoucnosti jistě dále poroste.

To jsou poznámky, které se mi zdály typické pro řadu universit zmíněného světadílu. Závěrem bych rád zdůraznil, že během svého pobytu na jedné z afrických universit (Súdánu) jsem našel jak mezi studenty, tak i mezi členy učitelského sboru řadu dobrých přátel a přivezl jsem si domů velmi hezké vzpomínky.

STANOVISKO I. M. JAGLOMA K PAPYHO KNIZE MATHÉMATIQUE MODERNE

Marta Volfová, František Kuřina, Hradec Králové

Čtvrté číslo sovětského časopisu Matematika v škole (ročník 1965) přineslo rozsáhlý článek – recenzi I. M. Jagloma, O některých tendencích v zahraniční metodice matematiky. Článek je poučný postojem význačného sovětského vědce k jednomu z významných a propracovaných návrhů modernizace vyučování matematice, jehož hlavním autorem je profesor university v Bruselu G. Papy. Kromě recenze Papyho knihy rozebírá Jaglom i některé základní problémy modernizace vyučování matematice, jako např. otázku hlavních příčin reformy, cílů vyučování matematice a jiné.

Informativním článkem o Jaglomově recenzi chceme čtenáře Pokroků seznámit stručně i s Papyho knihou, která je u nás těžko dostupná.

Za hlavní cíle vyučování matematice Jaglom považuje:

1. Dát žákům minimum znalostí nutných vzdělanému člověku.
2. Připravit žáky k praktické činnosti.
3. Připravit žáky ke studiu na vysoké škole.

Sestavení nových učebních plánů a osnov je obtížné, protože každý z uvedených tří cílů do jisté míry odporuje zbývajícím. Požadavek úplnosti nebo aspoň ucelenosti znalostí, který vyplývá z prvého cíle, není vůbec v souladu s cílem třetím. Prakticismus vyplývající z druhého cíle je (bez náležitého teoretického základu) sotva charakteristickým pro vzdělaného člověka. Z hlediska vysokých škol je nutno připravit žáky tak, aby se nemuseli přeučovat; to je však málo reálné, vyjdeme-li z prvých dvou cílů. Řešení otázky vyučování matematice na střední škole má tak charakter optimálního řešení, které by vyhovovalo několika protichůdným tendencím. Nejen to. Každý ze jmenovaných cílů vede k celému komplexu různorodých hledisek, neboť nám není předem známa ani budoucí žákova praktická činnost, ani směr jeho dalšího studia.

Vážný problém modernizace je podle I. M. Jagloma svázán se skutečností, že požadavky jednotlivých cílů vyučování se podstatně mění s časem. Sám pojem „vzdělaný člověk" se značně vyvíjí. Do matematiky proniká řada metod a idejí svázaných s kybernetikou. Lze očekávat, že v blízké budoucnosti bude sotva možné považovat člověka, který by neměl základní představy např. o pojmech informace, strategie atp., za vzdělaného. Zavedení teorie pravděpodobnosti na střední školu se již dnes jeví aktuální ve všech zemích. S rozvojem matematických strojů roste význam matematické logiky, která je velmi důležitá ve všech aplikacích matematiky.

Podstatnou změnu doznávají dnes i požadavky vyplývající z posledních dvou jmenovaných cílů vyučování. Není daleká doba, kdy většina absolventů střední školy se v praxi setká s řešením úloh pomocí moderní výpočtové techniky. To ovšem klade na školní vyučování nové požadavky. Znalost základů pravděpodobnosti a matematické logiky není rovněž jen součástí kultury vzdělaného člověka; tyto disciplíny nabývají stále většího významu v praktické činnosti širokého okruhu specialistů nejen vysoké, ale i střední kvalifikace. Rovněž názory na podstatu „vyšší matematiky", na obsah matematického vzdělání na vysoké škole se v posledních letech podstatně mění. Dlouhou dobu se považovala za základ vysokoškolské matematiky matematická analýza. Za základní (nebo také jediný) směr aplikací matematiky se považovaly matematické metody fyziky a techniky. Tento stav se v současné době zjevně mění. Především matematický aparát fyziky a techniky se neobyčejně rozšiřuje. Nezasahuje jen „rovnice matematické fyziky" (diferenciální rovnice), ale i vybrané otázky funkcionální analýzy a teorie pravděpodobnosti. Matematická expanze posledních let do tradičně nematematických oborů vědy podstatně rozšířila představy o užité matematice. Spolu s tím se ovšem mění i názory na vyučování matematice na vysoké škole.

Přitom je zřejmé, že matematický aparát ekonomie či lingvistiky se v mnohém odlišuje od matematického aparátu např. fyziky. Změny v pojetí „vyšší matematiky" nemohou nemít vliv na koncepci „elementární" matematiky, na obsah i formu středoškolského vyučování matematice. Reforma vyučování matematice z počátku století byla vedena v podstatě snahou o zavedení základů diferenciálního a integrálního počtu na střední školu. Dnes je ve většině zemí pojem derivace a integrálu na střední škole zaveden, boj za modernizaci vyučování matematice posouvá nejčastěji hranici „školní" matematiky k teorii pravděpodobnosti a matematické logice.

Požadavek reformy vyučování matematice klade však s neobyčejnou silou i vývoj matematiky samé. „Matematická revoluce" poloviny 20. století je svázána jednak s objevem elektronických počítacích strojů a vznikem kybernetiky, jednak (podle názoru N. Bourbakiho) s tendencemi k „algebraizaci" celé matematiky s plným odhalením jejích základních struktur [1]. Tento vývoj nejen klade požadavek zavedení nových oddílů do osnov středoškolské matematiky, ale staví otázku o zásadní přestavbě celé školní osnovy. Např. stoupenci rozšíření kursu matematiky zavedením prvků matematické logiky trvají nejen na zavedení kapitol o množinové a výrokové algebře, ale obracejí pozornost i na logickou strukturu důkazů. Analogicky jako kdysi algebraická symbolika zjednodušila řešení rovnic, očekává se dnes, že logická symbolika zjednoduší studium logických vztahů ve školní matematice. Změny v matematice, které mají zásadní důležitost pro střední školu, se mimo jiné týkají prudkého zvýšení významu „konečné", „diskrétní" matematiky. Např. studium číselných soustav mělo v době hegemonie matematické analýzy jen spekulativní význam. Dnes má zásadní význam pro aplikace matematiky.

Výše připomenuté příčiny mají za následek široké hnutí za reformu vyučování matematice od národní školy až po přípravu vědeckých pracovníků.

Nejradikálnější přívrženci nových směrů ve vyučování takřka plně zavrhují celý tradiční systém, nejde jim o pronikavou jeho přestavbu, ale o nahrazení novými ideami, které jsou syntézou bourbakistického pojetí matematiky s některými aspekty spojenými s kybernetikou a moderní výpočtovou technikou. Přitom se, jak známo, pracuje na reformě v mnoha zemích i ve školní praxi [2].

Jedním z význačných modernizačních pokusů je experiment profesora Papyho. O něm si lze udělat dobrou představu podle knihy Mathématique moderne, Bruxelles – Paris 1963, určené pro 12–13leté žáky. Pojednejme stručně o jejím obsahu (s přihlédnutím k poznámkám I. M. Jagloma).

Kniha má 468 stran a obsahuje 150 paragrafů rozdělených do 24 kapitol. Tematicky dělí Jaglom knihu na pět částí, které se vzájemně prolínají.

Téma (I) *Základy množinové algebry* obsahuje kapitoly:

1. Množiny. 2. Podmnožiny. 3. Průnik, sjednocení a rozdíl množin. 4. Množinová algebra. 5. Rozklad množiny.

Téma (II) *Geometrie* je rozloženo v kapitolách:

6. Začátky geometrie. 14. Zobrazení roviny. 15. Rovnoběžné promítání a uspořádání.

21. Ekvivalentní dvojice bodů (vektory). 22. Posunutí. 23. Středová souměrnost.

Téma (III) *Binární relace a funkce* se probírá v kapitolách:

7. Relace. 8. Některé třídy relací. 9. Skládání relací. 10. Ekvivalence. 11. Uspořádání. 12. Funkce.

Téma (IV) *Základy teoretické aritmetiky* má kapitoly:

16. Kardinální čísla. 17. Sčítání. 18. Násobení. 19. Dvojková číselná soustava. 20. Celá čísla.

Téma (V) *Základy abstraktní algebry* se studuje v kapitolách:

13. Permutace. 24. Grupy.

Všimněme si podrobněji jednotlivých témat.

Na samém začátku knihy se vykládají obecné vlastnosti rovnosti (reflexívnost, symetričnost, tranzitivnost), studuje se množina všech podmnožin množiny X a vlastnosti množinové inkluze (reflexívnost, tranzitivnost a antisymetričnost). Mimo operace sjednocení a průnik množin (model Boolovy algebry) se zavádějí operace rozdíl množin, symetrický rozdíl $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ a kartézský součin. Dokazují se distributivní zákony (pro sjednocení a průnik), antidistributivní zákony (pro rozdíl a sjednocení nebo průnik) a tři distributivní zákony pro kartézský součin:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C),$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C),$$
$$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C).$$

Studují se vlastnosti symetrického rozdílu a řeší se řada úloh typu:

Dokaž, že

$$(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \setminus D).$$

Jediné téma tradiční matematiky obsažené v knize je geometrie, probíraná ovšem netradičně. Po názorném výkladu geometrických útvarů jako množin bodů se ukazuje možnost různého chápání tradičních pojmů (např. čtverce s hraničními body či bez nich) a geometrického materiálu se využívá pro studium množinových vztahů. Než přistoupí autor k systematickému výkladu geometrie z axiómů, ukazuje smysl deduktivní teorie na zajímavém příkladě:

O dětech Alfrédovi, Bernardovi, Cecílii a Denise byly dány informace:

1. Bernard je bratr Alfréda.
2. Cecílie je sestra Bernarda.
3. Denisa není sestra Cecílie.

Můžeš odůvodnit následující věty?

4. Alfred je bratr Bernarda.
5. Alfred je bratr Cecílie.
6. Alfred není bratr Denisy.

7. Bernard je bratr Cecílie.
8. Bernard není bratr Denisy.
9. Cecílie je sestra Alfréda.
10. Cecílie není sestra Denisy.
11. Denisa není sestra Alfréda.
12. Denisa není sestra Bernarda.

Uveďme aspoň několik ukázek z originálního množinového pojetí geometrických axiómů roviny π.

Axióm $\pi 1$: Rovina π je nekonečnou množinou bodů.

Axióm $\pi 2$: Přímky jsou vlastními nekonečnými podmnožinami roviny π.

Pátý axióm požaduje existenci jediného směru kolmého k libovolnému směru roviny, desátý (poslední) axióm požaduje tranzitivnost rovnosti vektorů.

Pro doplnění představy o charakteru geometrie probírané v knize ocitujeme dva z mnoha příkladů:

1. Do tabulky jsou přeneseny informace $X \perp Y \perp Z \perp T$.

	X	Y	Z	T
X		$\perp$		
Y			$\perp$	
Z				$\perp$
T				

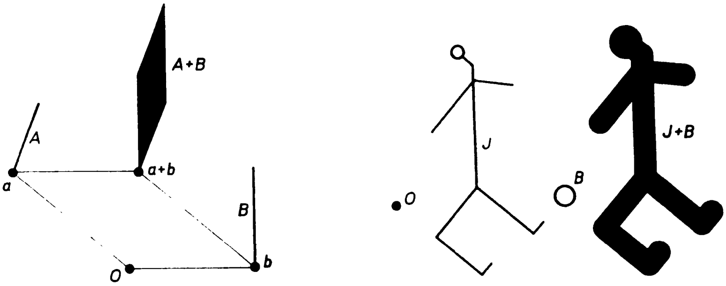
Dovedeš vyplnit celou tabulku? Vysvětli a prověř každý znak, který píšeš. (X, Y, Z, T je označení přímek.)

2. Popiš množiny a) $(\pi \setminus A) \cap (\pi \setminus B)$
b) $A \setminus B$, kde A, B jsou dvě přímky.

(Příklady posledního typu považuje I. M. Jaglom za příliš formální.)

Axiomaticky se charakterizují vlastnosti uspořádání bodů přímky, zavádí se uspořádání v rovině, orientovaný úhel a další pojmy. Studují se konvexní útvary. Dále se probírají vektory a geometrická zobrazení (podle I. M. Jagloma velmi zdařile). Vektory se uvádějí do souvislosti s posunutími v rovině. Z obsažného geometrického materiálu knihy připomeňme aspoň originální „aritmetiku geometrických útvarů". Sčítání vektorů se geometricky interpretuje jako sčítání bodů a ilustruje se zajímavými příklady (obr. 1).

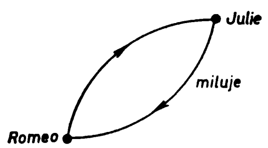
Třetí téma knihy se zabývá relacemi a funkcemi (a je podle I. M. Jagloma pro knihu nejcharakterističtější). Na hrách „Jméno – příjmení" a „Jméno – jméno" (každý žák má najít všechny spolužáky, jejichž příjmení (jméno) začíná týmž písmenem jako jeho jméno) se ukazuje konstrukce uspořádaných dvojic a jejich znázornění orientovanými grafy. Na zajímavých příkladech se studují obecné vlastnosti relací



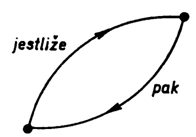
Obr. 1.

(reflexívnost, symetričnost, antireflexívnost, antisymetričnost, tranzitivnost). Tak např. se uvádějí relace:

..... má sestru ..... (v množině dívek a chlapců),
..... má sestru ..... (v množině dívek) (symetričnost),
..... má bratra nebo sestru .....
..... má otce .....
..... je dělitelem ..... (v množině přirozených čísel).



Obr. 2.



Obr. 3.

Relace..... miluje ..... není antisymetrická (obr. 2). V symetrické relaci je pro každou dvojici bodů charakteristický graf podle obr. 3. Skládání relací se začíná rozborem relace ..... má babičku či dědečka ....., neboť v ní se „skládají“ dvě „rodičovské relace“. Jako ukázky příkladů uveďme:

Co je to „otec na třetí“? (Jeden z pradědečků).

$\perp$ je relace definovaná na množině všech přímek roviny. Ukaž, že platí:

$$\perp^2 = \perp \circ \perp = \parallel ,$$

$$\perp \circ \parallel = \parallel \circ \perp = \perp .$$

Po názorných příkladech se formulují formální definice ekvivalence (libovolná reflexívní, tranzitivní a symetrická relace) a uspořádání (libovolná reflexívní, tranzitivní a antisymetrická relace). Toto pojetí neodpovídá (podle I. M. Jagloma) věku dětí. Třetí téma uzavírá kapitola o funkcích. Po obecné definici funkce na libovolné množině se zavádí pojem funkce složené a pojem funkce inverzní k dané funkci. Připomeňme aspoň dva z netradičních příkladů.

Nechť funkce f přiřazuje každému státu jeho hlavní město. Co značí f (Francie), f (Velká Britanie), f (SSSR), f (Peru)? Která hlavní města přiřazuje tato funkce Kolumbii, Belgii, Venezuele?

Nechť funkce f přiřazuje každému městu stát, ve kterém toto město leží. Dovedeš určit f (Paříž), f (Vladivostok), f (Caracas), ...?

V posledním tématu se definuje součet dvou kardinálních čísel a, b jako mohutnost sjednocení dvou disjunktních množin A, B, jejichž mohutnosti jsou po řadě a, b, a součin ab jako mohutnost kartézského součinu $A \times B$. Dokazuje se komutativní, asociativní a distributivní zákon pro sčítání a násobení. Teoretické studium cantorovské teorie množin dosahuje v tomto tématu maxima. Jako příklad se dokazuje věta Cantorova-Bernsteinova. Poslední kapitoly se týkají dvojkové soustavy (podle I. M. Jagloma velmi zdařile zpracované) a celých čísel.

Páté téma, zabývající se grupami a permutacemi, vyniká vysokou úrovní matematické abstrakce spojené s konkrétním materiálem množstvím příkladů a ilustrací. Podrobně se probírají četné příklady grup (grupa celých čísel, grupa rovnoběžných posunutí, grupa všech posunutí roviny, grupa permutací, grupa podmnožin dané množiny vzhledem k algebraické operaci symetrický rozdíl aj.).

Shrňme závěrem stanovisko I. M. Jagloma k Papyho knize.

1. Papy vychází z bourbakistické zásady o jednotě matematiky a považuje za nutné dát představu o matematice jako celku i žákům. Snahy odbourat z matematiky „čínské zdi" jednotlivých disciplín (ostatně vlastní všem přívržencům modernizace vyučování matematice) jsou velmi progresívní.

2. Jednotnému pohledu na matematiku odpovídá i stavba knihy, v níž je výklad co nejúžeji spjat s úlohami. Příkladů a cvičení je tolik, že kniha je i postačující sbírkou. Přitom jsou úlohy svěží, neočekávané, vtipné a mnohdy ne právě lehké. Jsou jednou z nejsilnějších stránek učebnice. Úlohy jsou vzaty nejen z matematiky, ale mnohem častěji „ze života". Ilustrují velmi dobře a přiměřeně věku žáků probírané pojmy.

3. Papy zcela přirozeně využívá indukce a dedukce a uvádí celou řadu zajímavých metodických nápadů. V omezené míře je v knize zavedena elementární logická symbolika ($\rightarrow$, $\leftrightarrow$). Užívá se jí však tak, aby se stala žákům běžnou.

4. Výklady knihy jsou maximálně názorné. Systematicky se využívá schémat a grafů, které jsou pečlivě barevně zpracovány. Množství ilustrací značně ulehčuje osvojování nových pojmů. Vysoce je nutno hodnotit i vnější stránku knihy. Tisk, mnohobarevné ilustrace i vazba knihy zvyšují pedagogický efekt a patrně vyvolávají i chuť do učení.

5. Pro některé kapitoly je charakteristický poměrně vysoký stupeň matematické

abstrakce, sotva vhodný pro školní učebnici (zavádění některých obecných pojmů na samém začátku knihy, kapitoly o teoretické aritmetice aj.).

6. V některých částech trpí kniha přílišným formalismem (např. mnoho formálních cvičení na množinovou symboliku, příliš formální výklad v prvých třech kapitolách aj.).

7. Problematický je přechod žáků na vyučování podle Papyho knihy ve 12 letech. (Kniha předpokládá znalosti základů aritmetiky, algebry a geometrie.) Přesto, že další zpracování matematiky G. Papym nám není známo, je otázka, zda takřka úplné vyřazení tradičního materiálu ze školy je správné. Rovněž Papyho výběr nového materiálu je diskutabilní. Tak např. na obecném výkladu o grupách lze sotva s jistotou trvat jako na nutné součásti vyučování v tak raném věku žáků (ač je tomu tak v mnoha zemích). Zcela nepřijatelné je, až na dvojkovou soustavu, zpracování teoretické aritmetiky (téma IV). Přes teoretickou poučnost by se neměla cantorovská teorie množin studovat na střední škole. Nemá dnes aplikací, kromě budoucích matematiků žáci se s ní dále nesetkají, a je teoreticky složitá.

8. Papyho kniha je učebnicí zcela nového typu. Vyzývavý název Mathématique moderne nese právem. Přesto, že je nutné nezavádět nové tendence ve vyučování matematice ukvapeně do škol, je velmi potřebný překlad této knihy. Mathématique moderne si zaslouží zájem učitelů metodiků i vědců.

Literatura

[1] Bourbaki N.: Architektura matematiky, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. V. 1960 str. 509.

[2] Jelínek M.: O modernizačních snahách v matematickém vyučování v cizině, Matematika ve škole, roč. XV. 1965, str. 306.