Jan Horský

Úvod do obecné teorie relativity

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 11 (1966), No. 6, 333--348

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/138017`

POKROKY MATEMATIKY, FYZIKY A ASTRONOMIE
ROČNÍK XI – ČÍSLO 6

PADESÁT LET EINSTEINOVY TEORIE

Dne 20. března 1966 uplynulo padesát let ode dne, kdy do redakce časopisu Annalen der Physik došla Einsteinova práce, v níž byla v konečné formě formulována obecná teorie relativity. Jeho myšlenky byly rozvinuty v dnes již nepřehledném množství prací a daly podnět k mnoha novým plodným idejím. Einsteinova teorie dosud zdaleka nevyčerpala všechny své zdroje dalšího vývoje a v blízké budoucnosti budeme patrně svědky jejích nových úspěchů. Přinášíme tři přehledné přednášky o struktuře a aktuálních problémech Einsteinovy teorie, přednesené na přírodovědecké fakultě University J. E. Purkyně v Brně při příležitosti padesátého výročí jejího vzniku.

ÚVOD DO OBECNÉ TEORIE RELATIVITY (OTR)

JAN HORSKÝ, Brno

GEOMETRIE A SPECIÁLNÍ TEORIE RELATIVITY (STR)

Žádné fyzikální měření ani žádná fyzikální úvaha nemůže být důkladně provedena bez užití pojmu vztažné soustavy (vztažného systému). Mějme např. za úkol blíže popsat pohyb nějakého tělesa. Poněvadž totéž těleso se vzhledem k různým jiným tělesům pohybuje různě, můžeme pohyb stanovit vždy jen k určitému jinému tělesu-tělesu vztažnému. Se vztažným tělesem lze spojit nějakou souřadnou soustavu a tak máme realizovánu vztažnou soustavu. Vzhledem k ní potom provádíme měření a matematicky formulujeme uvažovaný fyzikální proces. Ze souřadných systémů se obvykle užívá ten nejjednodušší – systém kartézský.

Transformace mezi dvěma kartézskými soustavami S a S' v třírozměrném eukleidovském prostoru (majícími společný počátek) je dána vzorci [1]

$$x'^{\alpha} = a_{\alpha\beta} x^{\beta} ,$$

$$a_{\alpha\beta} \equiv \cos\left(x'^{\alpha}, x^{\beta}\right), \; a_{\alpha\beta} a_{\alpha\gamma} = \delta_{\beta\gamma}, \; \det a_{\alpha\beta} = +1 . \tag{1}$$

V celém textu užívejme výhradně Einsteinovy sumační symboliky, řecké indexy nabývají hodnot od jedné do tří, indexy latinské abecedy hodnot 1 – 4. Každá výjimka bude vyznačena. Vektor lze tedy definovat jako soubor tří veličin, které se ze soustavy S do S' transformují podle vztahů

$$P'_\alpha = a_{\alpha\beta} P_\beta \,. \tag{2}$$

Vektor lze považovat za tenzor prvního řádu, tenzorem n-tého řádu vzhledem k transformaci (1) se rozumí soubor 3^n veličin transformujících se podle formulí

$$T_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = a_{\alpha_1\beta_1} \ldots a_{\alpha_n\beta_n} T_{\beta_1 \ldots \beta_n} \,. \tag{3}$$

Každá fyzikální událost je plně charakterizována čtyřmi čísly $(\boldsymbol{r}, t)$. V bodě $\boldsymbol{r}$ a čase t nechť nastala událost prvá, v bodě $\boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ a čase $t + \mathrm{d}t$ událost druhá. Obecně platí

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - c^2 \mathrm{d}t^2 \neq 0 \,, \tag{4}$$

($\mathrm{d}s^2 = 0$ platí tehdy, je-li prvou událostí vyslání světelného signálu a druhou jeho příchod); výraz pro $\mathrm{d}s$ se nazývá intervalem mezi oběma událostmi. Lze totiž ukázat, že $\mathrm{d}s$ je roven buď prostorové vzdálenosti, nebo časovému intervalu (až na faktor c) mezi oběma událostmi, a to podle toho, zda $\mathrm{d}s^2 > 0$, resp. $\mathrm{d}s^2 < 0$. Zavedením označení $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, $x^4 = ict$ lze (4) přepsat na tvar

$$\mathrm{d}s^2 = G_{ik} \, \mathrm{d}x^i \, \mathrm{d}x^k, \; G_{ik} = \delta_{ik} \,. \tag{5}$$

Uvedený výraz lze chápat jako výraz pro čtverec vzdálenosti mezi dvěma body Minkowského prostoru. Je-li dán výraz pro čtverec vzdálenosti mezi dvěma nekonečně blízkými body říkáme, že je dána metrika uvažovaného prostoru; metrika speciální teorie relativity je tedy (pseudo)eukleidovská.

Speciální Lorentzova transformace se obvykle píše takto

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right), \quad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2},$$

snadno se ovšem přesvědčíme, že ji lze psát ve tvaru

$$x'^i = \alpha_{ik} x^k \,,$$

kde

$$\alpha_{ik} = \begin{vmatrix} \gamma & 0 & 0 & i \dfrac{v}{c} \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{iv}{c}\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix}, \quad \alpha_{ik}\alpha_{im} = \delta_{km} \,.$$

Podobný zápis má i obecná Lorentzova transformace [2] a srovnáním s (1) vidíme, že Lorentzovu transformaci lze interpretovat jako otočení čtyř kartézských souřadných os v Minkowského čtyřrozměrném prostoru. Analogicky ke vzorcům (2) a (3) se zavádí i vektory a tenzory ve čtyřrozměrném prostoru (5).

Libovolný fyzikální zákon nechť je v inerciální soustavě S' popsán ve tvaru rovnosti dvou tenzorů, např. tenzorů druhého řádu

$$B'_{ik} = T'_{ik} ,$$

tvar uvažovaného fyzikálního zákona v inerciální soustavě S získáme užitím příslušných transformačních vzorců pro tenzor druhého řádu, odtud okamžitě plyne

$$B_{ik} = T_{ik} .$$

Uvažovaný fyzikální zákon má tedy stejný tvar i v soustavě S; uvažovaný fyzikální zákon je tedy vůči Lorentzově transformaci kovariantní. Konkrétními výsledky STR se zabývat nebudeme, zdůrazněme však, že její heureistická cena záleží v tvrzení, že správný fyzikální zákon musí být vůči Lorentzově transformaci kovariantní. Zapíše-li se fyzikální zákon ve tvaru rovnosti dvou tenzorů v Minkowského prostoru, máme tím automaticky zaručenu jeho lorentzovskou kovarianci.

VZNIK OTR

Po vzniku STR se začala přezkoumávat lorentzovská kovariance nejrůznějších fyzikálních zákonů. Byla vybudována relativistická mechanika hmotného bodu i tuhého tělesa, relativistická mechanika kontinua, relativistická elektrodynamika i termodynamika. Bylo tedy třeba si všimnout z tohoto hlediska i jevů gravitačních, tj. Newtonova gravitačního zákona

$$\boldsymbol{F} = -\gamma \frac{MM'}{r^3} \boldsymbol{r} ,$$

kde M a M' jsou tzv. těžké (gravitační) hmoty zdroje a zkušební částice. Gravitační hmota charakterizuje vzájemné působení obou těles vyvolané interakcí gravitačního pole „zdroje" se zkušební částicí.

Zkušební částice nechť se pohybuje setrvačností a nechť na ni počne působit síla $\boldsymbol{F}$, jež jí udělí zrychlení $\boldsymbol{a}$. Mezi těmito dvěma veličinami platí Newtonův (druhý) pohybový zákon $\boldsymbol{F} = m \, . \, \boldsymbol{a}$, kde konstanta úměrnosti m značí setrvačnou hmotu tělesa. Setrvačná hmota charakterizuje setrvačný odpor tělesa kladený zrychlující síle. K udělení téhož zrychlení dvěma tělesům nacházejícím se v inerciálních pohybech bude tedy třeba větší síly u toho tělesa, jehož setrvačná hmota bude větší.

Zavedením Newtonova gravitačního potenciálu $U = -\gamma M/r$ z předchozích dvou rovnic dostáváme

$$\boldsymbol{a} = -\left(\frac{M'}{m}\right) \operatorname{grad} U .$$

V r. 1880 maďarský fyzik R. V. Eötvös experimentálně prokázal, že platí

$$\frac{M'}{m} = 1 \pm 10^{-8} ;$$

v r. 1957 byl tento závěr ještě o tři řády zpřesněn R. H. Dickem [3]. Užitím rovnosti obou hmot lze Newtonův gravitační zákon nahradit Poissonovou diferenciální rovnicí $\Delta U = 4\pi\gamma\varrho$, v níž U splňuje příslušné okrajové podmínky a ϱ je hustota setrvačné hmoty. Poissonova rovnice není vůči Lorentzově transformaci kovariantní [4], a když Einstein provedl její úpravu tak, aby obdržená rovnice hověla speciálnímu principu relativity, ukázalo se, že by zrychlení volného pádu tělesa nacházejícího se ve vertikálním a homogenním gravitačním poli mělo záviset na horizontální složce rychlosti padajícího tělesa. To je v přímém rozporu s experimentálně prověřenou rovností obou hmot; pokus zpracovat gravitační problém v rámci STR zavrhl Einstein jako nepřiměřený.

V této situaci si Einstein klade sugestivní a velmi hlubokou otázku: „... Co je přírodě do souřadných systémů a do jejích pohybových stavů? Je-li už nutné pro popis přírody užívat souřadného systému, který jsme libovolně zavedli my, neměla by být vůbec nijak omezena volba jejích pohybových stavů, přírodní zákony by měly být zcela nezávislé na této volbě (obecný princip relativity)...“. Přijmout obecný princip relativity za platný není snadné, stačí si uvědomit, že ve zrychlených systémech působí tzv. „fiktivní“ síly (odstředivá, Coriolisova, setrvačná), které závisí výlučně na zrychlení vztažného systému. Tato skutečnost byla pro Newtona důvodem k zavedení absolutního prostoru.

Uvažujme o dvou tělesech S_1 a S_2 ze stejného, deformace schopného materiálu, která jsou od sebe tak daleko, že jejich vzájemné gravitační působení je zanedbatelné. Pro jednoduchost nechť jsou obě tělesa ve vzájemné rovnoměrné rotaci kolem osy spojující jejich středy. Předpokládejme dále, že každý pozorovatel určí tvar tělesa, na němž se nachází, S_1 budiž koule, S_2 nechť je zploštělý rotační elipsoid. Newtonovská mechanika odtud vyvodí, že S_1 je v klidu v absolutním prostoru a S_2 že se nachází v absolutní rotaci. Zploštění S_2 se objasní účinkem fiktivních sil, v newtonovské mechanice je tedy příčinou fiktivních sil sám absolutní prostor. Ptáme-li se dále, jak jinak se absolutní prostor projevuje, jaké jsou jeho další vlastnosti, nic bližšího se nedovíme. Nemáme tedy jinou možnost, jak se přesvědčit o jeho existenci než právě tím faktem, pro který byl zaveden. Takovéto hypotézy jsou příliš umělé a jsou ve sporu s metodami i cílem veškerého vědeckého bádání, jež spočívají ve vypracování kritérií dovolujících odlišit objektivní závěry od subjektivních představ.

Předpokládejme na okamžik, že kromě obou těles žádná jiná hmotná tělesa neexistují. V tomto případě, nechceme-li operovat absolutním prostorem, by zůstala forma obou těles nevysvětlena. Je však rozdíl obou forem v tomto případě empirickým faktem? Jistěže není, nikdy nebylo možno pozorovat ve vesmíru pouze dvě tělesa. Reálná situace je taková, že každé těleso je vždy obklopeno obrovským počtem druhých nebeských těles. Přitom je experimentálně známo, že planety jsou (více či méně) zploštělé; zdá se tedy jako velmi pravděpodobné, že příčinou „fiktivních" sil je systém vzdálených nebeských těles.

Podle Einsteina zrychlený pohyb těchto hmot vůči uvažované zrychlené soustavě K vzbuzuje v K gravitační pole, jež se z hlediska pozorovatele v inerciální soustavě jeví jako fiktivní síly. Fiktivní síly jsou tedy Einsteinem interpretovány jako jistý druh sil gravitačních. Takovouto interpretaci nelze samozřejmě odvodit, a je proto nutné postulovat, že neinerciální vztažné soustavy jsou ekvivalentní nějakému gravitačnímu poli [5].

Fyzikální zdůvodnění a smysl principu ekvivalence se názorně objasní, uvažujeme-li např. o pohybu v rovnoměrně zrychlené vztažné soustavě. Volná tělesa libovolných hmot budou mít v této soustavě stejná zrychlení, jež je rovno zrychlení soustavy, má však opačný směr. Stejným se bude jevit pohyb v homogenním a konstantním gravitačním poli. Rovnoměrně zrychlený vztažný systém je tedy ekvivalentní konstantnímu a homogennímu vnějšímu gravitačnímu poli. Poněkud obecnějším případem je nerovnoměrně zrychlený, přímočaře se pohybující systém – ten je ekvivalentní homogennímu, avšak časově proměnnému gravitačnímu poli.

Gravitační pole, kterým jsou ekvivalentní neinerciální vztažné soustavy, nejsou zcela totožná s gravitačními poli „uzavřených" těles (Slunce, Země apod.). Mezi nimi je podstatný rozdíl v jejich chování v nekonečnu, neboť gravitační pole uzavřených zdrojů konvergují vždy v nekonečnu k nule. Gravitační pole, kterým jsou ekvivalentní neinerciální systémy, vymizí v celé oblasti, jakmile se přejde k inerciálnímu systému. Gravitační pole uzavřeného zdroje lze eliminovat vhodnou volbou vztažného systému pouze v malé oblasti prostoru, kde lze toto pole uzavřeného zdroje považovat za homogenní. Z tohoto důvodu se tato gravitační pole nazývají permanentními a princip ekvivalence se často formuluje pro gravitační pole uzavřených zdrojů ve tvaru [4]: Gravitační pole v ohraničené oblasti prostoru je ekvivalentní silovému poli (poli fiktivních sil), které vzniká při zrychleném pohybu. Žádný místní pokus nemůže mezi sebou obě pole rozlišit. V tomto pojetí má princip ekvivalence pouze lokální charakter; vzhledem k předchozí větě lze tedy říci, že oba typy gravitačních polí musí splňovat stejné zákony.

Nechť S je inerciální vztažný systém, S' budiž obecná, neinerciální vztažná soustava. V tomto případě tvar transformačních vzorců vedoucích od S k S' explicitně neznáme, a proto píšeme

$$x'^i = x'^i(x^1, x^2, x^3, x^4),\ x^4 = ct,\ x'^4 = ct', \tag{6}$$

kde x'^i značí prostoročasové souřadnice bodové fyzikální události v S', jež má v S

Minkowského souřadnice x^i. Řešitelnost soustavy (6) vzhledem k x^i se předpokládá; užitím těchto transformačních formulí se pro interval mezi dvěma nekonečně blízkými událostmi snadno obdrží výraz

$$ds^2 = G_{ik}\,dx^i\,dx^k = g'_{ik}\,dx'^i\,dx'^k = ds'^2\,, \tag{7}$$

jenž je ovšem invariantní i vůči transformacím typu

$$x''^i = x''^i(x'^k)\,, \tag{8}$$

která znamenají přechod od S' k jiné neinerciální soustavě S''. Čtyři veličiny x''^i značí prostoročasové souřadnice uvažované události vzhledem k S'', koeficienty g'_{ik} jsou funkcemi souřadnic x'^i.

Z dosud uvedeného vyplývá, že obecný princip relativity lze vyjádřit tvrzením, že rovnice vyjadřující přírodní zákony musí být kovariantní vůči transformacím souřadnic typu (8).

RIEMANNOVA GEOMETRIE

Dvojrozměrná eukleidovská geometrie neplatí na plochách zakřivených; studiem geometrických vlastností těchto ploch se svého času důkladně zabýval K. GAUSS. Jeho přístup k uvedenému problému záleží v tom, že každý bod plochy se očísluje dvojicí čísel tak, aby přiřazení bodu a číselné dvojice bylo vzájemně jednoznačné. Tato dvojice čísel se nazývá Gaussovými souřadnicemi bodu, souřadnice dvou sousedních bodů se musí lišit diferenciálně málo. Spojíme-li čarou body se stejnými prvními, resp. druhými souřadnicemi, obdržíme síť křivých čar, které nazveme souřadnicovými čarami x^1, resp. x^2. Tak je realizována Gaussova soustava souřadnic. Charakteristický a podstatný rys Gaussových souřadnic záleží v tom, že neoznačují ani délky ani úhly ani jiné měřitelné geometrické veličiny, ale že jsou pouhými čísly. Body na ploše lze očíslovat mnoha různými způsoby, na ploše lze tedy realizovat mnoho různých systémů Gaussových souřadnic.

Gaussovu metodu zkoumání geometrických vlastností zakřivených ploch lze zobecnit na bodové množiny třírozměrné, čtyřrozměrné a obecně řečeno n-rozměrné. Čtyřrozměrnou bodovou množinu si lze podle Gaussovy metody představit tak, že to je množina bodů, z nichž každý je úplně popsán zadáním čtveřice čísel (x^1, x^2, x^3, x^4), které se nazývají jeho souřadnicemi. Metrika uvažované bodové množiny je v těchto souřadnicích dána výrazem [6]

$$ds^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k \tag{9}$$

Při přechodu k jiné soustavě Gaussových souřadnic (daném transformačními vzorci (8)) zůstává výraz pro metriku (9) invariantní; takovéto bodové množiny se nazývají Riemannovskými prostory. Srovnáním s (7) vidíme, že metrika čtyřrozměrného prostoru OTR je riemannovská, veličiny g_{ik} v (7) tedy charakterisují geometrické vlastnosti uvažovaného čtyřrozměrného prostoru.

Každý soubor 4^1 veličin, veličin A'^i, které se při transformaci typu (8) transformuje stejně jako diferenciály nových souřadnic dx'^i se nazývá kontravariantním vektorem. Kontravariantní vektor lze tedy definovat čtyřmi transformačními vztahy

$$A'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} A^k . \tag{10}$$

Nechť φ je vůči transformaci (8) invariantem tj., nechť platí $\varphi(x^i) = \varphi(x'^i)$. Čtyři veličiny $\partial\varphi/\partial x^i$ se při uvedené transformaci transformují podle vztahů

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i},$$

jež se zřejmě liší od (10). Každý soubor 4^1 veličin A_i, jež se při (8) transformují podle vztahů

$$A'_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} A_k ,$$

se nazývá kovariantní vektor a značí se indexy dole. V souvislosti s tím máme tři druhy tenzorů druhého řádu, a to tenzor kovariantní A_{ik}, kontravariantní A^{ik}, smíšený (tj. jednou kovariantní a jednou kontravariantní) A^i_k. Postupně jsou definovány formulemi

$$A'_{ik} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} A_{lm}, \quad A'^{ik} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial x'^k}{\partial x^n} A^{mn}, \quad A'^i_k = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial x'^k} A^m_n ,$$

analogicky se definují tenzory vyšších řádů.

Vedle tenzorových operací součtu a součinu tenzorů, jež jsou obecně známé, existuje velmi důležitá operace zvaná úžením tenzorů. Nechť je dán tenzor $A^{\cdot\cdot i \cdot\cdot}_{\cdot\cdot k \cdot\cdot}$; soubor veličin $A^{\cdot\cdot i \cdot\cdot}_{\cdot\cdot i \cdot\cdot}$ (přes index i se sčítá) tvoří tenzor o dva řády nižší, než byl tenzor původní. Z tenzoru druhého řádu R^i_k se tedy operací úžení obdrží invariant (tenzor nultého řádu) $R = R^i_i$. Není obtížné ukázat, že soubor 4^2 koeficientů g_{ik} tvoří kovariantní tenzor druhého řádu nazývaný základním (kovariantním) metrickým tenzorem. Jednotkovým smíšeným tenzorem druhého řádu je Kroneckerův symbol a soubor 4^2 veličin g^{ik} určených z rovnic

$$g_{im} g^{km} = \delta^k_i$$

tvoří kontravariantní základní metrický tenzor.

Lze ukázat, že ve (čtyřrozměrné) soustavě kartézských souřadnic není rozdílu mezi kontravariantními, kovariantními a smíšenými tenzory; tento rozdíl vzniká při přechodu k zakřiveným souřadnicím. Je-li nějaká fyzikální veličina v kartézské soustavě tenzorem (např. druhého řádu), může být v zakřivených souřadnicích vyjádřena ve třech formách. Přechod od jedné formy k druhé se provádí pomocí základního metrického tenzoru, např. platí

$$A^{ik} = g^{il}g^{km}A_{lm}, \; A_{ik} = g_{im}g_{kn}A^{mn} ,$$

v kartézské soustavě $g_{ik} = \delta_{ik}$, a tedy $A^i = A_i$, $T^{ik} = T_{ik}$ apod.

Není obtížné se přesvědčit, že v křivočarých souřadnicích derivace tenzoru podle těchto souřadnic nedává veličiny tenzorového charakteru. Žádaného tenzorového charakteru lze ovšem dosáhnout i v křivočarých souřadnicích, a to zavedením tzv. kovariantní derivace [7]. Kovariantní derivace se většinou odvozuje na základě jistých teoretických úvah týkajících se paralelního přenosu v křivočarých souřadnicích. V rámci našich úvah plně postačí, řekneme-li, že např. kovariantní derivací kontravariantního tenzoru druhého řádu T^{ik} rozumíme výraz

$$T^{ik}_{;l} = \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ml}T^{mk} + \Gamma^k_{ml}T^{im} ,$$

kde

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right)$$

jsou tzv. Christoffelovy indexy druhého druhu (koeficienty afinní konexe). Soubor 4^3 veličin $T^{ik}_{;l}$ tvoří tenzor třetího řádu dvakrát kontravariantní a jednou kovariantní. Christoffelovy indexy nejsou tenzory vůči transformaci (8), nýbrž pouze vůči transformacím lineárním, v kartézské soustavě je $\Gamma^i_{kl} = 0$ a kovariantní derivace přechází v derivaci obyčejnou.

Na zakřivených plochách neexistují křivky mající všechny vlastnosti eukleidovské přímky. Avšak i na zakřivených plochách existují křivky, jež jsou nejkratšími čarami, které spojují dva pevné body uvažovaného prostoru. Křivky mající tuto vlastnost se nazývají geodetickými čarami. Hledaná křivka nechť má parametrické rovnice $x^i = x^i(p)$, jež se pro daná g_{ik} určí ze soustavy rovnic [6]

$$\frac{d^2x^i}{dp^2} + \Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{dp} \frac{dx^l}{dp} = 0 ; \tag{11}$$

v eukleidovském prostoru má tedy rovnice geodetické čáry (ve speciální parametrizaci) tvar,

$$\frac{d^2x^i}{dp^2} = 0$$

jak bylo nutné očekávat.

Nechť x^i značí původní systém Gaussových souřadnic, $\Gamma^i_{kl}(P)$ budiž hodnoty

Christoffelových symbolů v bodě P; $x^i(P)$ jsou tedy Gaussovy souřadnice tohoto bodu. V soustavě souřadnic x'^i

$$x'^i = x^i - x^i(P) + \tfrac{1}{2}\Gamma^i_{kl}(P)\,(x^k - x^k(P))\,(x^l - x^l(P))$$

je $\Gamma'^i_{kl}(P) = 0$, tj. $\partial g'^{ik}(P)/\partial x'^l = 0$. Systém souřadnic x'^i, v nichž jsou v daném bodě derivace g^l_{ik} rovny nule, se nazývá lokálně inerciální. V této soustavě je totiž v bodě P rovnice geodetické čáry tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^2 x'^i}{\mathrm{d}p^2} = 0\,.$$

Lze se ptát, za jakých podmínek existuje souřadná soustava x'^i, v níž jsou Christoffelovy indexy rovny nule i v konečné oblasti. Tuto otázku i její řešení lze formulovat takto: Nutnou a postačující podmínkou pro převedení kvadratické formy

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ik}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^k$$

na tvar [8]

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2 - (\mathrm{d}x^4)^2,\ x^4 = ct$$

v konečné oblasti, je rovnost nule tenzoru

$$R^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} - \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl} - \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km}\,. \tag{12}$$

Tenzor (12) se nazývá Riemannovým tenzorem křivosti; ve čtyřrozměrném prostoru má dvacet nezávislých komponent, ve třírozměrném prostoru šest, ve dvojrozměrném pouze jednu. Řekněme R_{1212}, pro kterou dostáváme $R_{1212} = gR/2$, kde $g =$ det g_{ik} a R je skalární křivost uvažovaného prostoru (plochy) ($R = g^{il}g^{km}R_{iklm}$), jež s hlavními Gaussovými křivostmi plochy $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ souvisí vztahem $R = 2\varkappa_1\varkappa_2$.

Riemannův tenzor křivosti tedy plně popisuje geometrické vlastnosti uvažovaného prostoru; je-li v nějaké oblasti Riemannův tenzor roven nule, je tato oblast eukleidovská, nezakřivená; je-li naopak v celém prostoru $R_{iklm} \neq 0$, jde o prostor zakřivený. Pro prostory dimenze větší než dvě ztrácí ovšem pojem zakřivení prostoru svůj názorný smysl. Zakřivením prostoru se prostě rozumí odchylka jeho metriky od metriky eukleidovského prostoru.

Z Riemannova tenzoru křivosti lze sestrojit tenzor křivosti druhého řádu

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^r_{il}\Gamma^l_{kr} - \Gamma^r_{ik}\Gamma^l_{lr}\,,$$

pomocí něhož se definuje Einsteinův tenzor S_{ik}

$$S_{ik} = R_{ik} - \tfrac{1}{2}g_{ik}R\,.$$

Tenzor S_{ik} splňuje důležité relace [8]

$$S^{ik}_{;k} = 0 . \tag{13}$$

ZÁKLADNÍ ZÁKONY OTR

Souřadnice bodu v Riemannově prostoru jsou Gaussovými souřadnicemi. Vzhledem k předchozímu je tedy zřejmé, že v OTR ztrácejí souřadnice svou jednoduchou fyzikální interpretaci. Vzniká proto základní problém, jak pomocí těchto souřadnic najít výrazy pro skutečné vzdálenosti (tj. vzdálenosti měřené tuhými tyčemi) dvou bodů a pro skutečný časový interval mezi dvěma událostmi. Lze dovodit, že prostorová vzdálenost mezi dvěma blízkými body $(x^\alpha, x^\alpha + dx^\alpha)$ je dána výrazem [9]

$$d\sigma^2 = \left(g_{\alpha\beta} - \frac{g_{4\alpha}g_{4\beta}}{g_{44}}\right) dx^\alpha \, dx^\beta . \tag{14}$$

Uvažovaná rovnice vyjadřuje vztah mezi metrikou reálného prostoru a metrikou čtyřrozměrného prostoročasu, z (14) zároveň vyplývá, že v OTR metrika třírozměrného prostoru je nejen neeukleidovská, ale že může záviset i na čase, jde-li o časově proměnné gravitační pole.

Z tohoto hlediska zbývá si tedy ujasnit pojem vztažné soustavy v OTR. Ve shodě s předchozím rozumí se vztažným bodem bod x^α = konst., vztažným systémem (odpovídající souřadnicím x^i) se rozumí soubor všech vztažných bodů, jež mohou být realizovány souborem částic. V OTR tedy obecně neexistuje vzájemně nepohyblivý vztažný systém. Vztažný systém v OTR si názorně představíme jako deformující se těleso, v jehož každém bodě jsou umístěny libovolně jdoucí (tzv. souřadnicové) hodiny ukazující čas $t = x^4/c$. Libovolnost jejich chodu je omezena pouze podmínkou, aby rozdíl údajů blízkých hodin zůstal malý.

Skutečný časový interval $d\tau$ mezi dvěma událostmi, jež nastaly v bodě x^α (měřený ideálními hodinami nacházejícími se v x^α v klidu), souvisí se souřadnicovým časem t vztahem [9]

$$d\tau = \sqrt{(-g_{44})}\, dt, \; g_{44} < 0 . \tag{15}$$

Z (14) a (15) je zřejmé, že základním problémem bylo nalezení základních rovnic dovolujících nalézt metriku časoprostoru g_{ik}. Hledané rovnice lze obdržet z variačního principu

$$\delta(S_g + S_m) = 0 , \tag{16}$$

kde S_g a S_m jsou účinkové funkce gravitačního pole a hmoty toto pole budící. Vzhledem k tomu, že hledáme „pohybové" rovnice gravitačního pole popsaného tenzorem g_{ik}, bude se naznačená variace v (16) provádět podle těchto veličin, jež lze chápat jako Lagrangeovy zobecněné souřadnice. Po provedení naznačené variace může být rovnice (16) psána ve tvaru [10]

$$\int (S_{ik} + \varkappa T_{ik})\, \delta g^{ik} \sqrt{(-g)}\, \mathrm{d}\Omega = 0, \mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}x^1\, \mathrm{d}x^2\, \mathrm{d}x^3\, \mathrm{d}x^4\,,$$

odkud vzhledem k libovolnosti δg^{ik} dostáváme

$$R_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} R = -\varkappa T_{ik}\,, \tag{17}$$

resp.

$$R_{ik} = -\varkappa (T_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} T)\,, \tag{18}$$

neboť $R = \varkappa T$. Konstanta $\varkappa = 8\pi\gamma/c^4$ je Einsteinova gravitační konstanta, T_{ik} značí (symetrický) tenzor energie-impulsu hmoty (zdroje gravitačního pole). Jeho schéma lze názorně zapsat ve tvaru matice

$$T_{ik} = \left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{c}\text{tenzor}\\ \text{napětí}\end{array} & \text{impuls} \\ \hline \text{impuls} & \text{-energie} \end{array} \right), \tag{5}$$

v níž příslušné veličiny značí, přesně řečeno, jejich hustoty.

Tenzor energie-impulsu hmotného systému lze v první aproximaci psát ve tvaru

$$T^{ik} = \varrho \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\tau}\,, \tag{19}$$

kde ϱ značí klidovou hustotu hmoty měřenou v lokálně inerciálním systému, $\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\tau$ je rychlost hustoty ϱ, τ je vlastní čas měřený ideálními hodinami sledujícími hustotu ϱ. Vzhledem k (13) platí $T^{ik}{}_{;k} = 0$ a lze ukázat [8], že pro částici popsanou tenzorem energie-impulsu (19) mají rovnice $T^{ik}{}_{;k} = 0$ tvar

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^i_{kl} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}\tau} = 0\,, \tag{20}$$

který je shodný s rovnicí geodetické čáry (11). Z fyzikálního hlediska vzorce (20) vyjadřují pohybové rovnice uvažované částice. V gravitačním poli se tedy volná částice pohybuje po geodetické čáře Riemannova prostoru.

Rovnice $T^{ik}{}_{;k} = 0$ jsou vzhledem k (13) obsaženy v Einsteinových gravitačních rovnicích (17). Z druhé strany jsme na příkladě ukázali, že rovnice $T^{ik}{}_{;k} = 0$ v sobě obsahují pohybové rovnice toho fyzikálního systému, který je popsán uvažovaným tenzorem energie-impulsu. Einsteinovy gravitační rovnice v sobě tedy obsahují i pohybové rovnice zdroje uvažovaného gravitačního pole. Odtud vyplývá, že v OTR nemůže být libovolným způsobem zadáno rozložení a pohyb hmoty. Zadány mohou být pouze počáteční hodnoty některých fyzikálních veličin, pohyb celé soustavy se spolu s g_{ik} získá řešením rovnic (17).

Jako výsledek lze říci, že Einsteinovy gravitační rovnice reprezentují systém deseti hyperbolických parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu pro šest komponent g_{ik}, tři komponenty rychlosti a hustotu hmoty. Ukazuje se dále, že počátečních podmínek bude osm, tři počáteční hodnoty rychlosti, počáteční rozložení hmoty a čtyři podmínky charakterisující chování gravitačního pole vně zdroje. Takto zadaná úloha reprezentuje Cauchyho problém, jiná formulace úlohy spočívá v zadání vhodných asymptotických podmínek na tenzor g_{ik} a jeho derivace [3], [12].

Předpokládejme, že uvažované gravitační pole je slabé, tj. metrika Riemannova prostoru nechť se málo liší od metriky STR,

$$g_{ik} = G_{ik} + h_{ik}\,, \tag{21}$$

kde h_{ik} a jejich derivace jsou malými veličinami, jejichž čtverce lze zanedbat. Metrický koeficient g_{44} z (21) pišme formálně ve tvaru

$$g_{44} = -(1 + 2U/c^2) \tag{22}$$

a explicitní výraz pro U se najde z Einsteinových rovnic. Bude-li se částice popsaná tenzorem energie-impulsu pohybovat malou rychlostí ve srovnání s rychlostí světla, dostaneme pro nenulové komponenty pravé strany rovnic (18) hodnotu $-\varkappa\varrho c^2/2$; levá strana těchže rovnic bude rovna výrazu $-\Delta U/c^2$, předpokládáme-li, že uvažované gravitační pole nezávisí na čase. Porovnáním obou výrazů dostáváme rovnici $\Delta U = 4\pi\gamma\varrho$ shodnou s Poissonovou rovnicí pro Newtonův potenciál. V aproximaci slabého, statického gravitačního pole a malých rychlostí plyne tedy z Einsteinových rovnic Newtonův gravitační zákon [10].

Bližším rozborem lze dále ukázat, že $h_{\alpha\beta} = h_{44}\delta_{\alpha\beta}$. Prostorová vzdálenost mezi dvěma body (x^α, $x^\alpha + \mathrm{d}x^\alpha$) bude tedy podle (22) a (14) rovna

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right)(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2),\; U = -\gamma\,\frac{M}{r}\,. \tag{23}$$

Eukleidovská geometrie platí tedy v případě slabého gravitačního pole přibližně, souřadnice x, y, z nejsou přesně souřadnicemi kartézskými. Na povrchu Země je např. $2U/c^2 \approx 10^{-9}$, a přibližně lze tedy psát

$$\mathrm{d}\sigma^2 \approx \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\,.$$

Odchylka od eukleidovské geometrie je většinou velmi malá.

První exaktní řešení Einsteinových rovnic bylo ještě v r. 1916 nalezeno K. SCHWARZSCHILDEM [11]. Toto řešení popisuje metriku sféricky symetrického a statického gravitačního pole; zavedou-li se „sférické“ prostorové souřadnice $x^1 = r$, $x^2 = \vartheta$, $x^3 = \varphi$, lze externí Schwarzschildovo řešení (tj. řešení v oblasti $T_{ik} = 0$) psát ve tvaru

$$(24)\qquad ds^2 = \frac{dr^2}{1 - 2\dfrac{m}{r}} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2\, dt^2\,,$$

kde $m = \gamma M/c^2$ a M značí úhrnnou hmotu zdroje. Lze ukázat, že pro slabé pole přechází Schwarzschildova metrika v Einsteinovo řešení (23).

EXPERIMENTÁLNÍ OVĚŘENÍ OTR

a) *Pohyb perihélia planet.* V gravitačním poli se zkušební částice pohybuje po geodetice (20). Pro Schwarzschildovo pole (24) z (20) plyne, že dráha zkušební částice je rovinná křivka určená diferenciálními rovnicemi [4]

$$(25)\qquad \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\gamma M}{h^2} + \frac{3\gamma M u^2}{c^2}\,,\; r^2\frac{d\varphi}{ds} = \frac{h}{c}\,,$$

kde h je integrační konstanta, $u = 1/r$. Od relativistických formulí se příslušné klasické vzorce liší členem $3\gamma M u^2/c^2$, vliv tohoto členu se měřitelně projeví při oběhu planety kolem Slunce a při průchodu světelného paprsku kolem zdroje silného gravitačního pole.

Řešením klasických rovnic je, jak známo, elipsa – řešení rovnic (25) se hledá ve tvaru „porušené“ elipsy

$$(26)\qquad u \equiv \frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 - e\cos\omega\varphi)\,,$$

kde $p = A(1 - e^2) = h^2/\gamma M$ je parametr elipsy, A je její velká poloosa, e značí excentricitu elipsy a ω dosud neznámou funkci. Počátek polární soustavy souřadnic nechť je umístěn v jednom z ohnisek elipsy; pro funkci ω z (26) v prvním přiblížení dostáváme $\omega = 1 - 3\gamma M/p$. Podle (26) se planeta nachází v perihéliu, tj. v bodě s nejmenším r (největším u) tehdy, když $\cos\omega\varphi = -1$. Pro dva za sebou následující průchody perihéliem máme $\omega\varphi_1 = \pi$, $\omega\varphi_2 = \pi + 2\pi$, odkud

$$(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi + \frac{6\pi\gamma M}{pc^2}\,.$$

Při jednom oběhu částice se tedy perihélium planety posune ve směru svého pohybu o úhel

$$(27)\qquad \delta\varphi = \frac{6\pi\gamma M}{pc^2} = \frac{6\pi\gamma M}{Ac^2(1 - e^2)}\,.$$

Za sto let dává vzorec (27) pro planetu Merkur teoretickou hodnotu $\delta\Phi = 43{,}03''$, experimentálně nalezeno $\delta\Phi = (43{,}11 \pm 0{,}45)''$ [3].

b) *Ohyb světla v gravitačním poli.* Interval ds mezi dvěma body spojenými světelným signálem je roven nule ve všech inerciálních soustavách; podle obecného principu relativity to musí platit ve všech vztažných soustavách. Je tedy $h \to \infty$ a rovnice (25) nabývá tvaru

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{3\gamma M u^2}{c^2}. \tag{28}$$

Světelný paprsek jdoucí směrem od nějaké hvězdy nechť se pro $\varphi = 0$ dotýká okraje slunečního kotouče, poloměr Slunce budiž R. Zavedeme-li „kartézské" souřadnice $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, lze v prvním přiblížení psát řešení rovnic (28) ve tvaru

$$R = \frac{3\gamma M}{2c^2R}\sqrt{(x^2 + y^2)} + x\,,$$

což znamená, že trajektorie světla má hyperbolický charakter. Rovnice jejich asymptot jsou

$$R = x \pm \frac{2\gamma M}{c^2R}\,y\,. \tag{29}$$

Úhel mezi oběma asymptotami je roven úhlu, o který se odchýlí světelný paprsek od svého původního směru, z (29) pro něj dostáváme $\delta\varphi = 4\gamma M/Rc^2$. Podle obdrženého vzorce by se měl světelný paprsek dotýkající se slunečního kotouče odchýlit o úhel $\delta\varphi = 1{,}75''$, Van Bisbroeckovo měření z r. 1952 dává hodnotu $\delta\varphi = (1{,}70 \pm 0{,}10)''$.

c) *Rudý posun spektrálních čar.* Předpokládejme, že v bodě P se nachází nějaký oscilátor a světelný signál nechť je vždy vyslán při maximu každého kmitu. Souřadnicové hodiny (měřící souřadnicový čas) nechť jsou v každém bodě nařízeny tak, že jejich chod je shodný s chodem vysílaných světelných pulsů. Především lze ukázat, že interval souřadnicového času Δt mezi dvěma následujícími pulsy (v bodě P) má stejnou hodnotu v celém prostoru. Souřadnicovou frekvencí rozumíme výraz $\nu = 1/\Delta t$, vlastní frekvence ν^0 (měřená standardními hodinami v bodě P) je rovna $\nu^0 = 1/\Delta\tau$. Vzhledem k (15) dostáváme [9]

$$\nu(P) = \nu^0(P)\sqrt{[-\,g_{44}(P)]}\,. \tag{30}$$

V bodě Q nechť jsou světelné pulsy registrovány. Analogicky k (30) platí

$$\nu(Q) = \nu^0(Q)\sqrt{[-\,g_{44}(Q)]}\,.$$

Vzhledem k předchozímu však máme $\nu(P) = \nu(Q)$, takže

$$\nu^0(Q) = \nu^0(P)\sqrt{\frac{[g_{44}(P)]}{[g_{44}(Q)]}}\,. \tag{31}$$

Pro gravitační pole (22) z (31) plyne

$$\nu^0(Q) = \nu^0(P) \sqrt{\frac{[1 + 2U(P)/c^2]}{[1 + 2U(Q)/c^2]}} . \tag{32}$$

Proto pozorovaná vlastní frekvence v bodě Q se bude lišit od vlastní frekvence v bodě P o veličinu $\Delta\nu^0 = \nu^0(Q) - \nu^0(P)$, jež je pro uvažované (slabé) gravitační pole (22) dána výrazem

$$\frac{\Delta\nu^0}{\nu^0(P)} = \frac{\nu^0(Q) - \nu^0(P)}{\nu^0(P)} = \frac{U(P) - U(Q)}{c^2} \tag{33}$$

přímo plynoucím z (32). Nechť $|U(Q)| < |U(P)|$, tj. $\Delta\nu^0 < 0$, a tedy $\lambda(Q) > \lambda(P)$. Spektrální čáry budou tedy v bodě Q posunuty směrem k červenému konci spektra.

Bod P budiž na povrchu Země, jejíž hmotu opět označme M a poloměr R, bod Q nechť se nachází ve výši H nad zemským povrchem ($H \ll R$). Po dosazení veličin $U(P) = -\gamma M/R$ a $U(Q) = -\gamma M/R + H$ z (33) po úpravě obdržíme

$$\left| \frac{\Delta\nu^0}{\nu^0} \right| = \frac{gH}{c^2} , \tag{34}$$

kde g značí absolutní hodnotu gravitačního zrychlení na povrchu Země. Vzhledem k hodnotám veličin vystupujících na pravé straně (34) lze očekávat, že uvažovaný efekt bude velmi malý a velmi těžce měřitelný. Pro $H = 22{,}496$ m z (34) např. plyne $|\Delta\nu^0/\nu^0| = 4{,}9 \,.\, 10^{-15}$, změření takového efektu je samozřejmě možné jen za předpokladu, že přirozená šířka spektrální čáry je velmi malá. Užitím Mösbauerova efektu Paund a Rebka v r. 1960 dokázali, že pro výše uvedenou hodnotu H platí $|\Delta\nu^0/\nu^0| = (5{,}13 \pm 0{,}51)\, 10^{-15}$, což skvěle souhlasí s teoretickou hodnotou [4].

Souhlas experimentálních výsledků s OTR je přesvědčivý. Předpokládaných relativistických efektů dnes již existuje celá řada (posun perihélia u umělých družic, „rotační“ relativistické efekty u umělých družic, Shapirův navrhovaný pokus [13], [14]). Vlastní problém ovšem záleží v tom, že efekty předpokládané OTR jsou velmi malé; současná úroveň experimentální techniky k jejich zjištění většinou nedostačuje.

ZÁVĚR

V posledních letech nápadně vzrostl zájem teoretických fyziků, matematiků, filosofů i geologů o problémy současné teorie gravitace [15] [16] [17]. Kromě vzrůstajícího počtu monografií o tom zcela jasně svědčí i velký počet mezinárodních konferencí, seminářů i letních škol tomuto problému věnovaných. Jejich počet lze vyčíslit v desítkách, soubor aktivně pracujících fyziků v této oblasti počet konferencí vysoce překračuje, existuje mezinárodní organisace se sídlem v Ženevě, jež tyto pracovníky sdružuje. To bezpochyby jasně prokazuje nejen životnost a pravdivost teorie relativity, ale i geniálnost jejího tvůrce.

Literatura

[1] P. G. BERGMANN: Instroduction to the Theory of Relativity. New York, 1942.
[2] J. L. SYNGE: Relativity: The Special Theory. Amsterdam, 1956.
[3] L. WITTEN: Gravitation: an introduction to current research, New York, 1962.
[4] M. A. TONNELAT: Les Principes de la Théorie Électromagnétique et de la Relativité (ruský překlad) Moskva, 1962.
[5] A. EINSTEIN: Ann. d. Phys. *49*, 769, 1916.
[6] J. L. SYNGE: Tensor Calculus, Toronto, 1952.
[7] A. J. MCCONNEL: Application of Tensor Analysis, New York 1957 (ruský překl.).
[8] V. A. FOK: Těorija prostranstva, vremeni i tjagotěnija, Moskva 1961.
[9] C. MØLLER: The Theory of Relativity, Oxford 1961.
[10] L. D. LANDAU, I. M. LIFŠIC: Těorija polja, Moskva 1960.
[11] K. SCHWARZSCHILD: Sitz. d. Preuss. Akad. d. Wiss., *189*, 1916.
[12] A. TRAUTMAN: Lectures on General Relativity, London, 1958.
[13] V. L. GINZBURG ve sborníku: Einstein i sovremennaja fyzika, Moskva 1956.
[14] I. I. SHAPIRO: Phys. Rev. Lett., Vol. *13*, No. 26, p. 789, 1964.
[15] Gravitation and Relativity, Ed. by Hong-Yee Chiu and W. F. Hoffman, N. York, 1964.
[16] Gravitacija i topologija (sborník), Redakce D. Ivaněnka, Moskva, 1966.
[17] Einštejnovkij sbornik 1966, Redakce I. E. Tamma a B. Kuzněcova, Moskva, 1966.

RELATIVISTICKÁ KOSMOLOGIE

JAROSLAV PACHNER, Praha

HISTORICKÝ VÝVOJ VĚDECKÉ KOSMOLOGIE

S prvním pokusem o vybudování kosmologie, založeným nikoliv na dohadech, nýbrž na přírodovědecké teorii, se setkáváme již u Newtona. Ten ukázal, že kdyby hvězdný systém tvořil jediný hmotný ostrov v nekonečném prázdném eukleidovském prostoru, musela by se za čas veškerá hmota soustředit do jediného tělesa. Z toho Newton usuzoval, že hvězdy jsou přibližně rovnoměrně rozloženy po celém nekonečném prostoru.

S koncepcí prostorově nekonečného a statického vesmíru by však byly spojeny tři paradoxy. V r. 1826 odvodil OLBERS [1], že hvězdy rovnoměrně rozložené po celém nekonečném prostoru by musely vytvořit podstatně vyšší jasnost nočního nebe, než jaká je vskutku pozorována (fotometrický paradox). V r. 1865 rozšířil CLAUSIUS [2] platnost věty o entropii izolované termodynamické soustavy na celý vesmír a došel k závěru, že vesmír nemůže mít nekonečné trvání, neboť se neodvratně blíží „tepelné smrti", kdy veškerá energie bude rovnoměrně rozdělena po celém vesmíru (termodynamický paradox). NEUMANN [3] v r. 1874 a V. SEELIGERT [4] v r. 1895 poukázali na gravitační paradox: V nekonečném vesmíru s rovnoměrně rozloženou hmotou by