[26] M. WOLFF: *On Korovkin Type Theorems in special function lattices.* J. Approximation Theory, v tisku.

[27] D. E. WULBERT: *Convergence of operators and Korovkin's theorem.* J. Approximation Theory *1* (1968), 381—390.

[28] H. BAUER and K. DONNER: *Korovkin Approximation in $C_0(X)$.* Math. Ann. *236* (1978), 225—237.

[29] H. BAUER, G. LEHA and S. PAPADOPOULOU: *Determination of Korovkin closures.* Math. Zeitschrift *168* (1979), 263—274.

[30] G. LEHA and S. PAPADOPOULOU: *Nachtrag zu G. Leha: Relative Korovkin-Sätze.* Math. Ann. *233* (1978), 273.

Poznámka překladatelů

Na začátku loňského roku udělila Americká matematická společnost H. Bauerovi za tento článek Chauvenetovu cenu za období tří let (1976—1978). Je to cena za nejlepší anglicky psaný matematický článek přehledného charakteru — vloni byla udělena již po osmadvacáté od r. 1925. Jejím hlavním cílem je stimulovat tvorbu prvotřídních, hezky a srozumitelně napsaných článků toho typu, který si s chutí přečtou všichni matematici. Mezi nositeli Chauvenetovy ceny je řada známých odborníků, např. P. R. HALMOS, M. KAC, F. TRÈVES, P. D. LAX a další. Oceněný článek je v podstatě překladem [5] a byl otištěn v The American Mathematical Monthly *85* (1978), 632—647. Články oceněné dříve Chauvenetovou cenou byly vydány v r. 1978 ve dvojdílném sborníku „The Chauvenet Papers".

Profesor H. Bauer se narodil r. 1928 v Norimberku. Studoval v Erlangenu a v Nancy a po získání doktorátu v r. 1953 působil nejprve v Erlangenu jako asistent a později v Hamburku jako docent a profesor. Od r. 1965 je profesorem na univerzitě v Erlangenu-Norimberku.

H. Bauer působil na řadě zahraničních univerzit a je členem mnoha vědeckých institucí. V minulém roce byl na krátké návštěvě na MFF UK v Praze.

Vědecká aktivita prof. Bauera je velmi rozsáhlá. Je autorem více než 50 prací, jejichž spektrum se pohybuje od teorie integrálu přes funkcionální analýzu (konvexita, teorie aproximace) k teorii potenciálu a markovských procesů. Napsal učebnice z pravděpodobnosti a teorie míry, z teorie integrálu a o abstraktní teorii potenciálu.

J. C. Maxwell a dovŕšenie klasickej elektrodynamiky

Rudolf Zajac

Pred 150 rokmi, 13. júna 1831, sa narodil v rodine Johna Clerka Maxwella v škótskom Edinburgu jeden z velikánov fyziky James Clerk Maxwell. Pokroky matematiky, fyziky a astronómie uverejnili pred dvomi rokmi článok o živote a diele J. C. Maxwella pri príležitosti 100. výročia jeho smrti [6]. (J.C. Maxwell zomrel na rakovinu žalúdka 8. novembra 1879.) To nám umožňuje venovať sa teraz podrobnejšie histórii hlavného Maxwellovho diela, jeho teórii elektromagnetického poľa. Je to priliehavé už aj preto, lebo 29. augusta toho istého roku, v ktorom sa J. C. Maxwell narodil, objavil Michael Faraday elektromagnetickú indukciu a v náväznosti na svoje experimenty rozpracoval teóriu elektriny a magnetizmu na základe pôsobenia „na blízko" prostredníctvom elektromagnetického poľa – teóriu magnetických a elektrických siločiar [7].

J. C. Maxwell sa stal vášnivým obrancom Faradayových myšlienok, vytýčil si za úlohu Faradayove názory formulovať matematicky. 10. decembra 1855 a 11. februára 1856 predniesol pred Filozofickou spoločnosťou v Cambridge svoju prvú prácu o elektrine a magnetizme, nazvanú *O Faradayových siločiarach* [1]. Nevedno, či si J. C. Maxwell už vtedy uvedomil ďalekosiahle dôsledky svojho postupu.*) Práca obsahuje skutočne iba elegantný matematický prepis Faradayových myšlienok a v jej závere Maxwell skromne označuje svoj prístup k problematike ako možný alternatívny opis elektrických a magnetických javov.

V marci 1861 vyšla potom v 21. zväzku Philosophical magazine druhá Maxwellova práca o elektrodynamike pod názvom *O fyzikálnych siločiarach.* V tejto práci už dopĺňa Ampèrov zákon zavedením posuvného prúdu. Nachádzame tu už zárodky rovníc poľa.

Napokon vo svojej tretej práci *Dynamická teória elektromagnetického poľa***) a vo svojom vrcholnom syntetickom diele *Pojednanie o elektrine a magnetizme****), ktorého prvé vydanie vyšlo v roku 1873, J. C. Maxwell zavŕšil svoju teóriu. Doplnil Ampèrov zákon posuvným prúdom a formuloval rovnice poľa, z ktorých deduktívne vyplýva celá klasická elektrodynamika.

J. C. Maxwell, ktorý sa v úvode k svojmu *Pojednaniu o elektrine a magnetizme* vyhlasuje (doslova) nie za sudcu, ale za advokáta Faradayovej teórie poľa, nielen obránil túto teóriu, ale vyzbrojil ju takou explanačnou a predikčnou schopnosťou a krásou, tkvejúcou v jej jednoduchosti a logickej konzistentnosti, že iné teórie zostali iba historickou kuriozitou.****) Preto nečudo, že Ludwig Boltzmann Maxwellove rovnice komentoval slovami: „Či to bol boh, čo napísal tieto znaky?"

Maxwell na základe svojich rovníc predpokladal, že viditeľné svetlo aj neviditeľné tepelné žiarenie sú elektromagnetickým vlnením vymedzenej vlnovej dĺžky. Existenciu elektromagnetických vĺn a totožnosť ich vlastností s vlastnosťami viditeľného svetla dokázal Heinrich Hertz v roku 1888. J. C. Maxwell predpovedal tlak žiarenia, čo umožnilo pomocou termodynamických úvah odvodiť v roku 1884 Stefanov-Boltzmannov zákon,

*) Obdobná bola situácia s Maxwellovou kinetickou teóriou plynov. Po prečítaní Clausiusovej práce *O druhu pohybu, ktorý nazývame teplom* napísal v roku 1859 Georgeovi Gabrielovi Stokesovi list o tom, že si urobil „cvičenie v mechanike" a vypočítal, ako by sa správal v rovnovážnom stave veľký súbor pružných guličiek uzavretých v nádobe daného objemu. Výsledkom bol zákon rozdelenia molekúl ideálneho plynu podľa rýchlostí, nesúci Maxwellovo meno [5].

**) Royal Society Transactions, Vol. *CLV*, v ďalšom cit. podľa [1].

***) Maxwell, J. C.: *A treatise on electricity and magnetism.* Oxford, 1873, v ďalšom cit. podľa [1].

****) Pravda, teória poľa sa spočiatku presadzovala len pomaly proti Neumannovej a Weberovej teórii okamžitého pôsobenia na diaľku. Ešte začiatkom nášho storočia sa Maxwellova teória na väčšine vysokých škôl na európskom kontinente vôbec neprednášala.

v roku 1893 Wienov posunovací zákon a v roku 1900 Planckov zákon žiarenia absolútne čierneho telesa. V roku 1889 P. N. Lebedev dokázal tlak žiarenia aj experimentálne. Napokon Maxwellove rovnice slúžili A. Einsteinovi v roku 1905 za východisko k špeciálnej teórii relativity. Až zo zorného uhlu tejto teórie vyniká teoretický význam Maxwellovho posuvného prúdu, bez ktorého by rovnice poľa neboli invariantné voči Lorentzovým transformáciám a elektrický náboj by nebol absolútnym invariantom.

Metóda analógií

J. C. Maxwell zasiahol do dejín fyziky nielen koncepčne (existencia poľa ako fyzikálnej reality, pôsobenie na blízko), ale aj metodologicky, keď začal rozvíjať novú metódu analógií, a to už vo svojej práci *O Faradayových siločiarach.* (Nadviazal na myšlienky Williama Thomsona, neskoršieho lorda Kelvina.) Karteziánska fyzika v duchu Descartesovej racionalistickej filozofie preceňovala význam hypotéz, presnejšie povedané podcenila ich experimentálnu verifikáciu. Ako protiváhu proti tejto metóde presadzoval Isaac Newton (nie vždy dôsledne) matematický opis javov, ku ktorému dospel (alebo mal dospieť) indukciou. J. C. Maxwell považoval obe tieto metódy za jednostranné. Prvá zvádza k nadraďovaniu určitých (často fixných) predstáv nad fakty, v druhej sa strácajú za matematickým opisom fyzikálne vlastnosti. Maxwell pokračuje: „Aby sme si utvorili fyzikálne predstavy bez toho, že by sme prevzali určitú fyzikálnu teóriu, musíme si osvojiť existenciu fyzikálnych analógií. Pod fyzikálnou analógiou rozumiem čiastočnú podobnosť (nie totožnosť, pozn. R. Z.) medzi zákonmi jednej vedy a nejakej inej vedy, pričom pomocou každej z nich môžeme znázorniť druhú“*). Maxwell zjednotil kladné stránky oboch kriticky posúdených postupov a vyjadril svoje presvedčenie o jednotnej štruktúre zákonov prírody. Metóda analógií sa čoskoro vo fyzike udomácnila**).

Tento metodologický exkurz sme považovali za užitočný aj preto, lebo povrchné štúdium histórie zvádza často k názorom, akoby Maxwell bol priamo aplikoval hydrodynamiku na Faradayovu teóriu siločiar a silových trubíc. Maxwell neuvažoval reálnu, ani ideálnu kvapalinu, ale vykonštruoval hypotetickú kvapalinu, „súbor imaginárnych vlastností“***). Táto kvapalina je homogénna a nevážiteľná, neprejavuje sa teda zotrvačnosťou, pohybuje sa len, ak je pod tlakom, a to proti odporu, ktorý je priamo úmerný jej rýchlosti. Ukazuje sa, že prúdočiary pohybu takejto kvapaliny sú kolmé na plochy rovnakého tlaku. Maxwell potom stotožňuje elektrický potenciál so záporne vzatým tlakom a intenzita elektrického poľa je priamo úmerná rýchlosti prúdenia kvapaliny.

---

*) Z Maxwellovej práce *O Faradayových siločiarach*, cit. podľa [1] str. 12.

**) Medzi prvými, čo túto metódu ďalej rozvíjali, bol Josiah Willard Gibbs, ktorý už v roku 1875 prepísal Maxwellove rovnice do vektorového tvaru. J. W. Gibbs zaviedol termodynamické potenciály ako analógiu s potenciálom v konzervatívnom silovom poli, ďalej fázovú hustotu, správajúcu sa vo fázovom priestore ako nestlačiteľná kvapalina, atď. Metóda analógií zohrala významnú úlohu aj v novšej fyzike (napr. Bohrov princíp korešpondencie a Heisenbergov postup pri riešení problému anharmonického oscilátora v roku 1925, ktorý viedol k formulovaniu kvantovej mechaniky).

***) c.d. str. 18.

Žriedla a nory prúdových trubíc v dielektriku zodpovedajú nábojom. Model, ktorý Maxwell vytvoril, preberá predstavy a aparát mechaniky kontinua ale objekt, ktorý opisuje, nemá vlastnosti reálneho telesa, napríklad nemá hmotnosť.

Analógiu s prúdom tejto hypotetickej kvapaliny používa aj na opis magnetických javov a samozrejme na elektrický prúd.

V ďalších kapitolách sa zaoberá teóriou elektromotorického napätia, vzájomným pôsobením uzavretých prúdov a elektromagnetickou indukciou.

Uvedieme Maxwellovo odvodenie indukčného zákona, pri ktorom nadväzuje na Helmholtzovu prácu *O zachovaní sily**). Maxwell označuje veličiny, vzťahujúce sa na magnetizmus indexom 1, veličiny, vzťahujúce sa na elektrinu indexom 2:

a_1, b_1, c_1 sú zložky magnetickej indukcie (vektora $\boldsymbol{B}$)
$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ sú zložky magnetickej intenzity (vektora $\boldsymbol{H}$)
a_2, b_2, c_2 sú zložky prúdovej hustoty (vektora $\boldsymbol{j}$)
$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ sú zložky intenzity elektrického poľa (vektora $\boldsymbol{E}$).

Cituje vety, ktoré Ampère formuloval pomocou svojich štyroch základných experimentov [7], ale vyvodzuje z nich nové závery zo stanoviska teórie poľa.

Predovšetkým nachádza rovnicu pre určenie prúdovej hustoty z vektora $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ v tvare

$$a_2 = \frac{d\beta_1}{dz} - \frac{d\gamma_1}{dy} \tag{1}$$

(v ľavotočivom karteziánskom vzťažnom systéme) a cyklicky ďalej, t.j. v súčasnom zápise vzťah

$$\boldsymbol{j} = \operatorname{rot} \boldsymbol{H}\,, \tag{1a}$$

teda svoju prvú rovnicu bez posuvného prúdu.

Formuluje potom rovnicu kontinuity pre bezžriedlové pole

$$\frac{da_2}{dx} + \frac{db_2}{dy} + \frac{dc_2}{dz} = 0 \tag{2}$$

čiže v súčasnom zápise

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0\,. \tag{2a}$$

Vzťahy (1) a (2) sú dôsledkami experimentálnych skúseností, ku ktorým Maxwell pribral ešte ďalšie zákony vyplývajúce zo skúsenosti, totiž Poissonove rovnice [7] elektrostatiky a magnetostatiky. Vychádzajúc len z týchto experimentálnych daností a matematických úprav (používa Greenovu, Stokesovu a Gaussovu vetu) formuluje sedem všeobecných

---

*) Pozri [4].

teorémov. V posledných dvoch definuje z magnetickej indukcie vektorový potenciál $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ (v Maxwellovej terminológii zložky elektrotonickej intenzity, ktoré neskoršie nazval zložkami elektromagnetickej hybnosti) zo vzťahu (v súčasnom zápise)

$$\mathbf{B} = \text{rot}\, \mathbf{A} + \text{grad}\, \Psi \,. \tag{3}$$

Maxwell teda uvažoval existenciu magnetického monopólu. Vo svojom siedmom teoréme odvodil výraz pre energiu magnetických tokov v tvare

$$W = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{B}\, \mathbf{H}\, \mathrm{d}\tau \,, \tag{4}$$

ktorý preformuloval pre prípad neprítomnosti „magnetických hmotností", t.j. nábojov*)

$$W = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{A}\, \mathbf{j}\, \mathrm{d}\tau \,. \tag{4a}$$

Po tejto matematickej príprave Maxwell ukázal – sledujúc Helmholtzove myšlienky [4] – že Faradayov indukčný zákon priamo vyplýva z Ampèrových viet o silovom pôsobení elektrických prúdov a zákona zachovania energie.

Urobil takúto energetickú bilanciu:

Predpokladajme predbežne nejaký vonkajší zdroj, v dôsledku ktorého vznikajú vo vodiči prúdy hustoty $\mathbf{j}$ a intenzita elektrického poľa nech je $\mathbf{E}$. Potom za čas $\mathrm{d}t$ sa „spotrebuje práca na prekonanie odporu" (teraz by sme povedali: časť energie, ktorá je ekvivalentná Jouleovmu teplu je:) po prepise do sústavy SI

$$\mathrm{d}t \int \mathbf{E}\, \mathbf{j}\, \mathrm{d}\tau \,. \tag{5}$$

Okrem toho v dôsledku elektromagnetického pôsobenia stacionárne prúdy vykonajú prácu voči vonkajším silám v prípade permanentných magnetov v blízkosti vodičov v sústave SI (po jednoduchej úprave)

$$\mathrm{d}t \int \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\, \mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t \int \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \mathbf{j} \right) \mathrm{d}\tau \,. \tag{5a}$$

Ak niet vonkajších zdrojov energie, ktoré by vyvolali prúdy, musí sa súčet výrazu (5) a pravej strany (5a) rovnať nule.

Keďže hranice integrálov sú ľubovoľné, musí platiť

---

*) Pomocou známych viet vektorovej analýzy možno ukázať ekvivalentnosť výrazu (4) a (4a) za predpokladu div $\mathbf{B} = 0$. V rovniciach (4), (4a) a v súvisiacich vzťahoch má mať veličina W polovičnú hodnotu, ako na to upozornil už L. Boltzmann v starostlivo vypracovaných komentároch k Maxwellovej práci. V sústave SI potom $W = \frac{1}{2}\int \mathbf{BH}\, \mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int \mathbf{Aj}\, \mathrm{d}\tau$.

$$\mathbf{E}\,\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\,\mathbf{j} = 0\,.$$

Ak sa časová derivácia vzťahuje iba na vektorový potenciál, t. j. pri vhodnom relatívnom pohybe magnetu a vodiča bude posledná rovnica splnená nezávisle od hodnôt zložiek hustoty prúdu, ak

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\,. \tag{6}$$

Pravda, treba zdôrazniť, že toto odvodenie platí len v prípade poľa permanentného magnetu a vychádza ešte z pôsobenia na diaľku.

Vzťah (6) a Faradayov indukčný zákon

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$$

sú ekvivalentné.

Vektorovým pôsobením operátora nabla na rovnicu (6) a použitím podmienky div $\mathbf{B} = 0$ dostaneme druhú sériu Maxwellových rovníc.

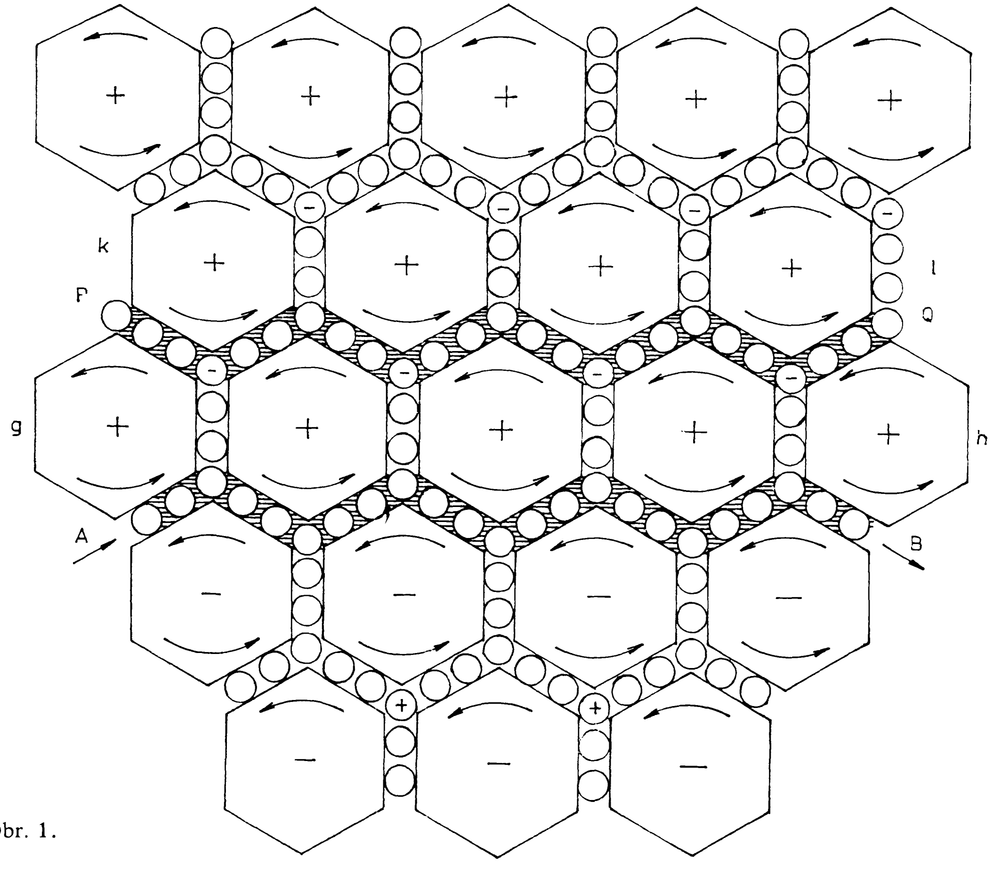
Maxwell sa v práci *O Faradayových siločiarach* elektrostatickým poľom takmer nezaoberal, a teda nenachádzame v nej problematiku súvisiacu s posuvným prúdom.

Posuvný prúd

Vo svojej druhej práci *O fyzikálnych siločiarach* použil J. C. Maxwell metódu analógií, aby ilustroval vlastnosti éteru, ktorý podľa vtedajších predstáv prenikal celým priestorom, a to cez vákuum aj cez látky. V prvej kapitole sa zaoberá magnetickými siločiarami, ktoré prebiehajú zo severných k južným magnetickým pólom. Správajú sa tak, ako keby boli napínané v pozdĺžnom smere. Sily, ktorými na seba pôsobia elektrické prúdy prostredníctvom magnetických polí, interpretoval Maxwell tendenciou siločiar laterálne sa rozťahovať. Túto ich vlastnosť simuloval systémom molekulárnych vírov éteru s osami rovnobežnými so siločiarami, ktoré v dôsledku odstredivej sily zväčšujú svoj polomer, pričom sa rýchlosť ich otáčania zmenšuje. Siločiary sa teda snažia rozpínať do strán a v pozdĺžnom smere skracovať. Sily, ktoré pôsobia v danom bode prostredia, závisia od smeru, majú teda charakter tenzorov.

Z celej tejto teórie zostal, pravda, iba matematický aparát (tenzor napätia, ktorý prešiel aj do relativistickej elektrodynamiky ako tenzor energie – hybnosti), lebo Maxwellov názorný mechanický model bol príliš vyumelkovaný (a po objavení elektrónov by nijako neobstál). Ako si predstaviť éter, pozostávajúci z rovnako orientovaných paralelných vírov, keď zmysel otáčania susedných ozubených kolies (napríklad v hodinách) musí byť opačný? Maxwell si pomohol takzvanými frikčnými molekulami, ktoré vložil medzi víry: „Ak si želáme, aby sa v mechanizme krútili dve kolesá v rovnakom zmysle, vložíme medzi ne koleso, ktoré zasahuje do oboch [1].“*)

Maxwell potom vypočítal počet a potrebnú rýchlosť otáčania frikčných molekúl danej veľkosti, určil energiu, ktorú odovzdá jedna molekula víru, atď. Napokon stotožnil frikčné molekuly s elektrinou, víry (na obr. 1 znázornené schematicky šesťuholníkmi) určujú smer a veľkosť siločiar. (Osi vírov majú smer siločiar a zmysel ich otáčania určuje orientáciu siločiar.) Posuvný pohyb frikčných molekúl predstavuje elektrický prúd. Tangenciálna sila, ktorou tlačia víry na frikčné molekuly, je intenzita elektrického poľa a zdanlivý tlak frikčných molekúl, ktorým na seba pôsobia vďaka pružnosti vírov, korešponduje s elektrickým napätím alebo s elektrickým potenciálom.



Obr. 1.

Situácia, v ktorej práve začal tiecť elektrický prúd, t.j. frikčné molekuly sa začnú valiť z bodu A do bodu B, je znázornená na obr. 1. Rad vírov gh nad AB sa začne otáčať proti zmyslu hodinových ručičiek, teda v kladnom zmysle. Po konečnom (i keď krátkom) čase roztočia víry v rade gh frikčné molekuly v rade PQ. Budú rotovať v zápornom zmysle

*) c.d. str. 131.

a valiť sa sprava doľava, čím vznikne indukovaný prúd opačného smeru. Tento indukovaný prúd v dôsledku odporu prostredia zanikne, frikčné molekuly v rade PQ však roztočia v kladnom zmysle víry v rade kl. Rýchlosť rotácie týchto vírov bude narastať, kým neprestane posuvný pohyb frikčných molekúl z Q do P (ostane iba ich rotácia), t.j. kým indukovaný prúd neprestane tiecť. Znázornenie indukovaného prúdu opačného smeru po vypnutí prúdu v AB prenecháme čitateľovi.*)

Predpoklad o nehmotných frikčných molekulách, krútiacich a valiacich sa bez trenia, je odôvodnený iba želaním „aby sa kolieska – víry krútili v jednom zmysle“. Maxwell o tom píše: „Predstava častíc, ktorých pohyb je určený podmienkou, že sa valia po víroch, ktoré z oboch strán k nim priliehajú, môže sa zdať do istej miery neuspokojivá. Nechcem ju považovať za správny názor o tom, čo existuje v prírode alebo za hypotézu o povahe elektriny v doterajšom zmysle toho slova“ [1].**)

Napokon sa ukázalo, že táto mechanická analógia nezjednodušuje opis elektromagnetického poľa, ale skôr ho komplikuje a Maxwell v ďalších prácach od nej upustil. Historický význam práce *O fyzikálnych siločiarach* spočíva v inom:

Maxwell tu prvý raz zaviedol posuvný prúd, formuluje v podstate prvú sériu svojich rovníc a predpovedá existenciu elektromagnetického žiarenia.

V tretej časti práce *O fyzikálnych siločiarach* porovnáva vplyv elektromotorického napätia na vodiče a izolátory. Elektromotorické napätie spôsobuje polarizáciu dielektrika, t.j. v každej molekule sa elektrický náboj posunie tak, že jeden jej koniec bude kladne a druhý záporne nabitý. Toto celkové posunutie nie je trvalý elektrický prúd, pretože zostane po nadobudnutí určitej hodnoty konštantné, ale je to začínajúci prúd a každá zmena posunutia predstavuje prúd.

Veľkosť posunutia závisí len od vlastností dielektrika a od elektromotorického napätia.

Ak R je prostredím vyvolaná „elektromotorická sila“ – Maxwell tu má na mysli veličinu úmernú intenzite elektrického poľa – v smere osi z (ktorá sa usiluje previesť teleso do počiatočného stavu) a h je z-ová zložka posunutia (t.j. náboj transportovaný cez jednotkovú plochu), potom podľa Maxwella

$$R = -4\pi E^2 h\,, \tag{7}$$

kde E je konštanta charakterizujúca dielektrikum. Zmenou posunutia vzniká prúd, takže z-ová zložka prúdovej hustoty $\boldsymbol{j} = (p, q, r)$ bude

$$r = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\,. \tag{8}$$

Vzťahy (7) a (8) nezávisia od teórie charakterizujúcej vnútorný mechanizmus dielektrika – zdôrazňuje Maxwell. Predsa však uvažuje analógiu s deformáciou pružného

*) Maxwell zostrojil aj dômyselné mechanické zariadenia, ktorými demonštroval indukované prúdy v sekundárnom vodiči po zapnutí alebo vypnutí prúdu v primárnom vodiči.

**) c.d. str. 156.

telesa. Frikčné molekuly pod vplyvom „elektromotorickej sily“ pôsobia tlakom na bunky pružného prostredia a deformujú ich. Po vypnutí „elektromotorickej sily“ každá bunka pôsobí v dôsledku svojej pružnosti opačne orientovanou silou, takže frikčné molekuly zaujmú svoju pôvodnú polohu. Maxwell potom aplikuje tieto úvahy pri odvodení vzťahu (7) z tenzoru pružnosti pre izotropnú guľu daného polomeru – teda za predpokladu, že bunky prostredia sprostredkujúce šírenie magnetizmu majú sférický tvar a že „elektromotorická sila“ pôsobí v smere osi z.

Deriváciou vzťahu (7) podľa času dostane z-ovú zložku hustoty prúdu (8), ktorú pripočíta k pravej strane (1)*), takže (teraz už v pravotočivej sústave)

$$r = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\beta_1}{dx} - \frac{d\alpha_1}{dy} - \frac{1}{E^2}\frac{dR}{dt}\right) \tag{9}$$

a cyklickou zámenou určí obdobné výrazy pre zložky p, q, čo by v súčasnom označení v sústave SI dalo

$$\boldsymbol{j} = \operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\,.$$

Systém Maxwellových rovníc bol teda v roku 1861 už kompletný.

Ostáva ešte ukázať, že E je rýchlosť šírenia sa vĺn v éteri. Maxwell predovšetkým dokázal, že E je pomer veľkosti náboja v elektrostatických a elektromagnetických jednotkách, ktorý zmerali Rudolf Hermann Kohlrausch a Wilhelm Eduard Weber.

Uvažujme (podľa Ludwiga Boltzmanna) plochý kondenzátor s konštantnou hustotou náboja na povrchu dielektrika h. Potom na jednotkovú plochu povrchu pôsobí sila

$$-Rh = 4\pi E^2 h^2\,.$$

Ak by sme namerali v elektrostatických jednotkách náboj h', dostali by sme silu $4\pi h'^2$, takže skutočne $E = h'/h$.

V teórii pružnosti rýchlosť V šírenia sa transverzálnych kmitov v pružnom prostredí

$$V = \sqrt{\frac{m}{\varrho}}\,,$$

kde koeficient pružnosti je m a ϱ je hustota.

V Maxwellovom modeli permeabilita μ je veličina priamo úmerná hustote prostredia $\mu = \pi\varrho$, takže $\pi m = V^2\mu$. Z druhej strany určil $E^2 = \pi m$, čím dostal

$$E = V\sqrt{\mu}\,.$$

Vo vzduchu alebo vo vákuu položil $\mu = 1$, takže podľa Webera a Kohlrauscha $E =$

*) Treba však poznamenať, že vzťah (1) Maxwell odvodil z teórie vírov.

$= V = 3{,}1074 \,.\, 10^8\ ms^{-1}$. A. H. L. Fizeau nameral rýchlosť svetla vo vzduchu $V = 3{,}14858 \,.\, 10^8\ ms^{-1}$. Vzhľadom na to, pokračuje Maxwell, „sotva môžeme odmietnuť myšlienku, že svetlo pozostáva z priečnych kmitov toho istého prostredia, ktoré zapríčiňuje aj elektrické a magnetické javy.“*)

Na tomto stupni svojich výskumov Maxwell v duchu starej undulačnej teórie predpokladal, že svetlo aj elektromagnetické vlnenie sa šíria ako obyčajné priečne vlny v neohraničenom tuhom telese, pričom jeho systém buniek má práve také vlastnosti ako takéto elastické kontinuum.

Rovnice elektromagnetického poľa

V práci *Dynamická teória elektromagnetického poľa* Maxwell po prvý raz použil termín elektromagnetické pole, charakterizuje osem poľných veličín (šesť vektorových a dve skalárne) a nachádza potrebný počet rovníc. Tým fakticky dovŕšil svoje výskumy o elektrine a magnetizme. Svoje názorné predstavy a analógie obmedzil teraz už na minimum. Éteru pripisuje iba určitú hustotu a prostrediu schopnosť hromadiť energiu. Elektrický prúd je niečo, čo sa pohybuje, pričom nepoznáme ani len približne rýchlosť pohybujúcej sa elektriny ani jej povahu.

„V predošlej práci (*O fyzikálnych siločiarach* – Phil. mag. 1861–62)“ píše Maxwell**), „pokúsil som sa uviesť osobitný druh pohybu a zvláštnu formu deformácie, aby som pomocou nich opísal javy. V predloženej práci sa vyhnem každej hypotéze tohto druhu. Ak použijem pojmy ako elektrický impulz (vektorový potenciál, pozn. R.Z.) a elektrická pružnosť v súvislosti so známymi javmi indukcie prúdov a polarizácie dielektrík, chcem tým iba upozorniť čitateľa na príslušné mechanické javy, aby som mu uľahčil pochopiť elektrické procesy. Všetky tieto pojmy slúžia znázorneniu, nie hlbšiemu vysvetleniu. Len ak hovorím o energii poľa, želal by som si doslovné chápanie tohto pojmu ... [1]“.

Závery majú byť nezávislé od hypotéz opisujúcich vlastnosti prostredia, vyplývajú z experimentálnych faktov, ktoré možno zadeliť do troch skupín:

1. Indukcia elektrických prúdov v dôsledku zmeny počtu siločiar obopnutých prúdom.

2. Rozdelenie magnetickej indukcie v poli vyplývajúce z variácií magnetického potenciálu.

3. Indukcia (alebo influencia) statických nábojov cez dielektriká.

Všade, kde Maxwell hovorí o elektromotorickej sile, treba podľa kontextu rozlíšiť, či má na mysli zložky vektora intenzity elektrického poľa alebo elektromotorické napätie, ktoré uvažoval nielen cez uzavretý vodič, ale cez ľubovoľnú uzavretú krivku, obopínajúcu danú plochu.

Jadrom práce je tretia časť, nadpísaná „Všeobecné rovnice elektromagnetického poľa“. V karteziánskych súradniciach tu charakterizuje šesť vektorových a dve skalárne

---

*) c.d. str. 175.

**) c.d. str. 300.

veličiny, ktoré napíšeme pomocou symbolov v súčasnosti bežne používaných, pričom v zátvorke uvedieme pôvodné označenie. Sú to:

1. Vektorový potenciál (elektromagnetický impulz) $\boldsymbol{A} = (F, G, H)$.

2. Magnetická indukcia (magnetická sila poľa) $\boldsymbol{B} = (\alpha, \beta, \gamma)$. Je to sila, pôsobiaca na jednotkový magnetický pól.

3. Intenzita elektrického poľa (elektromotorická sila) $\boldsymbol{E} = (P, Q, R)$.

4. Hustota vodivého prúdu (vodivý prúd) $\boldsymbol{j} = (p, q, r)$.

5. Vektor elektrickej indukcie (elektrické posunutie) $\boldsymbol{D} = (f, g, h)$. Maxwell si predstavoval ako posunutie vlastne vektor polarizácie.

6. Hustota celkového prúdu, t.j. podľa Maxwella celkový prúd (včítane časovej zmeny posunutia) $\boldsymbol{j}' = (p', q', r')$.

7. Hustota voľného náboja ϱ (voľný náboj e).

8. Skalárny potenciál φ (elektrický potenciál Ψ).

V zložkách k týmto dvadsiatim veličinám uviedol 20 rovníc poľa, ktoré prepíšeme tak, ako sa uvádzajú v sústave SI, pričom ponecháme originálne pomenovanie rovníc.

1. Tri rovnice pre „magnetické sily“:

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$$

Z tejto rovnice vyplýva v súčasnosti uvádzaná východzia rovnica

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0\,.$$

2. Tri rovnice pre elektrické prúdy

$$\dot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{j} = \operatorname{rot} \boldsymbol{H}\,.$$

3. Tri rovnice pre „elektromotorickú silu“

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{u} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} - \operatorname{grad} \varphi\,.$$

Maxwell tu získal vlastne transformačný vzťah pre elektromagnetické pole v sústave pohybujúcej sa rýchlosťou $\boldsymbol{u}$. Tento vzťah je správny len s presnosťou do korekcií vyššieho rádu vzhľadom na v/c, nakoľko pri jeho získaní implicitne použil predpoklad o invariantnosti sily pri transformácii medzi rôznymi inerciálnymi vzťažnými sústavami. Po vynásobení pravej strany nábojom dostaneme výraz pre Lorentzovu silu, ktorý vlastne pri odvodení rovnice Maxwell získal. Vzhľadom na prvú trojicu rovníc je tento Maxwellov triplet pri $\boldsymbol{u} = 0$ ekvivalentný s rovnicou

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{B}}\,.$$

4. Tri rovnice pre „elektrickú elasticitu“ (v homogénnom prostredí)

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{D}.$$

5. Tri rovnice pre elektrický odpor

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma}\mathbf{j}.$$

6. Tri rovnice pre celkové prúdy

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Táto rovnica sa teraz chápe ako definičná rovnica pre celkový prúd.

7. Rovnica pre voľný náboj

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho.$$

8. Rovnica kontinuity

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

Maxwell potom určil energiu elektromagnetického poľa a hustotu energie.

Pri určení energie magnetického poľa postupuje opačne ako v práci o Faradayových siločiarach. Vyjde zo vzťahu $\frac{1}{2}\sum \mathbf{A}\,\mathbf{j}$ a dospeje k tvaru $\frac{1}{2}\sum \mathbf{B}\mathbf{H}$. Potom určí z rovníc poľa známym spôsobom elektrickú energiu $\frac{1}{2}\sum \mathbf{E}\mathbf{D}$.

V šiestej časti tejto práce odvodil Maxwell priamo zo svojich rovníc výraz pre šírenie sa elektromagnetického vlnenia v homogénnom dielektriku (alebo vo vákuu). Postup, ktorý použil, nachádzame dodnes v učebniciach teórie elektromagnetického poľa.

Vyšiel zo svojej prvej rovnice

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \tag{10}$$

a zo svojej druhej rovnice, ktorú pre konštantné dielektrikum za neprítomnosti vodičov môžeme prepísať do tvaru

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \, . \, \varepsilon \, . \, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{11}$$

Tu vidno, že zavedenie člena nazvaného posuvný prúd bolo nevyhnutnou podmienkou pre predikciu elektromagnetického vlnenia, ktorého existenciu a vlastnosti zhodné s vlastnosťami viditeľného svetla potom H. Hertz experimentálne dokázal. Maxwell sám ešte nemal presvedčivý experimentálny dôkaz pre posuvný prúd vo vákuu. Veď éter bola len hypotetická substancia.

Ďalší postup odvodenia vlnovej rovnice dodnes používajú s malými obmenami štandardné učebnice. Dosadením (11) do (10) dostaneme

$$\text{rot rot } \boldsymbol{A} = \text{grad div } \boldsymbol{A} - \Delta \boldsymbol{A} = \mu\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \tag{12}$$

Pravú stranu môžeme vzhľadom na tretiu Maxwellovu rovnicu (pri $\boldsymbol{u} = 0$) prepísať do tvaru

$$-\mu\varepsilon\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} + \text{grad}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right).$$

Ak si volíme kalibráciu elektromagnetického potenciálu*)

$$\text{div } \boldsymbol{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

prejde napokon rovnica (12) do tvaru:

$$\Delta \boldsymbol{A} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2}. \tag{13}$$

Najjednoduchším riešením homogénnej vlnovej rovnice (13) je d'Alembertovo riešenie, predstavujúce postupnú rovinnú vlnu s fázovou rýchlosťou $v = (\varepsilon \,.\, \mu)^{-\frac{1}{2}}$, vo vákuu $c = (\varepsilon_0 \,.\, \mu_0)^{-\frac{1}{2}}$.

Maxwell pochopiteľne nepoužíval sústavu SI. V jeho zápise

$$V = \sqrt{\frac{k}{4\pi\mu}} \tag{14}$$

s hodnotou $\mu = 1$ vo vákuu. Ešte pred tým formuloval Coulombov zákon v elektrodynamických jednotkách v tvare

$$\frac{k}{4\pi}\frac{e_1 e_2}{r^2},$$

kde e_1, e_2 sú bodové náboje a r vzdialenosť medzi nimi. Ak napíšeme Coulombov zákon v elektrostatických jednotkách s nábojmi η_1, η_2 a položíme $\eta_1 = v \,.\, e_1$ a $\eta_2 = v \,.\, e_2$, dostaneme

*) Pozri napr.: Votruba, V., Muzikář, Č.: *Theorie elektromagnetického pole*, Praha, Nakladatelství ČSAV 1955, str. 189.

$$v^2 \frac{e_1 e_2}{r^2} = \frac{k}{4\pi} \frac{e_1 e_2}{r^2},$$

z čoho $k = 4\pi v^2$ a vo vákuu – ako sme už uviedli – hodnota v bola v dobrej zhode s nameranou rýchlosťou svetla.

Z rovnice (13) Maxwell odvodil, že vektor magnetickej indukcie **B** kmitá v rovine kolmej na vlnový vektor šíriacej sa vlny. Štandardným postupom sa dokazuje, že vektor **E** kmitá v tej istej rovine a je kolmý na vektor **B**.

Vo svojej *Dynamickej teórii elektromagnetického poľa* Maxwell dovŕšil výskum elektromagnetizmu, pričom prešiel cestu od názorných mechanických analógií k formulácii rovníc poľa. Vo svojej poslednej práci, v ktorej zhŕňa aj výsledky svojich veľkých predchodcov od Ampèra po Webera a samozrejme vyzdvihuje revolučný prístup M. Faradaya, neuviedol už podstatné doplnky k vlastnému výskumu. Táto časť *Pojednania o elektrine a magnetizme* je dôsledne zbavená všetkých názorných analógií a súčasníkom sa javila príliš kusá.

J. C. Maxwell vybudoval teóriu elektromagnetického poľa za necelých 10 rokov svojho krátkeho, ale mimoriadne plodného života. Za tých 10 rokov podstatne zmenil aj štýl práce a formu opisu, zrejme súc presvedčený, že kvintesenciou jeho diela je jeho 20 rovníc poľa. Na otázku, čo je vlastne Maxwellova teória, odpovedal veľmi výstižne Heinrich Hertz: „Maxwellova teória – to je sústava Maxwellových rovníc“.

J. C. Maxwell zaujal v histórii fyziky nemenej významné miesto ako slávny Isaac Newton. Bez nadsádzky platí aj preň to newtonovské „Postavil som sa na plecia obrov a dovidel som ďalej“. Ukázalo sa, že klasická fyzika, to nie sú iba Newtonove rovnice (a ich elegantný prepis v Lagrangeovom formalizme). Popri nich rovnako fundamentálnu rolu zohrávajú Maxwellove rovnice a princípy termodynamiky a štatistickej fyziky.*)

Na týchto troch oporách spočíva dodnes klasická fyzika a vari všetky tri rovnakým dielom slúžili za východisko modernej fyziky 20. storočia.

Literatúra

[1] Maxwell, J. C.: *Izbrannye sočinenia po teorii elektromagnitnogo poľa*. Moskva, Gosudarstvennoe izdateľstvo techniko-teoretičeskoj literatury, 1952.

[2] Tricker, R. A. R.: *Frühe Elektrodynamik* (*Texte*). Berlin, Akademie Verlag 1974.

[3] Tricker, R. A. R.: *Faraday und Maxwell* (*Texte*). Berlin, Akademie Verlag 1974.

[4] Helmholtz, H.: *Über die Erhaltung der Kraft*. Berlin, G. Reimer 1847.

[5] Brush, S. G.: *Kinetische Theorie — Die Natur der Gase und der Wärme* (*Einführung und Originaltexte*). Berlin, Akademie Verlag 1970.

[6] Polák, J.: Pokroky matematiky, fyziky a astronomie *24* (1979), 301.

[7] Zajac, R.: Pokroky matematiky, fyziky a astronomie *26* (1981), 81.

*) Pokiaľ ide o princípy termodynamiky a štatistickej fyziky a ich matematickú formuláciu, nie sú spojené s menom jednej osobnosti, ale viacerých jej tvorcov: R. Clausiusa, W. Thomsona, H. Helmholtza, L. Boltzmanna, J. W. Gibbsa a koniec koncov aj samého Maxwella.