

# Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

---

František Šik

Lineární programování a jeho aplikace v ekonomii

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 10 (1965), No. 5, 255--267

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/137973>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1965

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

# LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ A JEHO APLIKACE V EKONOMII

FRANTIŠEK ŠIK, Brno

Kdoví jaké důvody vedly k tomu, že se ta věc, o které psali v novinách, vůbec stala. To, co psali, byla stížnost ostatně nijak ojedinělá; pisatel se bouřil proto, že se jistá surovina dopravovala přes celou republiku do závodu, v jehož okolí ji byl dostatek. To se dá přece spočítat. .... a jsme v matematice a s matematikou v ekonomii.

Pole ekonomického rozhodování, do kterého matematika v několika posledních desítkách let pronikla, se stává díky vytrvalým diskusím v denním tisku předmětem obecného zájmu. Ačkoliv matematika nebývá vlastním obsahem těchto diskusí,\* i obyčejný smrtelník s uspokojením připouští, že za vědeckým řízením národního hospodářství, v některém tmavším koutě toho pojmu, vystrkuje růžky matematika. Se zřetelem na několikatisíciletou tradici je matematika v ekonomii začátečníkem, ale jak si blíže ukážeme, ne tak zcela bezradným a bezvýznamným. Podívejme se trochu na situaci, před kterou je postaven kdokoli, kdo chce vnést matematický řád do složitých dějů v ekonomii. Připomeňme hned, že nejde jen o pasivní formulaci problémů a o vystižení vzájemných vztahů faktorů, které průběh děje ovlivňují, ale o nalezení optimálního řešení problému za daných podmínek, tedy o aktivní zásah do dění. To druhé ovšem předpokládá umět se také vypořádat s tím prvním.

Oč zde konkrétně jde, to se dá vyložit na spoustě příkladů, z nichž však žádný nepostihne celou šířku problematiky; ale to je již úděl příkladů. Uveďme jeden za všechny.

Výrobní program podniku, to je záležitost mnoha faktorů, které jeho volbu omezují. Ta omezení však nikdy nejdou tak daleko, aby neponechala dost místa na množství variant, ze kterých je možno (a nutno) vybírat. Jde pak o to, vybrat mezi existujícími možnostmi tu, která zaručuje plnění daného cíle: dosažení maximálního zisku nebo minimálních výrobních nákladů, největší úsporu surovin a energie apod. Toto kritérium však problém neřeší, teprve jej staví. Optimální řešení je pak výsledkem složitých myšlenkových konstrukcí, které jsou svou povahou matematice vlastní a které současná matematika také nejednou úspěšně zvládla.

Jak již o tom byla vpředu zmínka, pro problémy spojené s hospodářským rozhodováním je charakteristická především ta okolnost, že je nutno vybírat z nepřehledného množství variant, a při jistých zjednodušeních, která si vynucuje matematické zpracování problému, jich bývá prokazatelně nekonečně mnoho, takže není prakticky (ani teoreticky) možné vyhodnotit každou z nich zvlášť a vybrat z nich optimální.

---

\*) zdá se vůbec, že matematika je pro radost jen profesionálům a laikům jenom pro strach; přesto

Je-li ekonomický orgán postaven před takovou úlohu, má k dispozici pouze dvě možnosti: spolehnout se na zkušenost nebo užít exaktních matematických metod. Je evidentní, že čím jde o otázku složitější (což zpravidla znamená významnější), tím nespolehlivější je první metoda. V dnešním hospodářství je problémů závislých na malém počtu parametrů čím dál méně, takže obávané matematice je nutno v ekonomii vyhradit místo všude tam, kde ji před nějakými padesáti lety nebrali na vědomí nebo kde ji pouze trpěli.

Matematická disciplína, která řeší problémy, reprezentované vpředu namátkou vybraným a zcela neúplně formulovaným příkladem, se uvádí pod různými názvy, z nichž název *matematické programování* snad nejvýstižněji charakterizuje podstatu věci.

Abstraktní model zmíněného programování se dá formulovat následujícím způsobem: Najít extrém (tj. maximální nebo minimální hodnotu) funkce

$$z(x_1, \dots, x_n) \text{ } n \text{ proměnných } x_1, \dots, x_n,$$

kteřá je definována na množině všech řešení systému nerovností

$$(1a) \quad f_i(x_1, \dots, x_n) \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$(1b) \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Každá z proměnných  $x_1, \dots, x_n$  vyjadřuje objem jisté činnosti (např. počet kusů výrobku, který se má vyrobit). Funkce  $z$  vyjadřuje závislost výsledku na této činnosti (např. závislost zisku na počtu zhotovených výrobků, velikost výrobních nákladů atd.). Nerovnosti (1a) představují omezení, kterým je činnost podrobena (množství surovin, kapacita výrobního zařízení apod.). Nerovnosti (1b) vyjadřují přirozený požadavek, že se — řekněme — vyrobí nezáporné množství výrobků. V nejjednodušším případě jsou funkce  $z$  a  $f_i$  lineárními funkcemi proměnných. V tomto případě mluvíme o *lineárním programování*.

Programování, jako mnoho jiných disciplín, a nejen matematických, vzniklo téměř současně a nezávisle na sobě na různých místech. První známý pokus učinil r. 1937 L. V. KANTOROVIČ článkem v časopise a dva roky nato v knize o organizaci a plánování výroby. Zvlášť výrazně se posunul vývoj těchto matematických metod za druhé světové války v USA; metody byly rozvíjeny především pro potřeby války, ale postupně se našlo pro tyto značně obecné metody užití v civilní ekonomice. Rozvoj teorie programování, zejména lineárního, je spjat se jmény — kromě již zmíněného Kantoroviče — BELLMAN, HITCHCOCK, CHARNES, KOOPMANS, LEONTIEF, von NEUMANN atd. Zvlášť se zmíníme o G. B. DANTZIGOVÍ, jehož simplexová metoda je nejužívanější metodou v lineárním programování (pochází z r. 1947).

Považuji za vhodné podrobněji se zabývat metodou a aplikacemi nejjednoduššího z programování, programování lineárního. Víc se prostě do krátkého článku nevejde. Zato každému čtenáři, který se dosud zcela nerozešel se středoškolskou matemati-

kou, bude možno vyložit, oč v metodě jde a na pochopení aplikací stačí zdravý úsudek.

Abychom tohoto cíle dosáhli, tj. abychom hned z kraje názorně vyložili obsah metody lineárního programování, sáhněme ke konkrétnímu příkladu. V tomto jednoduchém případě nejméně náročná je metoda grafická. Ta nás sice nutí omezit se na příklad nereálně zjednodušený, ale jeho předností je názornost a ještě ta okolnost, že se dá problém řešit až do konce elementárními prostředky.

**Příklad.** Závod vyrábí dva výrobky *A* a *B*. Součástky, z nichž se montují oba výrobky, procházejí různým technologickým zpracováním (ve slévárně, v kovárně, na obráběcích strojích apod.). V našem případě procházejí paterým zpracováním. Budeme říkat, že procházejí pěti úseky.

V prvním výrobním úseku je možno zpracovat (v dané časové jednotce) tolik polotovarů, kolik je jich potřeba na kompletaci 10 kusů výrobku *A* nebo na kompletaci 10 kusů výrobku *B* (popř. na ekvivalentní kombinaci obou výrobků). Podobně pro ostatní úseky; číselné údaje jsou v tabulce. Závod nemá jiná omezení (např. v surovinách, v pracovních silách atd.). (Čtvrtým úsekem může být např. montážní linka výrobku *A*. Podobně pátý pro *B*).

výrobní úsek		I	II	III	IV	V
výrobek	A	10	14	12	8	0
	B	10	7	9	0	6

Zisk za jeden kus výrobku *A*, resp. *B* je 20, resp. 30 korun. Úkol je tento: stanovit takový program výroby, aby se dosáhlo maximálního zisku.

Nejprve matematická formulace problému. Označíme  $x_1$  resp.  $x_2$  počet kusů výrobku *A*, resp. *B* vyrobených v dané časové jednotce. Omezení daná kapacitami úseků jsou vyjádřena nerovnostmi

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10} \leq 1, & \text{(I)} & x_1 \leq 8, & \text{(IV)} \\ \frac{x_1}{14} + \frac{x_2}{7} \leq 1, & \text{(II)} & x_2 \leq 6, & \text{(V)} \\ \frac{x_1}{12} + \frac{x_2}{9} \leq 1, & \text{(III)} & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. & \end{cases}$$

Vskutku, v prvním úseku se spotřebuje na výrobu součástí nutných pro jeden výrobek *A*  $1/10$  časové jednotky; tedy na výrobu součástí pro  $x_1$  kusů výrobku *A* se spotřebuje část časové jednotky vyjádřená číslem  $x_1/10$ . Podobně pro výrobek *B*. Součet  $x_1/10 + x_2/10$  nesmí přesáhnout časovou jednotku; odtud nerovnost (I). Další se odvodí podobně. Konečně zisk závodu za prodej výrobků vyrobených v dané časové jednotce

je dán funkci

$$(3) \quad z = 20x_1 + 30x_2 .$$

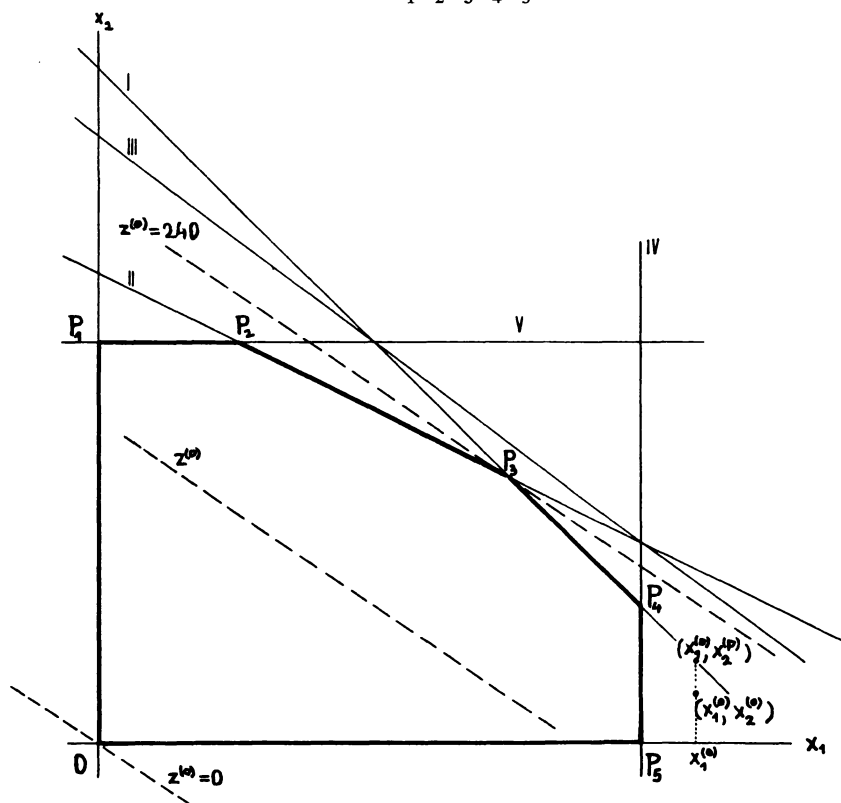
Je patrné, že jde o problém lineárního programování. Každý uspořádaný pár čísel  $x_1, x_2$ , která splňují nerovnosti (2), představuje jednu přípustnou variantu výroby. A obráceně, každý pár, který nesplňuje aspoň jednu z těchto nerovností, znamená výrobní program závodem nesplnitelný. Řešení systému (2) nám tedy dávají všechny možné přípustné výrobní programy a náš cíl je vybrat mezi nimi takový, při kterém je zisk maximální.

Hledejme tedy maximum funkce  $z$  definované na množině všech řešení systému (2).

Najít maximální hodnotu funkce  $z$  nám umožní podrobnější studium definičního oboru této funkce a jejího chování na něm.

Množina všech řešení systému (2) je znázorněna graficky jako společná část polorovin, které jsou definovány jednotlivými nerovnostmi systému (2) (viz graf). Jak je patrné, je to vnitřek a obvod polygonu

$$P \equiv OP_1P_2P_3P_4P_5 .$$



Abychom si dokázali, že množina všech dvojic  $(x_1, x_2)$ , které splňují nerovnost (I), je v rovině (v obrázku) představována všemi body dolní poloroviny, omezené

přímku o rovnici  $x_1/10 + x_2/10 = 1$ , uvažujeme takto: Zvolme si pod touto přímkou (nebo na ní) bod o souřadnicích  $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ ; směr „nahoru“ je dán kladným smyslem osy  $x_2$ . Bod na této přímce s první souřadnicí  $x_1^{(0)}$  má druhou souřadnici  $x_2^{(p)}$  větší (nebo rovnou)  $x_2^{(0)}$ ; tedy dvojice  $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$  vyhovuje nerovnosti (I). Dokázali jsme si, že souřadnice bodů, které leží pod naší přímkou, splňují nerovnost (I). Jestliže obráceně dvojice  $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$  vyhovuje nerovnosti (I) a jestliže dvojice  $(x_1^{(0)}, x_2^{(p)})$  splňuje vztah  $x_1^{(0)}/10 + x_2^{(p)}/10 = 1$  (tj. leží-li bod o souřadnicích  $(x_1^{(0)}, x_2^{(p)})$  na naší přímce), je zřejmě  $x_2^{(0)} \leq x_2^{(p)}$ , takže bod o souřadnicích  $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$  leží pod naší přímkou (nebo na ní). Dokázali jsme si tedy, že body, jejichž souřadnice  $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$  splňují nerovnost (I), leží pod naší přímkou nebo na ní. Oba předešlé výsledky dohromady dokazují tvrzení uvedené na začátku úvahy.

Dosadíme-li za  $z$  nějaké číslo  $z^{(0)}$ , rovnice  $z^{(0)} = 20x_1 + 30x_2$  značí rovnici přímky. Považujme  $z$  za proměnný parametr.

Pak rovnice

$$(4) \quad z = 20x_1 + 30x_2$$

představuje osnovu rovnoběžných přímek, které vyplňují rovinu, tj. každým bodem roviny prochází jedna (a jen jedna) přímka této osnovy. Vyberme libovolně jednu z přímek osnovy, např. pro hodnotu  $z^{(0)}$  parametru  $z$ . V každém bodě této přímky nabývá funkce  $z$  téže hodnoty  $z^{(0)}$ . Např. počátkem prochází přímka  $0 = 20x_1 + 30x_2$  této osnovy a funkce  $z$  nabývá v každém bodě této přímky hodnoty 0.

Jestliže se přímka pohybuje tak, že roste její úsek na ose  $x_2$ , roste zřejmě hodnota parametru  $z$  a roste tedy hodnota funkce  $z$  v bodech, které leží na příslušných přímkách. Dříve než přímka opustí obor  $P$ , dosáhne funkce  $z$  své maximální hodnoty, a to zřejmě v bodě  $P_3$  o souřadnicích (6; 4); příslušná hodnota je 240.

Přímky, které leží vně pásu určeného přímkami  $0 = 20x_1 + 30x_2$  a  $240 = 20x_1 + 30x_2$ , nás nezajímají, protože žádná z nich neobsahuje bod z oboru  $P$ , který znázorňuje obor přípustných výrobních programů.

Takto jsme našli optimální výrobní program, tj. řešení naší úlohy (náhodou je celočíselné). Takové řešení je v našem případě přesně jedno. Kdyby byly číselné údaje v tabulce uvedeny tak, aby přímka jdoucí body  $P_2$  a  $P_3$ , tj. přímka znázorňující omezení dané kapacitou II. úseku, měla směr shodný se směrem přímek osnovy (4), optimálním řešením by byl každý bod  $(x_1, x_2)$  na úsečce  $\overline{P_2P_3}$ . Poznamenejme ještě, že kapacita III. úseku nijak neomezuje naši úlohu, protože polorovina určená příslušnou nerovností obsahuje společnou část všech ostatních polorovin.

Citovaný příklad zachovává všechny podstatné rysy obecného problému lineárního programování: definiční obor funkce  $z$  je konvexní polygon (jeho vnitřek a obvod) a funkce  $z$  dosahuje svého maxima (i minima) v jednom vrcholu tohoto polygonu.

V obecném případě, když jde o více než dvě nezávisle proměnné funkce  $z$ , konvexní polygon se nahradí vícerozměrným konvexním polyedrem a funkce  $z$  dosahuje svého extrému v některém z vrcholů tohoto polyedru.

Uvidíme, že je možné a užitečné přeměnit nerovnosti (1a) na rovnice.

Standardní problém lineárního programování má tedy následující formu:  
 Uvažujeme systém  $m$  (lineárně nezávislých) rovnic v  $n$  proměnných:

$$(5) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

s podmínkou nezápornosti

$$(6) \quad x_j \geq 0 \text{ pro } j = 1, 2, \dots, n$$

a funkci  $z$ , zvanou *objektivní funkci*,

$$(7) \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

definovanou na množině všech řešení rovnic (5) a nerovností (6). Problém *záleží* v zjištění minima funkce (7), tj. mezi řešeními systému (5) a (6) najít takové, ve kterém funkce (7) nabývá minimální hodnoty. Princip úkolu se nezmění, žádáme-li maximum funkce  $z$ . Stačí totiž hledat minimum funkce  $-z$ .

Jak jsme se zmínili vpředu, každá nerovnost typu

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \text{ nebo } \geq b_i$$

se dá přeměnit na rovnici, a to tím, že připojíme další proměnnou  $s_i$ ; nerovnost pak nahradíme rovnicí

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \pm s_i = b_i$$

a nerovností

$$s_i \geq 0.$$

Standardní formulace problému lineárního programování tedy nepředstavuje nějaké omezení obecné formulace.

Jakmile máme formulován problém, můžeme přistoupit k vyšetření definičního oboru funkce  $z$ . Nečiní zvláštní obtíže dokázat, že definiční obor je konvexní polyedr.

Podstatně větší úsilí je třeba věnovat stanovení bodů extrémních hodnot funkce  $z$ . Jak bylo řečeno, jsou jimi některé vrcholy definičního polyedru. Podstatné je, že polyedr má pouze konečně mnoho vrcholů. Stačilo by tedy vyšetřit hodnoty funkce  $z$  ve všech vrcholech definičního polyedru. To má dva háčky: těch vrcholů je relativně mnoho (v závislosti na počtu proměnných  $x_1, \dots, x_n$  a na počtu rovnic (5)) a stanovení vrcholů je zdoluhavá záležitost, protože vrcholy polyedru jsou právě všechna řešení systému (5), (6), která mají nuly v  $n-m$  složkách takových, že sloupce koeficientů rovnic (5), patřící ke zbývajícím složkám, jsou lineárně nezávislé.

Většina existujících metod záleží v tom, že se stanovují hodnoty funkce  $z$  pro jistou posloupnost sousedních vrcholů polyedru. Tato posloupnost se dá vybrat tak, že hodnoty funkce  $z$  klesají k minimu a posloupnost obsáhne obecně jen malou část množiny všech vrcholů. Nejrozšířenější metoda, simplexová, je iterativní, tedy velmi

vhodná pro strojové zpracování. Výsledek každého kroku slouží za vstupní data kroku následujícího. A strojový výpočet téměř v každé praktické úloze je nezbytný, neboť počet proměnných a rovnic se v praxi pohybuje v desítkách a stovkách.

Tuto informativní expozici ukončíme několika typickými aplikacemi.

Jedna z nejstarších a nejběžnějších úloh je *transportní problém*. Problém byl položen r. 1941 НИТЧОКЕМ a podrobně studován КООПМАНСЕМ r. 1947.

Uvažujme  $m$  dodavatelů (mohou to být výrobní podniky, sklady apod.); všichni dodavatelé vyrábějí (mohou dodat) týž druh zboží,  $i$ -tý z nich v množství  $a_i$  (třeba tun) ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Zboží se transportuje k  $n$  spotřebitelům,  $j$ -tý z nich potřebuje  $b_j$  tun tohoto zboží ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). V nejjednodušším případě vede od každého výrobce dopravní cesta ke každému spotřebiteli, výroba právě pokrývá potřebu (tj.  $\sum a_i = \sum b_j$ ), dopravní cesty mají neomezenou kapacitu a dopravní tarif nezávisí na množství dopravovaného zboží. Řekněme, že doprava jedné tuny zboží od  $i$ -tého dodavatele  $j$ -tému spotřebiteli stojí  $c_{ij}$  korun. Úkol je dopravit zboží od dodavatelů ke spotřebitelům tak, aby se uspokojila poptávka (neboli aby se vyprázdnily sklady) a aby náklady na dopravu byly minimální.

Označíme-li  $x_{ij}$  (neznámé) množství zboží dopravené  $i$ -tým dodavatelem  $j$ -tému spotřebiteli, problém se formuluje takto: najít minimum dopravních nákladů, tj. najít minimum funkce

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

podrobené podmínkám:

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} & = a_1 \\ & x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} & = a_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ & x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} & = a_m \\ \left\{ \begin{array}{ll} x_{11} & + x_{21} & + \dots & + x_{m1} & = b_1 \\ & x_{12} & & + x_{22} & + \dots & + x_{m2} & = b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & x_{1n} & & + x_{2n} & + \dots & + x_{mn} & = b_n \end{array} \right. \\ & x_{ij} \geq 0 \text{ pro všechna } i, j. \end{array} \right.$$

První rovnice říká, že úhrn zboží dopraveného od jednotlivých výrobců prvnímu spotřebiteli je roven jeho požadavku  $a_1$ ; první rovnice druhé skupiny rovnic říká, že úhrn zboží dopraveného od prvního výrobce všem spotřebitelům je roven jeho kapacitě  $b_1$ ; podobně další rovnice.

Na první pohled je patrné, že jde o standardní problém lineárního programování o  $mn$  proměnných. Koeficienty na levých stranách omezujících rovnic jsou nuly a jedničky speciálně rozložené.

Problém nejúspornější dopravy uhlí byl v naší republice svého času řešen mezi doly (dodavatelé) a elektrárnami (spotřebitelé).



Velký okruh problémů, které nemají nic společného s problémem dopravním, mají s ním shodnou matematickou formulaci, např. přidělovací problém, o němž bude zmínka na konci.

*Využití surovin.* Závod užívá k výrobě součástí výrobku (např. stroje)  $n$  různých technologických postupů (technologii). Každý výrobek se skládá z  $s$  různých součástí, přitom obsahuje  $r_j$  kusů součásti  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, s$ ). K výrobě se potřebuje  $m$  různých surovin (v širším smyslu, tj. suroviny, elektrická energie atd.), kterými podnik disponuje v omezeném množství  $a_1, \dots, a_m$  jednotek. Přitom v  $i$ -té technologii se potřebuje za jednotku času (cyklus)  $a_{ik}$  suroviny  $k$ ; za tu dobu bude v  $i$ -té technologii zpracováno  $b_{ij}$  součástí  $j$ . Označme  $x_i$  počet cyklů odpracovaných v technologii  $i$ . Údaje můžeme sestavit do této přehledné tabulky:

technologie	$i$ ( $= 1, \dots, n$ )	
spotřeba suroviny $k$ ( $= 1, 2, \dots, m$ ) v technologii $i$ (za jeden cyklus)	$a_{ik}$	zásoba suroviny $k$ $a_k$
počet součástí $j$ ( $= 1, 2, \dots, s$ ) zpracovaných technologií $i$ (za jeden cyklus)	$b_{ij}$	počet kusů součástí $j$ ve výrobku $r_j$
počet cyklů odpracovaných v technologii $i$	$x_i$	

Spotřeba suroviny  $k$  bude (za 1 cyklus)

$$a_{1k}x_1 + a_{2k}x_2 + \dots + a_{nk}x_n \quad (k = 1, 2, \dots, m);$$

$j$ -tých součástí bude vyrobeno (za 1 cyklus)

$$b_{1j}x_1 + b_{2j}x_2 + \dots + b_{nj}x_n \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

Tento počet slouží k výrobě

$$\frac{b_{1j}x_1 + b_{2j}x_2 + \dots + b_{nj}x_n}{r_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s)$$

kusů výrobku.

Úloha záleží ve volbě takového plánu, podle kterého se při daných zásobách  $a_1, \dots, a_m$  vyrobí největší počet výrobků. Jde tedy o to, mezi všemi řešeními soustavy nerovností

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{n1}x_n &\leq a_1 \\ \dots &\dots \\ a_{1m}x_1 + \dots + a_{nm}x_n &\leq a_m \end{aligned}$$

najít takové, aby veličina

$$\min_{1 \leq j \leq s} \frac{b_{1j}x_1 + \dots + b_{nj}x_n}{r_j}$$

nabývala největší hodnoty, tj. hledá se

$$\max_{(x_1, \dots, x_n)} \min_{1 \leq j \leq s} \frac{b_{1j}x_1 + \dots + b_{nj}x_n}{r_j}$$

Při  $s = 1$  jde o problém lineárního programování. V případě  $s > 1$  jej převedeme na problém lineárního programování zavedením pomocné proměnné  $\xi$ : Najít maximum funkce

$$z = \xi$$

za podmínek

$$\begin{aligned} \frac{b_{1j}x_1 + \dots + b_{nj}x_n}{r_j} &\geq \xi & (j = 1, 2, \dots, s), \\ x_i &\geq 0 & (i = 1, 2, \dots, n), \\ \xi &\geq 0. \end{aligned}$$

Dá se dokázat ekvivalence původního a upraveného problému.

*Rozdělení letadel na linkách.* Letecká dopravní společnost obstarává dopravu na  $n$  linkách. Má k dispozici  $m$  typů letadel, letadel  $i$ -tého typu  $M_i$  kusů ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Na každé lince létají letadla různých typů. Každé letadlo typu  $i$ , zařazené na lince  $j$ , vykoná měsíčně předepsaný počet letů, takže známe měsíční náklady spojené s jeho provozem; označme je  $b_{ij}$  (Kčs). Kapacita letadla daného typu (tj. maximální počet cestujících v letadle) závisí na lince (na její délce apod.) a je známa. Je tedy i znám počet  $a_{ij}$  osob, který může být maximálně dopraven během jednoho měsíce jedním letadlem typu  $i$  na lince  $j$ . Konečně statisticky je zachycen počet  $a_j$  osob cestujících měsíčně na lince  $j$ . Viz tabulku.

typ letadla	počet letadel	měsíční kapacita letadla typu $i$ na lince $j$ $j (= 1, \dots, n)$	náklady na letadlo typu $i$ na lince $j$ (za měsíc) $j (= 1, \dots, n)$	počet letadel typu $i$ na lince $j$ $j (= 1, \dots, n)$
$i (= 1, \dots, m)$	$M_i$	$a_{ij}$	$b_{ij}$	$x_{ij}$
počet osob dopravených měsíčně na lince $j$		$a_j$		

Náš úkol je rozdělit strojový park společnosti na linky tak, aby bylo využito všech letadel, kterými společnost disponuje, a aby provozní náklady (za měsíc) byly nejmenší.

Označíme-li  $x_{ij}$  počet letadel typu  $i$  zařazených na lince  $j$ , můžeme formulovat problém takto: najít minimum dopravních nákladů, tj. minimum funkce

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} x_{ij}$$

za podmínek

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij} \geq a_j \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = M_i \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n).$$

*Úloha o využití osevň plochy.* Úkolem zemědělského závodu je rozvrhnout výsev jistého počtu plodin na lánech, jejichž půdní kvalita je známa, a to tak, aby produkce každé plodiny dosáhla aspoň předepsaného minima a aby zisk z pěstování byl největší. Podmínky úlohy jsou shrnuty do tabulky:

plodina	$i (= 1, \dots, m)$	výměra $j$ -tého lánu (ha)
výnos $i$ -té plodiny na $j$ -tém lánu (q/ha) $j (= 1, \dots, n)$	$a_{ij}$	$a_j$
cena za 1 q $i$ -té plodiny (Kčs)	$p_i$	
požadovaná minimální produkce $i$ -té plodiny (q)	$b_i$	
plocha výsevu $i$ -té plodiny na $j$ -tém lánu (ha) $j (= 1, \dots, n)$	$x_{ij}$	

Formulace problému: najít maximální zisk, tj. najít maximum funkce

$$z = \sum_{i=1}^m p_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij}$$

za podmínek

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = a_j \quad (j = 1, \dots, n),$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \geq b_i \quad (i = 1, \dots, m),$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n).$$

A nakonec trochu humoru, totiž příklad, jenž při vši své neprůkaznosti, aspoň tím,

co je na něm prokazatelného, dává za pravdu jedné mravní normě. Že se jedná o mravnost, plyne z jeho názvu: *plánování manželského štěstí*. Oč jde v úloze: o  $n$  mužů a  $n$  žen, z kterých bude v budoucnosti  $n$  manželských párů. Máme se postarat o to, jak ta manželská spojení doporučit a zhostit se úkolu tak, aby úhrn (tj. součet) manželské pohody těchto párů byl největší. K tomu musíme mít oceněny vztahy mezi muži a ženami. Řekněme, že vztah  $i$ -tého muže k  $j$ -té ženě je oceněn číslem  $a_{ij}$ . Míra vztahu  $j$ -té ženy k  $i$ -tému muži, označená  $b_{ij}$ , nemusí být ovšem rovna  $a_{ij}$ . Číslo  $c_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + b_{ij})$  považujeme pak za ocenění vzájemného vztahu  $i$ -tého muže a  $j$ -té ženy.

Připusťme polygamii a polyandrii a předpokládejme, že  $i$ -tý muž bude žít s  $j$ -tou ženou jistou část jednotky času, řekněme  $x_{ij}$ . Pak úhrn manželského štěstí je ohodnocen sumou

$$z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} .$$

Definiční obor funkce  $z$  je množina všech řešení systému (evidentně platných rovnic a nerovností)

$$\begin{aligned} (8) \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ & \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \\ & x_{ij} \geq 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) . \end{aligned}$$

Maximum funkce  $z$  je pak hledaný úhrn. Zřejmě jde o dopravní problém speciální povahy, kterému se říká *přídělovací problém*.

Především změnil bychom podmínky úlohy. Především změníme poněkud matematickou formulaci problému. Předpokládejme, že funkce  $z$  je definována pouze na celočíselných řešeních systému (8). Tato řešení jsou však pouze skupiny čísel  $x_{ij}$  s následující vlastností: sestavíme-li je do čtverce

$$\begin{array}{c} x_{11}x_{12} \dots x_{1n} , \\ x_{21}x_{22} \dots x_{2n} , \\ \dots \dots \dots \dots \\ x_{n1}x_{n2} \dots x_{nn} , \end{array}$$

obsahuje každý řádek a každý sloupec přesně jednu jedničku a všechny ostatní složky jsou nuly. To plyne snadno z (8). Interpretujeme-li tento požadavek v dané konkrétní situaci, znamená to požadavek monogamie a monoandrie. A teď přijde to hlavní, což musíme povědět bohužel bez důkazu: je známo, že mezi optimálními řešeními úlohy v první formulaci (bez požadavku celočíselnosti) vždy existuje aspoň jedno v celých číslech. Závěr pak je jasný: monogamie a monoandrie nebrání v dosažení maxima manželské pohody.

Zadání problému není bez úskalí, která znehodnocují podstatu problému. Ne-

hledíme-li na nesnáze, které ztěžují stanovení koeficientů  $c_{ij}$ , je tu další úskalí v nestálosti vztahů, a tedy i čísel  $c_{ij}$ . Proto i závěry mají platnost tak dlouho, dokud se nezmění vztahy. A na třetí úskalí našeho ušlechtilého usilování o maximum štěstí upozorníme nyní. V úloze se totiž bere zřetel na úhrn manželské pohody všech párů dohromady (zůstaňme v této úvaze při monogamii) a na kvalitu jednotlivých manželství se nedbá. Přesněji řečeno, může nastat taková shoda okolností, že láska např. prvního muže a první ženy má daleko do ideální, řekněme  $c_{11} = -5$ , a že vzájemný vztah kteréhokoli z ostatních mužů a první ženy je jak možno nejhorší neboli  $c_{ij} \sim -10$  pro  $i = 2, 3, \dots, n$ . (Zde si předepisujeme pro koeficienty vztahů  $-10 \leq c_{ij} \leq 10$ , negativní číslo vyjadřuje antipatii, pozitivní sympatii.) Je velmi pravděpodobné, že optimální řešení úlohy ožení prvního muže s první ženou, ačkoliv jejich vztah je klasifikován jako antipatie. Tento pár (vlastně jen muž) doplácí na lepší manželské soužití ostatních párů a nic se proti tomu nedá dělat, jestliže chceme splnit přirozený a nanejvýš rozumný požadavek úlohy. Vinu na tom mají ovšem podmínky úlohy.

Taková nešťastná shoda okolností nastane v následujícím konkrétním případě: čísla  $c_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) jsou dána tabulkou

		ženy			
		$c_{ij}$	1	2	3
muži	1	-5	10	10	
	2	-9	5	7	
	3	-9	8	6	

Je šest možných voleb párů, a to (na prvním místě je číslo muže, na druhém číslo ženy)

- |                        |                        |
|------------------------|------------------------|
| 1. (1,1), (2,2), (3,3) | 2. (1,1), (2,3), (3,2) |
| 3. (1,2), (2,1), (3,3) | 4. (1,2), (2,3), (3,1) |
| 5. (1,3), (2,1), (3,2) | 6. (1,3), (2,2), (3,1) |

Manželská pohoda je při těchto volbách ohodnocena čísly

volba	1	2	3	4	5	6
ohodnocení	6	10	7	8	9	6

Optimum je jediné, a to v případě druhé volby. Potvrzují se obavy vyslovené vpředu, pohroma je seslána na muže číslo jedna, jehož spojení s kteroukoli z ostatních žen by bylo andělsky dokonalé. Muž č. 1 se tedy stává nevinnou obětí společenského zájmu.

A zcela nakonec, abychom nevynaložili tolik úsilí na problém, jehož celá podstata má pochybnou hodnotu (když nehledíme na legrační stránku věci), interpretujeme problém tak, jak je vysloven abstraktně, s novým, rozumnějším obsahem.

Máme-li rozmístit  $n$  uchazečů o  $n$  volných míst v podniku tak, aby užitek jejich práce byl největší, stačí nám k rozhodnutí znát schopnosti každého z uchazečů pro každé z volných míst (a trochu počítání). Označíme-li  $c_{ij}$  číslo, jímž se oceňuje schopnost  $i$ -tého uchazeče pro  $j$ -té místo a  $x_{ij}$  část dané časové jednotky (tedy dobu), po kterou  $i$ -tý uchazeč bude pracovat na  $j$ -tém místě ( $x_{ij}$  mohou nabývat pouze hodnot 1 nebo 0, což je již vzpomenutý požadavek celočíselnosti), problém bude abstraktně formulován přesně tak jako v případě manželských párů. Stačí nahradit muže uchazeči a ženy volnými místy.

Změnil se obsah problému, ale nesnáze s realizací zůstaly. Vzhledem k povaze úlohy nesnáz vytčená na konci předešlého příkladu se stává paradoxem: požadavek maxima pracovního efektu znamená obsadit nejkvalitnějším uchazečem místo, pro které má nejmenší předpoklady (za dané situace ovšem nejlepší ze všech uchazečů; znovu onen rozpor mezi individuálním a společenským zájmem).

Tak se také může stát – připomeňme, že mluvíme o speciálním typu dopravního problému –, že nás i v nejekonomičtějším plánu dopravy překvapí paradoxy (jako že se surovina vozí zdaleka, ačkoliv je na dosah ruky), které nezasvěcený laik snadno zamění za lajdáctví, neschopnost, nesvědomitost nebo i zlý úmysl organizátora. Bohužel nedá se říci, že by šlo vždy jen o zdánlivý paradox a že by tedy laik neměl pravdu. Takové případy ovšem nemají s exaktními metodami nic společného, ba právě naopak.

Skončili jsme, myslím, čím jsme začali, tentokrát definitivně.

## Literatura

Ke studiu lineárního programování lze doporučit z obsáhlé literatury tyto knihy dostupné na našem trhu:

S. GASS: *Linéjnoe programirovanie* (ruský překlad), 1961.

D. B. JUDIN, E. G. GOEDŠTEJN: *Linéjnoe programirovanie*, 1963.

*Zadači i metody linéjnogo programirovanija*, 1961.

B. KORDA: *Učebnice lineárního programování*, 1962.

S. I. ZUCHOVICKIJ, L. I. AVDĚJEVA: *Linéjnoe i vypukloe programirovanie*, 1964.

### **Plynový laser jako délkový standard**

je předmětem výzkumu washingtonského NBS. Na rozdíl od dosavadních kryptonových standardů, které měří pouze délky řádu decimetrů, hodil by se laser k měření metrových a kilometrů vzdáleností. Vážnou nevýhodou laseru je však vliv okolního prostředí na tvar a rozměry rezonanční dutiny, což značně omezuje přesnost metody.

Sk