Stanley Wagon

Kvadratura kruhu ve dvacátém století

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 28 (1983), No. 6, 320--328

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137956

Kvadratura kruhu ve dvacátém století*)

Stanley Wagon

Již sto let je známo, že číslo π je transcendentní. Odtud plyne, že máme-li sestrojit čtverec o stejném obsahu, jako má daný kruh, pravítko a kružítko nám k tomu nestačí. (Něco z historie tohoto problému lze nalézt v [7].) Ukážeme dále, jak bližší zkoumání počátků problému kvadratury kruhu lze užít k motivaci jeho jiné verze pocházející od Alfreda Tarského. V této nové verzi není problém dosud řešen, i když je známa řada částečných výsledků. S některými z nich se seznámíme a ukážeme, jak se dá jeden z nich použít v dnešní době k charakterizaci Lebesgueovy míry.

Geometrická kvadratura kruhu

Řecká geometrie dovedla řešit problém kvadratury v rámci svých pravidel (tj. pouze kružítkem a pravítkem) pro řadu obrazců jiných, než je kruh. Obr. 1. ilustruje metodu kvadratury obdélníku, která se dá použít i pro případ trojúhelníku. Pythagorova věta umožňuje kvadraturu sjednocení dvou (a tedy i konečně mnoha) nepřekrývajících se čtverců; protože se dá libovolný mnohoúhelník rozložit na trojúhelníky, plyne odtud postup kvadratury pro jakýkoli mnohoúhelník.

Kruh je limitním případem pravidelných mnohoúhelníků a od doby Eukleidovy bylo dobře známo, jak lze informace o aproximujících obrazcích využít k získání informací o limitním obrazci. Zmíněná (exhaustivní) metoda byla užita ke zjištění, že poměr obvodu kruhu k jeho poloměru nezávisí na jeho velikosti, tj. stručně řečeno k důkazu existence čísla π (využívá se vlastností pravidelných mnohoúhelníků). Proto byli Řekové vyvedeni z míry tím, že neuměli zvládnout kvadraturu kruhu, přestože znali řešení pro mnohoúhelník. Z dnešního moderního hlediska samozřejmě víme, že limitní přechod často nezachovává číselně teoretické vlastnosti: limita algebraických čísel (nebo čísel, která jsou sestrojitelná) nemusí být algebraické číslo.

Jiná přeměna takového typu byla studována v 19. století (její kořeny leží také ve starověkých metodách určování obsahů). Dva mnohoúhelníky se nazývají *geometricky shodně rozložitelné* (někdy též budeme říkat *rozkladově kongruentní*), jestliže lze jeden z nich konečně mnoha přímkami rozdělit na části, z nichž lze složit (samozřejmě bez překrývání) druhý. V této definici se zcela zanedbávají přímky, podél nichž vedeme řezy, tj. hranice všech menších mnohoúhelníků. Například rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník lze rozdělit výškou na dva trojúhelníky a sestavit z nich čtverec (viz obr. 2). Geometricky shodně rozložitelné mnohoúhelníky mají zřejmě stejný obsah. To vyžaduje pouze konečnou aditivitu obsahu, spočetná aditivita zde není potřeba. Rovnost obsahů

---

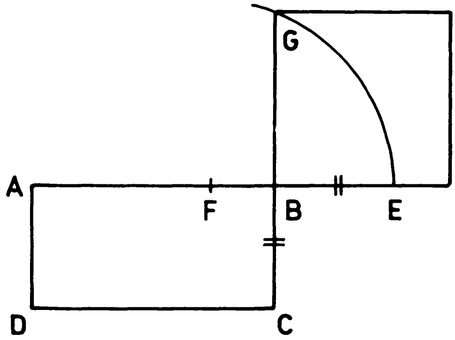
*) S. WAGON: *Circle-Squaring in the Twentieth Century.* The Mathematical Intelligencer, *Vol. 3,* No. 2, 1981, pp. 176—181. Přeložili I. NETUKA a J. VESELÝ.

je ve skutečnosti postačující podmínkou pro rozkladovou kongruenci. Tento výsledek se obvykle připisuje F. Bolyaiovi a P. Gerwienovi, kteří k němu nezávisle dospěli kolem r. 1832 (viz [3], str. 50), fundamentální myšlenky důkazu lze však nalézt již u Williama Wallace v r. 1807 (viz [8]).

Obr. 1. Některé z kroků při konstrukci čtverce o stejném obsahu, jaký má daný mnohoúhelník.

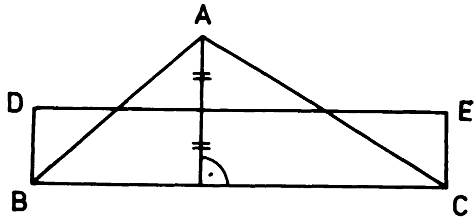
Kvadratura obdélníka

Prodluž AB k E tak, aby platilo $BE = BC$. Nechť F je střed AE a G průsečík přímky určené body C a B s obloukem kružnice o poloměru FE a středu F. Potom platí $BG^2 = AB \,.\, BC$.



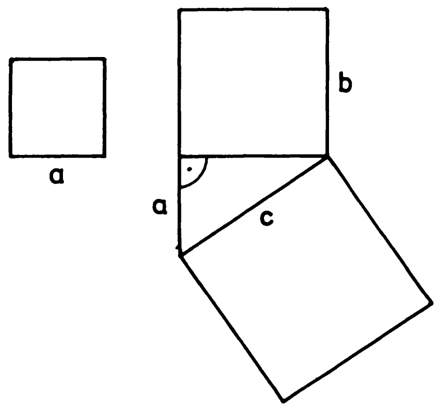
Kvadratura trojúhelníka

Sestrojte kolmice BD a CE k BC tak, aby $BD = CE = 1/2 \quad v_a$ (výška příslušná ke straně BC). Potom $BCED$ a ABC mají stejnou plochu. Obdélník $BCED$ lze na čtverec převést stejně jako v předchozím případě.

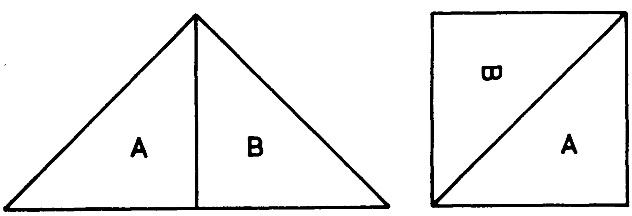


Kvadratura dvojice čtverců

$c^2 = a^2 + b^2$



Obr. 2. Geometricky shodná rozložitelnost rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku se čtvercem.

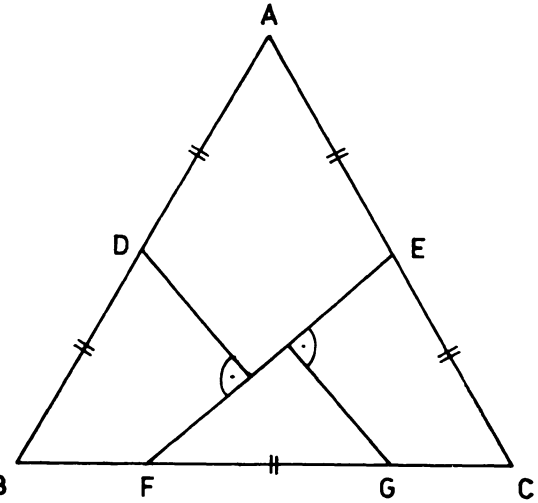


Věta (Wallace-Bolyai-Gerwien). Dva mnohoúhelníky o stejném obsahu jsou geometricky shodně rozložitelné; proto je tedy každý mnohoúhelník geometricky shodně rozložitelný se čtvercem o stejném obsahu.

Důkaz není těžký a používá stejné myšlenky jako řecká metoda kvadratury mnohoúhelníku. (Podrobněji viz [11], str. 334 nebo [3], str. 49; poznamenejme, že obr. 1. neukazuje, jak lze rozkladem dostat z obdélníka čtverec.)

Obecný důkaz předcházející věty nevede nutně k obzvlášť zajímavým rozkladům ani k rozkladu na minimální počet potřebných části. V 5. kapitole Evesovy knihy [5] lze nalézt mnoho zajímavých rozkladů; jedním z nich je např. rozklad rovnostranného trojúhelníku na čtyři části, z nichž lze složit čtverec – pochází od Dudneye a je znázorněn na obr. 3.

Obr. 3. Kvadratura rovnostranného trojúhelníku rozkladem na čtyři části. Nechť D je střed AB a E střed AC. Volte F na BC tak, aby EF^2 byla plocha ABC, tj. $EF = 1/2\ \sqrt[4]{(3AB)} = 0{,}658\ AB$. Potom najděte G tak, aby platilo $FG = 1/2\ AB$ a sestrojte kolmice z bodů D a G na EF. Výsledné čtyři čtyřúhelníky lze přeskupit tak, že tvoří čtverec.



Přestože zjišťujeme podobnost s metodami řecké matematiky, je zde přece jen určitý filozofický rozdíl. Předešlý výsledek ukazuje, jak převést na čtverec např. pravidelný sedmiúhelník. V řecké matematice by se tento problém vyskytl teprve tehdy, až by byla známa konstrukce pravidelného sedmiúhelníku – nyní víme, že taková konstrukce neexistuje.

Uvedené pojmy vedou ke kvadratuře kruhu jiného typu, modifikujeme-li trochu proces rozkládání. Lze si např. položit otázku, zda lze kruh rozložit na části pomocí „Jordanových nůžek", tj. rozdělením podél Jordanových křivek tak, aby z obdržených částí bylo možno složit čtverec. Jak dokázali Dubins, Hirsch a Karush (srv. [4]), jsou takové pokusy o kvadraturu marné. Jejich důkaz používá velmi komplikované, nicméně elementární topologické metody; existuje však i mnohem jednodušší důkaz (viz opět [4]) pro případ, kdy jsou řezy vedeny podél křivek, které jsou rektifikovatelné.

Obdobné otázky ve vyšších dimenzích jsou mnohem komplikovanější. Tak např. Dehn při řešení třetího Hilbertova problému ukázal (viz [3] nebo [5]), že pravidelný čtyřstěn není geometricky shodně rozložitelný s krychlí. Jiné výsledky a problémy vztahující se k pojmu geometricky shodné rozložitelnosti ve vyšších dimenzích a v jiných geometriích jsou přehledně shrnuty v Sahově článku [16], avšak z hlediska dostupného jen vyspělému čtenáři.

Existují další geometrické variace původního problému kvadratury. Mimořádně doslovná a praktická verze předpokládá, že kruh leží na sféře a ne v rovině. V některých případech má tento problém řešení užitím kružítka a pravítka – to závisí na číselně teoretických relativních rozměrech kruhu. Podrobněji: pro některé kulové vrchlíky lze pouze kružítkem a „sférickým pravítkem" sestrojit pravidelný sférický čtyřúhelník o stejném obsahu. Tento málo známý výsledek pochází od Meschkowského [10]; tam lze nalézt i odkazy na další obdobné neeukleidovské variace tohoto problému.

Množinově teoretická kvadratura kruhu

Nový obrat v rozkladových problémech nastal s popularizací teorie množin na počátku tohoto století. Vznikl ze snahy nalézt přesnější popis pro pohyb každého bodu. Tak např. uvažujeme-li příklad z obr. 2 s rovnoramenným pravoúhlým trojúhelníkem, není zřejmé, co se děje s jednotlivými body, chceme-li každému bodu čtverce přiřadit jednoznačně bod trojúhelníku; je to proto, že výška trojúhelníku hraje dvojí roli: vytváří dvě strany uvažovaného čtverce. Samozřejmě, smíříme-li se s jakýmkoliv prostým zobrazením, žádané přiřazení existuje, protože čtverec i trojúhelník mají mohutnost kontinua. Nás by však zajímala formulace zachovávající geometrický charakter problému.

Dvě množiny A, B v $\mathbb{R}^n$ nazýváme ve shodě s terminologií Banacha a Tarského (konečně) *shodně rozložitelné*, existuje-li rozklad množiny A na množiny $A_1, \dots A_k$ a množiny B na množiny $B_1, \dots, B_k$ (kde $k < +\infty$) tak, že A_i je kongruentní s B_i pro všechna i, tj. existují izometrická zobrazení g_i prostoru $\mathbb{R}^n$ taková, že $g_i(A_i) = B_i$, $i = 1, \dots, k$.

Na rozdíl od geometrické shodné rozložitelnosti tento pojem z teorie množin neklade žádná omezení na typ podmnožin vznikajících při rozkladu. Protože tyto podmnožiny nemusí být měřitelné, není jasné, zda shodně rozložitelné mnohoúhelníky (nebo mnohostěny v prostorech vyšších dimenzí) musí mít stejnou míru (n-rozměrný objem). Bez ohledu na to se podařilo Banachovi a Tarskému dokázat, že pro mnohoúhelníky P, $Q \subset \mathbb{R}^2$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

(1) P a Q jsou shodně rozložitelné;

(2) P a Q jsou geometricky shodně rozložitelné;

(3) P a Q mají stejný obsah.

Nejtěžší je důkaz implikace (1) $\Rightarrow$ (3). Je k němu potřeba věta pocházející od Banacha ([1]), která říká, že v $\mathbb{R}^1$a $\mathbb{R}^2$ lze Lebesgueovu míru rozšířit na konečně aditivní množinovou funkci definovanou na *všech* podmnožinách přímky nebo roviny, která je navíc invariantní vůči izometriím. Poznamenáváme, že klasická konstrukce neměřitelné množiny ukazuje, že takové rozšíření *nemůže* být spočetně aditivní. Předpokládejme, že μ je takové rozšíření dvojrozměrné Lebesgueovy míry (takové rozšíření se někdy nazývá *Banachova míra*) a že P, Q jsou rozkladově kongruentní mnohoúhelníky s odpovídajími částmi $A_1, \dots A_k$ a $B_1, \dots, B_k$. Potom s využitím vlastností míry μ dostáváme

$$\text{obsah}\,(P) = \mu(P) = \sum \mu(A_i) = \sum \mu(B_i) = \mu(Q) = \text{obsah}\,(Q)\,.$$

Jednoduchým důsledkem Wallaceovy-Bolyaiovy-Gerweinovy věty, o níž jsme se již zmínili, je, že z (3) plyne (2). Důkaz implikace (2) $\Rightarrow$ (1) je vtipný, nicméně však elementární. Dá se ukázat, že hranice mnohoúhelníků vystupujících v rozkladu lze zahrnout do jedné obecnější množiny, která může vystupovat v „množinovém rozkladu".

Implikace (3) $\Rightarrow$ (1) ukazuje, že každý mnohoúhelník je shodně rozložitelný se čtvercem (o stejném obsahu), což vede přirozeně k problému, který formuloval Tarski r. 1925 [20]:

„Un carré et un cercle dont les aires sont égales peuvent-ils être décomposés en un nombre fini de sous-ensembles disjoints respectivement congruents?"
V naší terminologii: Je kruh v rovině shodně rozložitelný se čtvercem o stejném obsahu?

Tato otázka zůstává stále nezodpověděna; jsme ve velice podobné situaci jako při původní formulaci kvadratury. Mnohoúhelníky opět nečiní žádné velké obtíže, ale kruh se zdá zcela nezvládnutelný. Navíc se zdá, že není k dispozici žádná představa o důkazu neexistence řešení v tomto kontextu.

Jediný negativní výsledek pochází od Dubinse a dalších a o tom jsme se již zmínili. Jejich věta říká, že kruh nelze rozbít na kousky, z nichž by každý byl vnitřkem jednoduché uzavřené (Jordanovy) křivky nebo částí takové křivky tak, aby z těchto kousků bylo možno znovu složit čtverec. Stručně řečeno, kruh není „nůžkově shodně rozložitelný" se čtvercem.

V protikladu ke zmíněnému topologickému problému kvadratury, množinově teoretická verze problému se snáze řeší ve vyšších dimenzích, i když v poněkud zrůdné formě. To je důsledek jistých zvláštních paradoxů objevujících se ve vyšších dimenzích.

Věta (Banachův-Tarského paradox [2]). *Je-li $n \geqq 3$, potom každé dvě omezené podmnožiny $\mathbb{R}^n$ s neprázdnými vnitřky jsou stejně rozložitelné.*

Speciálně, jednotková koule v $\mathbb{R}^3$ a každá trojrozměrná krychle, jakkoli velká či malá, jsou stejně rozložitelné. Připomeňme, že části v těchto rozkladech nemusí být lebesgueovsky měřitelné a tak tento paradox, přestože svým charakterem odporuje intuici, není ve skutečnosti rozporný. Elegantní důkaz Banachova-Tarského paradoxu založený na jednom Sierpińského lemmatu lze nalézt v [18].

Kdyby existoval Banachův-Tarského paradox v rovině, Tarského otázka by byla zodpověděna. Již jsme však naznačili, jak z existence Banachových měr v $\mathbb{R}^1$ a $\mathbb{R}^2$ vyplývá, že shodně rozložitelné lebesgueovsky měřitelné množiny mají stejnou míru.

Na tomto místě vzniká zajímavý filozofický aspekt. Banachův-Tarského paradox vyžaduje užití axiómu výběru; někteří to uvádějí jako argument proti zmíněnému axiómu (zcela nedávno v [9], str. 269). Důkaz existence Banachovy míry v rovině však také užívá axióm výběru, a tak se zdá, že tento axióm je nutný k tomu, abychom se paradoxů zbavili i je vytvořili. V roce 1949 A. P. Morse [12] ukázal, že situace v rovině je však zcela odlišná: Bez užití axiómu výběru dokázal, že shodně rozložitelné měřitelné podmnožiny roviny mají stejnou míru.

Celá situace byla zásadním způsobem vyjasněna von Neumannem [14], který poukázal na důležitou souvislost mezi existencí konečně aditivní invariantní míry a abstraktními vlastnostmi grupy, vzhledem k níž se požaduje invariance. Upozornil, že dramatická změna při přechodu od dvou ke třem dimenzím nespočívá v charakteru prostoru, ale spíše ve vlastnostech grupy izometrií. V $\mathbb{R}^1$ a $\mathbb{R}^2$ je grupa izometrií řešitelná a to je postačující k získání konečně aditivní míry invariantní vůči izometriím (v moderní terminologii se takovým grupám říká anglicky *amenable*). V $\mathbb{R}^3$ a ve vyšších dimenzích grupy izometrií nejsou ovšem řešitelné. Ve skutečnosti tyto vícerozměrné grupy mají volné neabelovské podgrupy (což v podstatě dokázal Hausforff [6]) a za určitých podmínek právě to vede k paradoxálním rozkladům.*)

Jak dále von Neumann ukázal, zvrat od existence měr k paradoxům se objeví již při přechodu od $\mathbb{R}^1$ k $\mathbb{R}^2$ (místo od $\mathbb{R}^2$ k $\mathbb{R}^3$), pokud se místo izometrií uvažují afinní zobrazení zachovávající Lebesgueovu míru. Uvažovat taková zobrazení místo zobrazení zachovávajících délku je přirozené: pozoruhodným rysem Banachovy-Tarského konstrukce je nakonec právě zvětšení velikosti při užití zobrazení zachovávajících velikost. Von Neumann dokázal, že libovolné dvě omezené podmnožiny $\mathbb{R}^2$ s neprázdnými vnitřky jsou shodně rozložitelné, pokud dovolíme přemísťování částí pomocí zobrazení zachovávajících míru. Tato změna náhledu neovlivní jednorozměrný případ, neboť v $\mathbb{R}^1$ jsou zobrazení zachovávající míru totéž co izometrie. Nicméně mohou nastat lineární paradoxy jiného druhu a von Neumann [14], str. 115, předložil i na to zarážející příklad (viz [17], str. 103).

Výše popsaný rovinný paradox má určitý vztah k problému kvadratury kruhu, neboť při užití některých neizometrických zobrazení lze kvadraturu kruhu provést. Von Neumannův důkaz byl poněkud obtížný a závisel na poznatku, že grupa lineárních transformací $\mathbb{R}^2$ s determinantem ± 1 má nekonečně mnoho volných podgrup splňujících jistou komplikovanou soustavu podmínek. Existuje uspokojivě přímý důkaz výsledku dokonce silnějšího za pomoci stejné Sierpińského myšlenky užité ke zjednodušení Banachova-Tarského paradoxu. Nechť σ znamená lineární zobrazení v $\mathbb{R}^2$ definované vztahem $\sigma(x, y) = (x + y, y)$. Zobrazení σ zachovává míru ($=$ obsah), neboť determinant σ je roven 1. Přidání tohoto jediného zobrazení ke grupě izometrií už stačí ke vzniku paradoxů.

Věta. Nechť G je grupa generovaná zobrazením σ a všemi izometrickými zobrazeními roviny. Připustíme-li zobrazení z G při přemísťování částí, potom jsou každé dvě omezené množiny v $\mathbb{R}^2$ s neprázdnými vnitřky shodně rozložitelné.

Odtud plyne, že ke zvládnutí kvadratury kruhu ve smyslu Tarského problému stačí k izometriím přidat zobrazení σ. Ale taková změna grupy dovolených transformací mění problém tak zásadním způsobem, že opravdu nemáme žádné vodítko k tomu, zda je či není možné provést kvadraturu kruhu *pouze* užitím izometrií.

---

*) Podrobnosti o tom viz v článku L. E. Dubinse, PMFA 3/1981, str. 151—155. (Poznámka redakce.)

Paradoxy a jednoznačnost Lebesgueovy míry

Nedávné výsledky ukazují, že výše uvedené paradoxy lze interpretovat užitečným pozitivním způsobem. Obvyklá interpretace je negativní: jestliže při užití transformací z grupy G existují paradoxy, pak nemůže existovat žádná konečně aditivní G-invariantní míra definovaná na všech podmnožinách jisté množiny. Tarski si však povšiml v souvislosti se starým Ruziewiczovým problémem ([1], str. 8), že paradoxů lze užít k získání důležitých informací o mírách na algebrách mnohem menších než je algebra všech podmnožin. Nechť $\mathscr{B}$ je algebra všech omezených lebesgueovsky měřitelných podmnožin $\mathbb{R}^n$. Ruziewicz položil otázku, zda na $\mathscr{B}$ lze definovat konečně aditivní míru invariantní vůči izometriím, která by přiřazovala míru 1 jednotkové krychli a přitom aby to *nebyla* Lebesgueova míra. (Lebesgue ukázal, že neexistuje jiná spočetně aditivní míra.)

Míru tohoto druhu, kterou hledal Ruziewicz, nazveme exotická míra. Banach dokázal [1] (viz [13]), že exotické míry existují pro $n = 1$ nebo 2. A podobně jako výše zmíněné výsledky, existence těchto měr spočívá na řešitelnosti grupy izometrií. Pro vyšší dimenze zůstala otázka otevřena přes padesát let. Tarski poukázal na to, že pro $n > 2$ se každá exotická míra na $\mathscr{B}$ musí shodovat s Lebesgueovou mírou alespoň na množinách Lebesgueovy míry nula; jinak řečeno, exotická míra musí být absolutně spojitá vzhledem k Lebesgueově míře.

Tarského zjištění představuje skutečně krásnou aplikaci Banachova-Tarského paradoxu. Nechť $n \geqq 3$, μ je exotická míra a E je omezená množina Lebesgueovy míry nula. Zvolme krychli I obsahující množinu E. Podle Banachova-Tarského paradoxu lze I rozložit a pomocí izometrií opět složit do krychle s libovolně stanoveným objemem ε. K důkazu, že se μ shoduje s objemem na krychlích, se nejprve užije invariance vůči posunutí. Tím se ukáže, že μ má správné hodnoty na krychlích o délce hrany $1/2$, $1/4$, $1/8, \ldots$ a pak se užije těchto krychlí k aproximaci ostatních. To ale *neznamená*, že $\mu(I) \leqq \varepsilon$; části při rozkladu I nemusí být lebesgueovsky měřitelné, a tedy nemusí být μ-měřitelné. Avšak libovolné podmnožiny množin Lebesgueovy míry nula jsou vždy lebesgueovsky měřitelné, proto průniky našich částí s množinou E patří do $\mathscr{B}$, a jsou tedy měřitelné. Protože μ je konečně aditivní a invariantní vůči izometriím, je $\mu(E) \leqq \varepsilon$. Poněvadž ε je libovolné, $\mu(E)$ musí být nula.

V řešení Ruziewiczova problému nastal nedávno značný pokrok. Přitom hrálo zásadní roli Tarského zjištění, a tedy Banachův-Tarského paradox. Nejprve Joseph Rosenblatt [15] dokázal níže uvedenou větu. Je pozoruhodná tím, že se týká $\mathbb{R}^2$, kde exotické míry existují. Nechť σ označuje lineární zobrazení $\mathbb{R}^n$, $\sigma(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + x_2, \ldots, x_n)$.

Věta R. Nechť $n = 2$ a nechť μ je libovolná míra na $\mathscr{B}$ mající tyto vlastnosti: je konečně aditivní, invariantní vůči izometriím a vůči zobrazení σ, přiřazuje míru 1 jednotkové krychli a je absolutně spojitá vzhledem k Lebesgueově míře. Potom μ splývá s Lebesgueovou mírou.

Tato věta byla zásadním způsobem zlepšena Dennisem Sullivanem [19]:

Věta S. Je-li $n \geqq 5$, věta R platí bez předpokladu o invarianci vůči zobrazení σ.

Jak si povšiml Tarski a jak bylo známo Rosenblattovi i Sullivanovi, podmínka absolutní spojitosti je zbytečná pro $n \geqq 3$. Věta S tedy znamená řešení problému jednoznačnosti v prostorech dimenze 5 a ve vyšších dimenzích. Problém pro $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^4$ je stále otevřen.

Zjemnění von Neumannovy věty, diskutované na konci předcházející části, má úzký vztah k dvojrozměrnému případu. Přestože existují exotické míry, lze ve větě R vypustit předpoklad absolutní spojitosti také v rovinném případě, neboť paradoxní rozklad existuje, připouštíme-li zobrazení σ. Tedy v $\mathbb{R}^2$ je Lebesgueova míra jediná konečně aditivní míra na $\mathscr{B}$, která je invariantní vzhledem k izometriím a k zobrazení σ a přiřazuje míru 1 jednotkovému čtverci.

Připojená tabulka shrnuje hlavní výsledky uvedené v tomto článku. Je pozoruhodné, že samá „ANO" uvedená v druhém řádku vznikají ze dvou zásadně odlišných důvodů; první z nich je ve vztahu k „ANO" uvedeným o řádek výše, zatímco ostatní pocházejí z „ANO" napsaných o řádek níže.

Kvadratura kruhu urazila za 100 roků dlouhý kus cesty.

Tabulka

	$\mathbb{R}^1$	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^4$	$\mathbb{R}^n, n \geqq 5$
Všechny mnohoúhelníky (mnohostěny) jsou geometricky shodně rozložitelné se čtvercem (krychlí)	ANO	ANO	NE	NE	NE
Všechny mnohoúhelníky (mnohostěny) jsou množinově teoreticky shodně rozložitelné se čtvercem (krychlí)	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO
Každé dvě omezené množiny s neprázdnými vnitřky jsou shodně rozložitelné	NE	NE	ANO	ANO	ANO
Lebesgueova míra je jediná konečně aditivní normalizovaná míra na $\mathscr{B}$ invariantní vůči izometriím	NE	NE	?	?	ANO
Každé dvě omezené množiny s neprázdnými vnitřky jsou shodně rozložitelné za pomoci afinních zobrazení	NE	ANO	ANO	ANO	ANO
Lebesgueova míra je jediná konečně aditivní normalizovaná míra na $\mathscr{B}$ invariantní vůči afinním zobrazením zachovávajícím míru	NE	ANO	ANO	ANO	ANO

Poznámky překladatelů

Podle sdělení autora byl Ruziewiczův problém nedávno pozitivně vyřešen pro $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^4$ G. A. Margulisem. Místo otazníků v tabulce má být tedy uvedeno ANO. Problém však zůstává otevřen pro S^2 a S^3.

Důkaz věty uvedené na konci části věnované Banachově-Tarského paradoxu lze najít v [21].

Sullivanův výsledek (věta S) byl nezávislé dokázán G. A. Margulisem v [22].

Literatura

[1] S. Banach: *Sur le problème de la mesure*. Fund. Math. *4* (1923), 7—33. Otištěno v: S. Banach, *Oeuvres, sv. I.* Varšava: Éditions Scientifiques de Pologne, 1967.

[2] S. Banach, A. Tarski: *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*. Fund. Math. *6* (1924), 244—277. Otištěno v: S. Banach, *Oeuvres, sv. I.* Varšava: Éditions Scientifiques de Pologne, 1967.

[3] V. Boltianskij: *Hilbert's Third Problem*. Washington: Winston, 1978.

[4] L. Dubins, M. Hirsch, J. Karush: *Scissor Congruence*. Israel J. Math. *1* (1963), 239—247.

[5] H. Eves: *A Survey of Geometry, sv. 1.* Boston: Allyn and Bacon, 1963.

[6] F. Hausdorff: *Bemerkung über den Inhalt von Punktmengen*. Math. Ann. *75* (1914), 428—433.

[7] E. W. Hobson: *Squaring the Circle*. V: *Squaring the circle and other monographs*. Bronx: Chelsea, 1953.

[8] W. H. Jackson: *Wallace's theorem concerning plane polygons of the same area*. Amer. J. Math. *34* (1912), 383—390.

[9] M. Kline: *Mathematics, The Loss of Certainty*. New York: Oxford, 1980.

[10] H. Meschkowski: *Unsolved and Unsolvable Problems in Geometry*. Překlad J. Burlaka. New York: Ungar, 1966.

[11] E. E. Moise: *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*. Druhé vydání. Reading: Addison-Wesley, 1974.

[12] A. P. Morse: *Squares are normal*. Fund. Math. *36* (1949), 35—39.

[13] J. Mycielski: *Finitely additive measures*. J. Colloq. Math. *42* (1979), 309—318.

[14] J. von Neumann: *Zur allgemeinen Theorie des Maßes*. Fund. Math. *13* (1929), 73—116.

[15] J. Rosenblatt: *Uniqueness of invariant means for measure-preserving transformations*. Trans. Amer. Math. Soc. *265* (1981), 623—636.

[16] C. H. Sah: *Hilbert's Third Problem: Scissors Congruence*. San Francisco: Pitman, 1979.

[17] W. Sierpiński: *On the Congruence of Sets and their Equivalence by Finite Decomposition*. Bronx: Chelsea, 1954.

[18] K. Stromberg: *The Banach-Tarski Paradox*. Amer. Math. Monthly *86* (1979), 151—161.

[19] D. Sullivan: *For $n > 3$ there is only one finitely additive rotationally invariant measure on the n-sphere defined on all Lebesgue measurable subsets*. Bull. Amer. Math. Soc. *4* (1981), 121—123.

[20] A. Tarski: *Problème 38*. Fund. Math. *7* (1925), 381.

[21] S. Wagon: *The use of shears to construct paradoxes in $\mathbb{R}^2$*. Proc. Amer. Math. Soc. (v tisku).

[22] G. A. Margulis: *Some remarks on invariant means*. Monathsefte f. Math. *90* (1980), 233—235.