Zdeněk Pírko; K. Mison

Rychlostní optimalizace složených raket

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 12 (1967), No. 6, 341--355

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137944

Velmi často se užívá vakuové metodiky z obou důvodů zároveň. Konkrétní uplatnění má vakuová metodika nejen v elektrovakuovém průmyslu, tj. při výrobě elektronek, polovodičových elementů a světelných zdrojů, ale i v průmyslu chemickém, průmyslu optiky a zvlášť pronikavé uplatnění má v moderní vakuové metalurgii, která dokáže připravit, resp. zušlechtit kovové materiály o vynikajících vlastnostech. Konečně vakuová metodika se uplatňuje i v potravinářském průmyslu a v lékařských disciplínách.

Závěrem je mi milou povinností vyjádřit dr. J. Smolkovi dík za kritické připomínky k rukopisu tohoto referátu.

RYCHLOSTNÍ OPTIMALIZACE SLOŽENÝCH RAKET

Karel Mišoň, Zdeněk Pírko, Praha

V článku se sledují různá hlediska pro dosažení maximální rychlosti složené rakety při pevně předepsané hodnotě úhrnné počáteční hmoty. Pro získání pohledu do problematiky úlohy je prvých pět odstavců věnováno dvoustupňové raketě. Teprve v dalších osmi odstavcích je řešen obecný případ n-stupňové rakety. Jednotlivá pojetí jak při raketě dvojstupňové, tak i při n-stupňové uvádějí výsledky pro případ různých výtokových rychlostí v jednotlivých stupních i jejich specializaci pro společnou hodnotu výtokových rychlostí ve všech stupních.

Dva odstavce (9 a 10) jsou věnovány numerické ilustraci zaměřené k dosažení obou prvých kosmických rychlostí. Vedle idemparametrových raket je zdůrazněn i případ raket ekviparametrových a význam geometrické standardizace.

Článek dodržuje důsledně dříve užité označení*).

Sestavení:

*) Pokroky MFA *9* (1964), 223, 267.

1. V-OPTIMALIZACE DVOJSTUPŇOVÉ RAKETY

Absolutní rozdělení hmot na dvojstupňové raketě je úplně určeno pěti nezávislými hmotovými charakteristikami; k úplnému určení relativního rozdělení hmot této rakety stačí předpis čtveřice parametrů. Je-li dána jen triáda parametrů, disponujeme volbou čtvrtého parametru. Pro jeho určení lze pak předepisovat rozličné požadavky, a to i bez případné potřeby explicitního vyjádření tohoto čtvrtého parametru.

V takovém pojetí je přirozená úloha:

Při předem daných strukturních parametrech obou stupňů $q_{1,2}$ a úhrnném užitečném parametru P (trojice těchto parametrů už představuje jistou vazbu mezi CIOLKOVSKÉHO čísly $r_{1,2}$ obou subraket) najít dvojici parametrů $r_{1,2}$, jimž odpovídá největší možná charakteristická rychlost $V(\equiv V_2)$. Úlohu pro stanovení takto definované dvojstupňové rakety nazveme V-optimalizací dvojstupňové rakety, popř. V_2-optimalizací.

Neznámé užitečné parametry $p_{1,2}$ se vyjadřují pomocí daných parametrů $q_{1,2}$ a vázaných parametrů $r_{1,2}$ známými rovnicemi

$$p_i = r_i(q_i - 1)/(q_i - r_i)\,; \quad i = 1, 2\,,$$

přičemž jejich součin je a priori daná veličina

$$(q_1 - 1)(q_2 - 1)\, r_1/(q_1 - r_1)\,.\, r_2/(q_2 - r_2) = P\,. \tag{1;1}$$

V předložené úloze jde o maximum funkce

$$V_2 \equiv V_2(r_1, r_2) = U_1 \ln r_1 + U_2 \ln r_2$$

s vazbou

$$r_1 r_2/(q_1 - r_1)(q_2 - r_2) = P/(q_1 - 1)(q_2 - 1) = \text{konst}\,. \tag{1;2}$$

Podmínky uvažovaného extrému

$$\mathrm{d}V_2 = 0\,, \quad \mathrm{d}\frac{r_1 r_2}{(q_1 - r_1)(q_2 - r_2)} = 0$$

poskytují jednak

$$U_1\, \mathrm{d}r_1/r_1 + U_2\, \mathrm{d}r_2/r_2 = 0\,,$$

jednak

$$(q_2 - r_2)\, r_2 q_1\, \mathrm{d}r_1 + (q_1 - r_1)\, r_1 q_2\, \mathrm{d}r_2 = 0$$

a po vyloučení diferenciálů

$$q_2 U_1 r_1 - q_1 U_2 r_2 + q_1 q_2 (U_2 - U_1) = 0 . \tag{1;3}$$

Tato podmínka vede zřejmě k maximálnímu V_2. Optimální dvojice $r_{1,2}$ je pak řešením soustavy (2) (3), jemuž graficky odpovídá průsečík rovnoosé hyperboly s přímkou.

2. SPECIALIZACE $U_1 = U_2$. R—OPTIMALIZACE

V případě stejných výtokových rychlostí v obou stupních se poslední vztah předchozího odstavce zjednoduší na

$$r_1 : r_2 = q_1 : q_2 \tag{2;1}$$

a ukazuje, že na vyšetřované optimální raketě jsou CIOLKOVSKÉHO čísla subraket v poměru strukturních parametrů stupňů. Řešení s (1;1) poskytne

$$r_{1,2} = q_{1,2} \sqrt{P} / (\sqrt{[(q_1 - 1)(q_2 - 1)]} + \sqrt{P}) .$$

Specializujeme-li dále požadavkem q = idem, je i r = idem a V-optimalizací je ekviparametrová raketa*) se společným CIOLKOVSKÉHO číslem v obou stupních

$$r = q \sqrt{P} / (q - 1 + \sqrt{P}) = pq / (p + q - 1) . \tag{2;2}$$

Poznámka I.

Při stejných výtokových rychlostech U_i v obou stupních nastává maximum charakteristické rychlosti V_2 současně s maximem úhrnného CIOLKOVSKÉHO čísla. V tomto zvláštním případě je tedy V-optimalizace současně R-optimalizací a opačně.

Poznámka II.

Podmínky extrému V_2 jsou patrně také vyjádřeny rovnicemi

$$F(r_1, r_2) = R + (P - \text{konst})\, \Phi , \quad \partial F / \partial r_1 = \partial F / \partial r_2 = 0 ,$$

kde

$$R = r_1 r_2 , \quad P = (q_1 - 1)(q_2 - 1)\, r_1 / (q_1 - r_1) \,.\, r_2 / (q_2 - r_2)$$

a Φ je LAGRANGEŮV multiplikátor.
Odtud

$$(q_1 - r_1)^2 (q_2 - r_2) + \Phi q_1 (q_1 - 1)(q_2 - 1) = 0 ,$$
$$(q_1 - r_1)(q_2 - r_2)^2 + \Phi q_2 (q_1 - 1)(q_2 - 1) = 0$$

a tedy zase (1).

*) Věnujeme jí níže odstavec 5.

3. MEZISTUPŇOVÉ PARAMETRY V PODMÍNKÁCH V_2-OPTIMA

Pro další analýzu se ukazuje početně výhodné zavést *mezistupňové parametry*

$$\varphi_1 = N_1/Z\,, \quad \varphi_2 = N_2/Z \quad (Z = Z_2)\,.$$

Užijeme-li ještě z formálních důvodů nové označení pro úhrnný užitečný parametr P

$$\varphi_0 = P \quad (= M/Z;\ M = M_1 = N + Z,\ N = N_1 + N_2)\,,$$

platí

$$\varphi_0 = 1 + \varphi_1 + \varphi_2\,. \tag{3;1}$$

Snadno nalezneme souvislost s užitečnými parametry druhého druhu $p_{1,2}$:

$$\varphi_0 = p_1 p_2\,, \quad \varphi_1 = (p_1 - 1)\,p_2\,, \quad \varphi_2 = p_2 - 1$$

a obrácením

$$p_1 = \varphi_0/(\varphi_0 - \varphi_1) = \varphi_0/(1 + \varphi_0)\,; \quad p_2 = \varphi_0 - \varphi_1 = 1 + \varphi_2\,.$$

Poněvadž

$$r_i = p_i q_i/(p_i/q_i - 1)\,; \quad i = 1, 2\,,$$

získáme dosazením podle předchozích rovnic ještě také

$$r_1 = \varphi_0/(1 + \varphi_2 + \varphi_1/q_1)\,; \quad r_2 = (\varphi_0 - \varphi_1)/(1 + \varphi_2/q_2)\,. \tag{3;2}$$

V podmínkách optima (2;1) je vzhledem k (2)

$$\varphi_0(q_2 + \varphi_2) = (\varphi_0 - \varphi_1)\,(q_1 + \varphi_1 + q_1\varphi_2)\,,$$

a tedy ve spojení s (1)

$$\varphi_0(q_2 - 1)/(q_1^2 - 1) = (1 + \varphi_2)^2 = (\varphi_0 - \varphi_1)^2\,.$$

Odtud máme pro odpovídající, řekněme *optimální mezistupňové, parametry* vztahy

$$\alpha\sqrt{\varphi_0} = \varphi_0 - \varphi_1 = 1 + \varphi_2\,; \quad \alpha = \sqrt{[(q_2 - 1)/(q_1 - 1)]}$$

nebo

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \alpha\sqrt{\varphi_0}\,; \quad \varphi_2 = \alpha\sqrt{\varphi_0} - 1 \tag{3;3}$$

a pro ostatní parametry

$$\left.\begin{aligned} r_{1,2} &= q_{1,2}\sqrt{\varphi_0}/(\beta + \sqrt{\varphi_0})\,; & p_1 &= \sqrt{(\varphi_0)}/\alpha \\ R = r_1 r_2 &= q_1 q_2 \varphi_0/(\beta + \sqrt{\varphi_0})^2\,; & p_2 &= \alpha\sqrt{\varphi_0} \end{aligned}\right\} \tag{3;4}$$

s označením

$$\beta = \sqrt{[(q_1 - 1)\,(q_2 - 1)]}\,. \tag{3;5}$$

4. ODLEHČENÍ Z BEZIMPULSOVÉHO ODPOUTÁNÍ STRUKTURNÍ HMOTY

Hodnoty optimálních CIOLKOVSKÉHO čísel uvedené v (3;4) platí ovšem za běžného předpokladu, že se na konci aktivní periody prvního stupně oddělí jeho strukturní hmota od ostatní rakety s nulovou relativní rychlostí. Kdyby však k takovému odlehčení nedošlo, bylo by nutné v úhrnném optimálním CIOLKOVSKÉHO čísle $R = r_1 r_2$ nahradit

$$r_2 = (Z_2 + N_2)/(Z_2 + S_2)$$

méně příznivým

$$r_2^* = (Z_2 + N_2 + S_1)/(Z_2 + S_2 + S_1)\,.$$

Poněvadž

$$\begin{aligned} r_2^* &= (1 + N_2/Z_2 + S_1/Z_2)/(1 + S_2/Z_2 + S_1/Z_2) = \\ &= (1 + N_2/Z_2 + (N_1/Z_2) : (N_1/S_1))/(1 + (N_2/Z_2) : (N_2/S_2) + \\ &\quad + (N_1/Z_1) : (N_1/S_1)) = \\ &= (1 + \varphi_2 + \varphi_1/q_1) : (1 + \varphi_1/q_1 + \varphi_2/q_2) \end{aligned}$$

a po dosazení podle rovnic (3;3), (3;5)

$$r_2^* = q_2(\varphi_0 + \beta\sqrt{\varphi_0})/(q_1(q_2 - 1) + q_2\varphi_0 + \alpha(q_1 - q_2)\sqrt{\varphi_0})\,,$$

nastoupila by místo hodnoty R nepříznivější

$$R^* = r_1 r_2^* = q_1 q_2 \varphi_0/(q_1(q_2 - 1) + q_2\varphi_0 + \alpha(q_1 - q_2)\sqrt{\varphi_0})\,.$$

Jako odlehčení zavedeme poměr R/R^* v podmínkách optima, tj.

$$\begin{aligned} R/R^* &= r_2/r_2^* = \\ &= q_2(q_1(q_2 - 1) + q_2\varphi_0 + \alpha(q_1 - q_2)\sqrt{\varphi_0})/(q_0(\beta + \sqrt{\varphi_0})^2)\,. \end{aligned}$$

Užití a optimalizace jsou provedeny v příštím odstavci, který je věnován q-idemparametrové raketě.

5. V-OPTIMALIZACE DVOUSTUPŇOVÉ q-IDEMPARAMETROVÉ RAKETY

V závěru odstavce 2 jsme shledali, že V_2-optimalizací q-idemparametrové rakety ($q_1 = q_2 = q$; $Q = q^2$) je raketa ekviparametrová. Podmínku optima (2;2) pišme

$$r_1 = r_2 = pq/(q - 1 + p) = q\sqrt{P}/(q - 1 + \sqrt{P}) = q\sqrt{\varphi_0}/(q - 1 + \sqrt{\varphi_0})$$

a dále

$$\begin{aligned} p_1 = p_2 = \sqrt{\varphi_0} = \sqrt{P}\,, \quad R = q^2\sqrt{P}/(q - 1 + \sqrt{P})^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{P} = (q - 1)\sqrt{(R)}/(q - \sqrt{R})\,, \end{aligned}$$

takže (stále v podmínkách optima!)

$$P = ((q - 1)/(q/\sqrt{(R)} - 1))^2 = \{[\sqrt{(Q)} - 1]/[\sqrt{(Q/R)} - 1]\}^2 . \qquad (5;1)$$

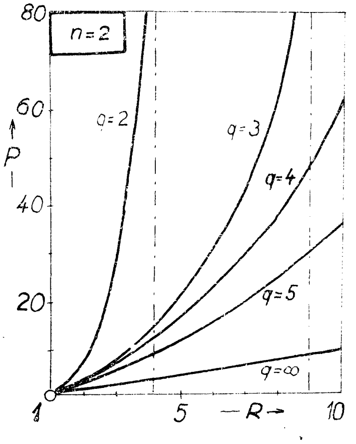
Tato závislost poskytuje možnost snadného grafického znázornění souvislosti úhrnného užitečného parametru $P = M/Z$ a úhrnného CIOLKOVSKÉHO čísla R v podmínkách optima a pro různé hodnoty strukturního parametru q. Izoplety q vycházejí z teoretického bodu $R = P = 1$ a mají asymptoty s dotykovým bodem $P \to \infty$ při $R = Q = q^2$. Pro limitní případ $q \to \infty$ $(Q \to \infty)$ plyne z (1) lineární závislost $P = R$. Vztah

$$\partial P/\partial R = q(q - 1)^2/(q - \sqrt{R})^3$$

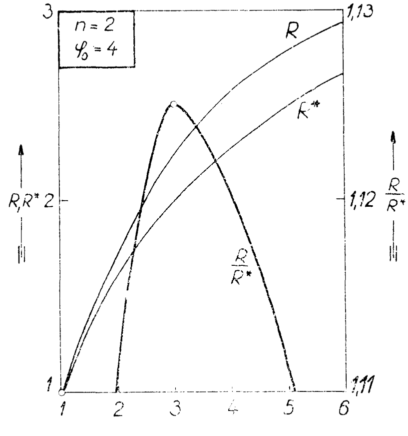
určuje směr tečen v bodě $R = 1$

$$(\partial P/\partial R)_{R=1} = q/(q - 1) .$$

Průběh závislosti je zachycen v grafu obr. 1.



Obr. 1. Graf závislosti úhrnného CIOLKOVSKÉHO čísla R a úhrnného užitečného parametru P V-optimální dvoustupňové q-idemparametrové rakety.



Obr. 2. Závislost úhrnného CIOLKOVSKÉHO čísla R, neodlehčeného čísla R^* a poměru odlehčení R/R^* na strukturním parametru q dvoustupňové rakety v podmínkách optima.

Poměr odlehčení R/R^*, zavedený v předchozím odstavci, se v případě uvažované ekviparametrové rakety zjednodušuje; nejprve máme

$$r_2^* = (\varphi_0 + (q - 1)\sqrt{\varphi_0})/(q - 1 + \varphi_0) , \quad R^* = q\varphi_0/(q - 1 + \varphi_0) ,$$

takže odlehčení

$$R/R^* = r_2/r_2^* = q(q^{-1} + \varphi_0)/(q^{-1} + \sqrt{\varphi_0})^2 .$$

Podmínka extremálního odlehčení $\partial(R/R^*)/\partial q = 0$ dává

$$q(1 + \varphi_0 - 2\sqrt{\varphi_0}) = 1 - \varphi_0 - \sqrt{\varphi_0} + \varphi_0\sqrt{\varphi_0}$$

pro příslušný strukturní parametr hodnotu

$$q = 1 + \sqrt{\varphi_0}\,,$$

takže maximální odlehčení (lze ukázat, že je $[\partial^2(R/R^*)/\partial q^2]_{q=1+\sqrt{\varphi_0}} < 0$).

$$(R/R^*)_{\max} = (R/R^*)_{q=1+\sqrt{\varphi_0}} = (1 + \sqrt{\varphi_0})^2/(4\sqrt{\varphi_0})\,.$$

Příslušný zisk na charakteristické rychlosti

$$V_2 - V_1 = U \ln(R/R^*) = U(2\ln(1 + \sqrt{\varphi_0}) - \ln\sqrt{(\varphi_0)} - 1{,}386)\,.$$

Průběh závislostí $R \equiv R(q)$, $R^* \equiv R^*(q)$ a závislost poměru R/R^* na strukturním parametru q při předepsané hodnotě φ_0 v podmínkách optima

$$R = q^2\varphi_0/(q - 1 + \sqrt{\varphi_0})^2\,, \quad R^* = q\varphi_0/(q - 1 + \varphi_0)\,,$$
$$R/R^* = q(q - 1 + \varphi_0)/(q - 1 + \sqrt{\varphi_0})^2$$

je pro případ $\varphi_0 = 4$, vedoucí k $(R/R^*)_{\max} = 1{,}125$ při $q = 3$, zachycen v připojeném grafu (obr. 2). Snadný výpočet ukáže, že vzhledem k $q > 0$ je $(q - 1 + \sqrt{\varphi_0})^2 < q(q - 1 + \varphi_0)$, a tedy $R > R^*$, což je ostatně fyzikálně zřejmé.

6. V_n-OPTIMALIZACE SLOŽENÉ RAKETY

Úvahy předchozích odstavců se omezovaly na dvoustupňové rakety. Po získaných zkušenostech se bezprostředně vnucuje požadavek rozšíření jejich myšlenky na obecnou složenou n-stupňovou raketu. Stejně jako u dvoustupňové rakety podáme i zde nejdříve řešení obecného případu a teprve pak přistoupíme ke specializaci přecházející v R-optimalizaci (srv. Poznámku I odstavce 2).

V obecném případě jde o stanovení extrému

$$V_n \equiv V_n(r_1, r_2, \ldots, r_n) = \ln \prod_{i=1}^{n} r_i^{U_i} = \text{extrém}$$

při vazbě

$$P = \prod_{i=1}^{n} p_i = \prod_{i-1}^{n} (q_i - 1)/(q_i/r_i - 1) = \text{konst}\,. \tag{6;1}$$

Zobecněním Poznámky II odstavce 2 dostáváme podmínky extrému

$$F(r_{1,2,\cdots,n}) = V_n + (P - \text{konst})\,\Phi\,, \quad \partial\Phi/\partial r_i = 0\,; \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

čili

$$\frac{U_i}{r_i} + \Phi q_i \frac{q_i - 1}{(q_i - r_i)^2} \prod_{i=1}^{n}{}' \frac{q_j - 1}{q_j - r_j} r_j = 0 , \quad i = 1, 2, \ldots, n , \tag{6;2}$$

kde akcent při $\prod$ je obvyklým označením požadavku vynechat činitele s indexem $j = i$. Vzhledem k vazbové podmínce (1) je

$$\prod_{j=1}^{n}{}' \frac{q_j - 1}{q_j - r_j} r_j = \left(\frac{q_i - 1}{q_i - r_i} r_i\right)^{-1} P ,$$

takže podmínka relativního extrému nabývá tvaru

$$U_i + \Phi P/(1 - r_i/q_i) = 0 ; \quad i = 1, 2, \ldots, n ,$$

z něhož uzavíráme

$$U_i(1 - r_i/q_i) = \text{idem} . \tag{6;3}$$

To jsou patrně podmínky žádaného maxima optimalizované rychlosti V_n.

Porovnáním levých stran pro i-tou a n-tou subraketu

$$U_i(1 - r_i/q_i) = U_n(1 - r_n/q_n) \Rightarrow r_i/q_i = 1 - (1 - r_n/q_n)\, U_n/U_i$$

dostáváme

$$r_i = (1 - \mu_i(1 - r_n/q_n))\, q_i ; \quad i = 1, 2, \ldots, n - 1, (n) , \tag{6;4}$$

kde poměr výtokových rychlostí je pro stručnost označen

$$\mu_i = U_n/U_i ; \quad i = 1, 2, \ldots, n - 1, (n) .$$

Vztahy (4) spolu s předepsanou hodnotou úhrnného užitečného parametru P (1) dovolují principiální určení jednotlivých CIOLKOVSKÉHO čísel r_i a jimi vyjádřit optimální charakteristickou rychlost V_n. Ekonomičtější postup je stanovit jediné r_n a jím vyjádřit V_n:

Snadná úprava poskytuje

$$\begin{aligned} P = \frac{M}{Z} = \prod_{i=1}^{n} p_i = \prod_{i=1}^{n} \frac{q_i - 1}{q_i/r_i - 1} = \frac{q_n - 1}{q_n/r_n - 1} \prod_{i=1}^{n} \frac{q_i - 1}{q_i/r_i - 1} \\ = \frac{q_{n-1}}{q_n/r_n - 1} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{q_i - 1}{1/(1 - \mu_i(1 - r_n/q_n)) - 1} = \\ = \frac{q_{n-1}}{q_n/r_n - 1} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{(q_i - 1)(1 - \mu_i(1 - r_n/q_n))}{\mu_i(1 - r_n/q_n)} \end{aligned} \tag{6;5}$$

a dále

$$\prod_{i=1}^{n-1} \frac{(q_i - 1)(1 - \mu_i(1 - r_n/q_n))}{\mu_i(1 - r_n/q_n)} - \frac{q_n/r_n - 1}{q_n - 1} P = 0\,,$$

takže po dělení konstantním činitelem prvého čitatele

$$\prod_{i=1}^{n-1} \frac{1 - \mu_i(1 - r_n/q_n)}{\mu_i(1 - r_n/q_n)} - \frac{q_n/r_n - 1}{\prod_{i=1}^{n} (q_i - 1)} P = 0\,. \tag{6;6}$$

Tím získáváme algebraickou rovnici n-ho stupně pro stanovení CIOLKOVSKÉHO čísla r_n poslední subrakety. Nazveme ji *rezolventou optimalizace.* Její řešeni je zřejmým těžištěm teoretické stránky celého optimalizačního procesu.

Když jsme stanovili r_n, je už vyjádření optimální charakteristické rychlosti V_n zcela bezprostřední:

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} U_i \ln r_i = U_n \ln r_n + \sum_{i=1}^{n-1} U_i \ln r_i =$$

$$= U_n \ln r_n + \sum_{i=1}^{n-1} U_i \ln (1 - \mu_i(1 - r_n/q_n))\, q_i\,, \tag{6;7}$$

kde bylo užito (4).

7. SPECIALIZACE $U_i =$ IDEM (R-OPTIMALIZACE)

Při stejných výtokových rychlostech ve všech stupních $U_i = U$ se výraz pro charakteristickou rychlost V_n (6;7) zjednodušuje na

$$V_n = U \ln \prod_{i=1}^{n} r_i = U \ln R = U \sum_{i=1}^{n} \ln (r_n q_i/q_n)\,, \tag{7;1}$$

kde R je úhrnné CIOLKOVSKÉHO číslo. V_n optimalizace je tedy současně R-optimalizací. Nutná podmínka lokálního extrému (6;3) se zjednodušuje na

$$r_i/q_i = \text{idem}: \tag{7;2}$$

na V_n-optimální (R-optimální) raketě s týmiž výtokovými rychlostmi ve všech stupních jsou CIOLKOVSKÉHO *čísla subraket v poměru strukturních parametrů stupňů.* To je zobecněním dříve získané podmínky optima (2;1).

Rezolventa optimalizace (6;6) se zjednodušuje na

$$\prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{q_n/r_n - 1} - \frac{q_n/r_n - 1}{\prod_{i=1}^{n} (q_i - 1)} P = 0\,,$$

tj.

$$\prod_{i=1}^{n}(q_i - 1) - P(q_n/r_n - 1)^n = 0$$

a zároveň dovoluje bezprostřední řešení

$$r_n = q_n(1 + \sqrt[n]{[(\prod_{i=1}^{n}(q_i - 1))/P]})^{-1} .$$

Odpovídající optimální charakteristická rychlost je podle (1)

$$V_n = U\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{q_i}{1 + P^{-1/n}(\prod_{i=1}^{n}(q_i - 1))^{1/n}}$$

$$= U \ln \frac{Q}{(1 + (1/P \,.\, \prod_{i=1}^{n}(q_i - 1))^{1/n})^n} , \qquad (7;3)$$

kde Q je úhrnný strukturní parametr $\prod_{i=1}^{n} q_i$. Úhrnné CIOLKOVSKÉHO číslo je pak dáno vztahem

$$R = \exp(V_n/U) .$$

Závěrem uvedeme ještě některé zřejmé, leckdy užitečné vztahy:

$$R = \prod_{i=1}^{n} r_i = \prod_{i=1}^{n}(r_k q_i/q_k) = Q(r_i/q_i)^n ; \quad i = 1, 2, \ldots, n . \qquad (7;4)$$

Dále

$$p_i = M_i/Z_i = M_i/M_{i+1} = (q_i - 1)/(q_i/r_i - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = M/Z = \prod_{i=1}^{n} M_i/M_{i+1} = (\prod_{i=1}^{n}(q_i - 1))/(q_i/r_i - 1)^n ,$$

a tedy

$$q_i/r_i - 1 = (q_i - 1) M_{i+1}/M_i = (Z/M \,.\, \prod_{i=1}^{n}(q_i - 1))^{1/n} , \qquad (7;5)$$

stále ovšem v podmínkách optima. Vyloučením poměru r_i/q_i z (4) (5):

$$(Q/R)^{1/n} - 1 = (q_i - 1) M_{i+1}/M_i \Rightarrow M_{i+1}/M_i = ((Q/R)^{1/n} - 1)/(q_i - 1) ,$$

$$P = M/Z = (\prod_{i=1}^{n}(q_i - 1))/((Q/R)^{1/n} - 1)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = Q/(1 + (1/P \,.\, \prod_{i=1}^{n}(q_i - 1))^{1/n})^n . \qquad (7;6)$$

Tím získáváme zobecnění poslední ze závislostí (3;4). Jeho užitím dostaneme ovšem znova (3), odkud jsme mohli rovnost (6) také ihned vyčíst.

8. SPECIALIZACE $q_i =$ IDEM (RAKETA EKVIPARAMETROVÁ)

Jestliže je uvažovaná raketa navíc ještě q-idemparametrová, je podle (7;2) v R-optimu též r-idemparametrová, a je tedy ekviparametrová. Pro tento případ plyne z poslední rovnice (7;6)

$$R = \frac{Q}{(1 + (Q^{1/n} - 1)\, P^{-1/n})^n} = \left(\frac{q}{1 + (q - 1)(Z/M)^{1/n}}\right)^n ,$$

takže

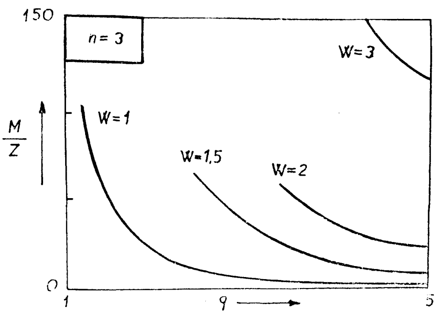
$$V_n = U \ln \left(\frac{q}{1 + (q - 1)(Z/M)^{1/n}}\right)^n . \tag{8;1}$$

Zanedbáme-li ve jmenovateli přičítaný součin vedle jednotky, získáme nerovnost

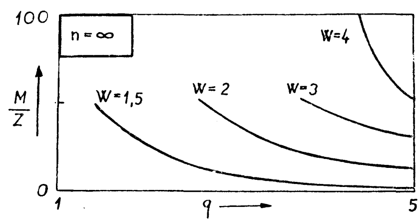
$$V_n < nU \ln q$$

skýtající odhad pro minimální počet stupňů uvažované speciální optimální rakety

$$n > V_n/(U \ln q) . \tag{8;2}$$



Obr. 3. Závislosti úhrnného užitečného parametru $P = M/Z$ třístupňové rakety na strukturních parametrech q ekviparametrové rakety v podmínkách optima. ($W = W_n/U$.)



Obr. 4. Limitní případ ($n \to \infty$) závislostí úhrnného strukturního parametru $P = M/Z$ na strukturních parametrech q ekviparametrové optimální rakety. ($W = V_n/U$.)

Z (1) plynoucí

$$(M/Z)^{1/n} = (q - 1)/[q \exp(-W/n) - 1] , \quad (W = V_n/U) \tag{8;3}$$

dává možnost grafického znázornění závislosti $(M/Z)^{1/n}$ nebo $P = M/Z$ na q při a priori předepsaném n a pro různé parametrické rychlosti posledního stupně (poslední subrakety) W_n. Pro

$$q \to \infty \quad \text{je} \quad (M/Z)^{1/n} = \exp(W/n) \Rightarrow P = \exp W$$

nezávisle na počtu stupňů n. Pro $n \to \infty$ nalezneme

$$P_{n \to \infty} = \exp\left[qW/(q-1)\right].^{*})$$

Připojujeme dva příklady takových grafů (obr. 3 a 4).

9. NUMERICKÝ PŘÍKLAD. DOSAŽENÍ DRUHÉ KOSMICKÉ RYCHLOSTI

Pro numerickou ilustraci předchozích úvah se ptejme, za jakých podmínek lze R-optimální q-idemparametrovou raketou dosáhnout druhé kosmické rychlosti. Předpokládáme $U = 3000\,\mathrm{ms}^{-1}$. Poněvadž $R = \exp(V_n/U)$, kde $V_n = 11\,200\,\mathrm{ms}^{-1}$, vypočteme $R = 42$. Zvolme $q = 5$; podle (8;2) je $n > 2{,}3$ a nelze tedy vyjít s méně než se třemi stupni. Z důvodů dříve uvedených†) vezmeme $n = 5$; podle (8;3) $M/Z = 214$, a tedy pro užitečné zatížení $Z = 1$ t je $M \approx 214$ t.
Z (7;5) nejprve

$$q/R^{1/5} - 1 = (q-1)\,M_{i+1}/M_i$$

a pro zvolená data

$$M_1 \approx 214\,\mathrm{t}, \quad M_2 \approx 73\,\mathrm{t}, \quad M_3 \approx 25\,\mathrm{t}, \quad M_4 \approx 8{,}5\,\mathrm{t}, \quad M_5 \approx 3\,\mathrm{t}.$$

K tomu podle vztahu $N_i = M_i - M_{i+1}$

$$N_1 \approx 141\,\mathrm{t}, \quad N_2 \approx 48\,\mathrm{t}, \quad N_3 \approx 16{,}5\,\mathrm{t}, \quad N_4 = 5{,}5\,\mathrm{t}, \quad N_5 \approx 2\,\mathrm{t}.$$

To jsou nepříznivé hodnoty. Zlepší se zvýšením U nebo zvýšením q:

Předpokládejme $U = 3700\,\mathrm{ms}^{-1}$. R klesne na 20. Podle (8;3) vypočteme tabulku hodnot M/Z pro různá q, která vzhledem k přijaté hodnotě U vezmeme raději pod dnešními hodnotami raket s klasickými reaktivními motory (Tabulka I). Z této tabulky pro $n = 5$, $q = 5$ plyne $M \approx 65$ t, tedy už asi čtvrtina předchozí hodnoty.

Tabulka I

n \ q	3	4	5
3	7200	260	110
4	530	130	75
5	225	100	65

*) Srovnej dřívější článek: Pokroky MFA *9* (1964), 280, první vztah.

†) Srv. Pokroky MFA *9* (1964), 271.

Položíme-li alespoň orientačně $U = 5600 \text{ ms}^{-1}$, klesne R dokonce na 7,4 s odpovídající tabulkou II poměrů M/Z. Z ní pro $n = 5$, $q = 5$ odečteme $M \approx 14$ t, tedy zase už jen čtvrtinu předchozí hodnoty.

Tabulka ukazuje citlivost poměru M/Z na n, q; plyne z ní např., že je vhodnější vzít $n = 3$ s $q = 5$ než $n = 5$ s $q = 4$. I pro $n = 2$, $q = 5$ je $M \approx 23$ t; naproti tomu s $q = 2$ není úloha řešitelná.

Tabulka II

n \ q	3	4	5
2	370	40	23
3	50	23	17
4	35	20	15
5	30	18	14

10. NUMERICKÝ PŘÍKLAD. DOSAŽENÍ PRVÉ KOSMICKÉ RYCHLOSTI V REÁLNÝCH PODMÍNKÁCH

Užijeme ještě odvozených vzorců pro odhad jednoho staršího programu.

K vynesení třetí sovětské umělé družice Země (15. 5. 1958, váha 1327 kg, z toho přístroje 968 kg; klademe $Z \approx 1,4$ t) na dráhu musíme reálně předpokládat konečnou charakteristickou rychlost 9700 ms^{-1}. Předpokládáme-li, že bylo použito trojstupňové q-idemparametrové V_n-optimální rakety s $q = 8$ a se společnou výtokovou rychlostí $U = 2400 \text{ ms}^{-1}$ ve všech stupních, vypočteme z (8;3)

$$P = \{(q - 1)/[q \exp(-V_3/(3U)) - 1]\}^3 = 260 \Rightarrow M = PZ = 365 \text{ t}.$$

Naproti tomu s $U = 3000 \text{ ms}^{-1}$ a s ostatními daty jako výše plyne $P = 68 \Rightarrow$ $\Rightarrow M = 95$ t, tj. přibližně čtvrtina předchozí hodnoty.

11. V_n-OPTIMALIZACE p-IDEMPARAMETROVÉ RAKETY (U_i = idem)

Pro charakteristickou vychlost p-idemparametrové rakety s touž výtokovou rychlostí U_i = idem ve všech stupních platí (s užitím parametrů druhého druhu — latinských)

$$V_n = U[n \ln p + \ln \prod_{i=1}^{n} q_i/(p - 1 + q_i)].$$

Nalezení V_n-optimální (ve sledovaném speciálním případě též R-optimální) p-idemparametrové rakety vyžaduje tedy nalezení extrému součinu

$$\prod_{i=1}^{n} q_i/(p - 1 + q_i) \, .$$

Vzhledem k nezávislosti činitelů očekáváme jeho maximum při rovnosti činitelů, tj. pro

$$q_i/(p - 1 - q_i) = \text{idem} \Rightarrow q_i = \text{idem} :$$

R-optimální p-idemparametrová raketa je raketou ekviparametrovou. Tento výsledek jsme ovšem mohli na základě dřívějšího výpočtu (odst. 5 a 8) očekávat.

12. V_n-OPTIMÁLNOST GEOMETRICKY STANDARDIZOVANÉ RAKETY (U_i = idem)

Na p-idemparametrové raketě platí*)

$$N_i = p^{n-i}(p - 1) Z = p^{-i}(p - 1) M_1$$

a v podmínkách optima, tj. na ekviparametrové, tedy i q-idemparametrové raketě, je

$$S_i = N_i/q = M_1(p - 1)/(p^i q) \Rightarrow S_1 = M_1(p - 1)/pq$$

čili

$$S_i = p^{1-i} S_1 \, . \tag{12;1}$$

K tomu

$$E_i = N_i - S_i = M_1(p - 1)(q - 1)/(p^i q) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow E_1 = M_1(p - 1)(q - 1)/(pq)$$

a

$$E_i = p^{1-i} E_1 \, .$$

Získaná vyjádření S_i, E_i; $i = 1, 2, \ldots, n$ ukazují, že optimum p-idemparametrové rakety nastává při tomtéž geometrickém uspořádání energetických a strukturních hmot ve všech stupních: *R-optimální (V_n-optimální) p-idemparametrová raketa je geometricky standardizována.*

13. V_n-OPTIMALIZACE. ROZDĚLENÍ HMOT

Pro charakteristickou rychlost q-idemparametrové rakety se stejnou výtokovou rychlostí ve všech stupních platí (zase s užitím parametrů druhého druhu)

$$V_n = U[n \ln q + \ln \prod_{i=1}^{n} p_i/(q - 1 + p_i)] \, .$$

---

*) Srv. Pokroky MFA 9 (1964), 286, konec druhého sloupce tabulky V.

Nalezení V_n-optimální q-idemparametrové rakety (v uvažovaném speciálním případě U_i = idem jde současně o R-optimální raketu) je tak převedeno na určení podmínek extrému funkce

$$F = \prod_{i=1}^{n} p_i/(q - 1 + p_i) = \prod_{i=1}^{n} M_i/[(q - 1) M_{i+1} + M_i] , \qquad (13;1)$$

kde jsme užili definici užitečného parametru i-té subrakety $p_i = M_i/Z_i = M_i/M_{i+1}$. V tomto pojetí je

$$F \equiv F(M_1, M_2, \ldots, M_n) .$$

Pohodlné vyjádření nutných podmínek lokálního extrému podávají rovnice

$$\partial (\ln F)/\partial M_i = 0 \, ; \quad i = 1, 2, \ldots, n \, ,$$

tj.

$$-(q - 1)/[(q - 1) M_i + M_{i-1}] + (q - 1)/[(q - 1) M_{i+1} + M_i] \, . \, M_{i+1}/M_i = 0$$

a po odstranění zlomků

$$M_i^2 = M_{i+1} M_{i-1} \, ; \quad i = 1, 2, \ldots, n \, ; \quad M_{n+1} = Z \, . \qquad (13;2)$$

Zřejmě jde o podmínky V_n- (zde i R-) optima.

K R-optimální q-idemparametrové raketě dospějeme ovšem i postupem vyloženým již dříve v odstavci 11:

Extrém součinu (1) nastává při rovnosti jeho činitelů, tj. pro

$$p_i/(q - 1 + p_i) = \text{idem} \Rightarrow p_i = \text{idem} \, .$$

To znamená: *V_n-optimální U = idem (R-optimální) q-idemparametrová raketa je zároveň p-idemparametrovou (a tím i ekviparametrovou) raketou, která je geometricky standardizována.*

Rovnice (2) jsou přímým vyjádřením geometrického uspořádání hmot rakety. O p = idem, q = idem a ovšem i r = idemparametrových R-optimálních raketách tedy platí věta: *R-optimální* (U = idem) *idemparametrová raketa je ekviparametrová raketa s geometrickým rozdělením hmot.*

Literatura bude souborně uvedena v příštím článku: Hmotová optimalizace složených raket.