

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Paul R. Halmos

Jak mluvit o matematice

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 20 (1975), No. 6, 308--314

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/137915>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1975

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Jak mluvit o matematice

*Paul R. Halmos, Bloomington, USA**)

Vysvětlení

Tento článek chce upozornit mladého matematika, co by měl (anebo spíše co by neměl) alespoň pro začátek dělat, má-li mít veřejnou přednášku ze svého oboru. „Veřejnou přednáškou“ rozumím něco jako kolokvium (s více či méně celým matematickým oddělením velké univerzity) nebo vyžádanou přednášku (k více či méně všem členům přítomným na schůzi Americké matematické společnosti); nemyslím tím ani vysokoškolskou přednášku (k těžkopádným začátečníkům) ani seminární referát (k zasvěceným odborníkům).

Byl to nápad některých představitelů Americké matematické společnosti, že by takový článek, jak přednášet matematiku, mohl být užitečný. Je totiž stále více a více nářků nad tzv. vyžádanými přednáškami („jsou nesrozumitelné, a tedy bezcenné“) a bylo by tedy záhodno seznámit s nimi řečníka, dříve než k nim zavdá další podnět.

Genius si tvoří vlastní pravidla, ale článek „jak na to“ je psán většinou obyčejným smrtelníkem pro dobro jiného obyčejného smrtelníka. Harpo Marx**), jeden z největších harfeníků všech dob, se nikdy neučil hrát; všechno, co dělal, bylo vlastně špatné podle vžitých zvyklostí. Snad všechno, co mohu říci, má svůj protipříklad v praxi nějakého rozeného génia. Autoři podobných článků to ovšem vědí, ale musejí dělat, alespoň v prvním přiblížení, jako by to nevěděli, jinak by asi nikdy nic takového nemohlo vzniknout.

Proč přednášet?

Jaký je smysl veřejné přednášky? Odpověď: získat a informovat. Milujeme svůj obor a byli bychom rádi, kdyby jej milovali i ostatní; a jsme přesvědčeni, že jeho vnitřní přednosti jsou takové, že je jimi přitahován každý, kdo je poznal. Odtud lepší odpověď: smyslem veřejné přednášky je informovat, ale informovat tak, aby mohl posluchač informace strávit. Sebepřitažlivější přednáška bez obsahu je bezcenná, to jistě, ale kupa nestravitelných informací není o nic lepší.

Problém potom přejde v jiný: jak nejlépe popsat svůj předmět (nebo tu jeho část,

*) Reprinted from:

NOTICES of the American Mathematical Society, Volume 21, Number 3, April 1974, pages 155–158.

Copyright © 1974 by the American Mathematical Society.

**) ARTHUR MARX (* New York 1893, † Hollywood 1964) jeden z Bratří (a také bratří) Marxů, hudebních komiků amerického vaudevillu a filmu. Přezdívka Harpo je vzata z anglického the harp, tj. harfa. Pozn. př.

kteřá autora nejvíc zaujala) matematikům, z nichž se většina zabývá něčím jiným. Je to něco jiného než přednášet studentům, kteří ať chtějí nebo ne, musejí předmět zvládnout do potřebných podrobností, a je to něco jiného než sdělit nový objev kolegům odborníkům, kteří o tom již přemýšleli a diví se, co byste o tom asi mohli vědět, co oni nevědí.

Jednoduchost

Méně je více, řekl slavný architekt MIES VAN DER ROHE*), a kdyby se všichni přednášející drželi této moudrosti, byli by i všichni posluchači moudřejší a šťastnější.

Znechutila se vám někdy přednáška, protože byla příliš elementární? Víím, že jsou lidé, kteří by odpověděli ano, ale není jich mnoho. Pokaždé když jsem se na to zeptal, dostal jsem odpověď ne, a potom, co uslyšel svou vlastní odpověď, vyhlížel tázaný poněkud překvapeně. Veřejná přednáška má být jednoduchá a elementární; neměla by být složitá a technická. Jestliže mi věříte a jste schopni také tak jednat (být jednoduchý), můžete už tady přestat číst; protože co mi ještě zbývá říci, jsou ve srovnání s tím už jen podružnosti.

Začít veřejnou přednášku pro 500 lidí slovy: „Uvažujme svazek zárodků holomorfních funkcí ...“ (to jsem už slyšel na vlastní uši) lidi zatvrdí a zneprátelí. Zmíníte-li se o Künethově formulí, nemůže vadit, poznamenáte-li, že alespoň co se týče Bettiových čísel, věc se má tak, jako když násobíte polynomy. Zmíníte-li se o funktorech, řekněte, že jejich typickým příkladem je tvoření duálních vektorových prostorů a adjungovaných lineárních transformací.

Být jednoduchý znamená být konkrétní. Posluchači jsou mnohem více schopni přijmout nevyřčené (i když naznačené) zobecnění, než na místě luštit přesně formulovanou abstrakci a hledat nazpět případy, které ji motivovaly. Pozor: být konkrétní neznamená zapomenout pro stromy na les. V mnoha oblastech je zobecnění jednodušší a pronikavější než jeho speciální předchůdce. (Příklady: Artinovo řešení 17. Hilbertova problému definitních forem pomocí formálně reálných těles; Gelfandův důkaz Wienerovy věty o absolutně konvergentních Fourierových řadách pomocí Banachových algeber.) V takových případech existuje docela konkrétní případ, jednodušší než zárodečná myšlenka, který ukáže zobecnění daleko prostěji; zasvěcený přednášející vyloží složitý zvláštní případ i jeho zobecnění rozbořem jednoduchého spřízněného případu.

Někteří přednášející obhajují složitost a techničnost a tvrdí, že je to právě jejich předmětu vlastní a že se s tím nedá nic dělat. Jsem skeptický a jsem dokonce ochoten zajít tak daleko a tvrdit, že se takovým stanoviskem vyznačuje neúplné pochopení věci a jejího postavení v matematice. Každý předmět a dokonce každá jeho nepatrná část, jen je-li identifikovatelná a natolik významná, aby vydala na hodinovou přednášku, má své jednoduché stránky a právě ony, kořeny věci a souvislosti s povšečněji známými a staršími částmi matematiky jsou tím, co je třeba vysvětlit nespecializovaným posluchačům.

) MIES VAN DER ROHE (1886 Cáchy, † 1969), americký architekt německého původu. Emigroval v r. 1933 do Spojených států a vytvořil především v Chicagu řadu budov charakteristických velkými zasklenými plochami na ocelových skeletech. Pozn. př.

Mnozí přednášející, především však ti, kteří stojí u paty akademického žebříčku, dychtiví stoupat po něm co nejrychleji, jsou puzeni představou říci něco neotřepe nového, aby zapůsobili na své starší kolegy svou originalitou a hloubkostí. K tomu dvě poznámky: (1) nejlépe se toho dosáhne právě jednoduchostí a (2) vlastně by se to dělat ani nemělo. Zabývat se v přednášce posledními autorovými výzkumy může být vhodné, ale také velice nevhodné. Úsudek posluchačů o úrovni přednášky nemusí záležet na její originalitě; výklad posledního autora objevu může zhatit jeho vyhlídky na dobrý dojem.

Často citovaný kompromis mezi snahou po srozumitelnosti a po zdání hlubokomyslnosti: první čtvrt přednášky určete svému středoškolskému učiteli chemie, druhou čerstvě vystudovanému vysokoškolákovi, třetí vzdělanému matematikovi, jehož zájmy jsou jiné než vaše, a poslední specialistům. Splnil jsem svou povinnost, dal jsem vám návod, ale musím říci, že ne všichni s ním souhlasí. Dobrá veřejná přednáška by měla být uměleckým dílem. Měl by to být architektonický celek, jehož části se navzájem posilují, a by vydaly co největší množství informací – ne volební řeč, která slibuje každému něco a nakonec neuspokojí nikoho.

Udělejte ji jednoduchou a nemůžete chybit.

Podrobnosti

Někteří přednášející se snaží dosáhnout jednoduchosti přílišnou výslovností a podrobností; to je nedorozumění.

Výslovnost se týká výpočtů. Jestliže se nějaký důkaz neobejde bez vynásobení dvou hrozných výrazů, řekněte to a zůstaňte při tom; logická přehlednost ještě neudělá z výpočtů věc zajímavou ani poučnou. Vypráví se, že Landau nikdy nevy pustil ze svých přednášek ani jediné epsilon a přesto byly jeho přednášky v každém ohledu podnětné – to je však výjimka a ne pravidlo. Jestliže se výjimečně domníváte, že by krátký výpočet byl nepostradatelný a poučný, proveďte jej, ale pro normálního smrtelníka vždy platí: nepočítejte na veřejnosti. Je to asi čestné a poctivé, ale vůbec to nezjednoduší přednášku.

Podrobnost se týká definic. Někteří přednášející se domnívají, že si získají neoborníky, řeknou-li jim vše. („Než se dostanu k větě, kterou jsem dokázal minulý týden, potřebuji k tomu čtrnáct definic a jedenáct vět dokázaných mými předchůdci. Budu-li postupovat rychle, vyřídím těch pětadvacet skvostů v pětadvaceti minutách a ve zbývajícím čase stihnu zformulovat a dokázat svou vlastní věčičku.“) To je také poctivé a přednáška se tím v jistém smyslu uzavře do sebe – ale nelze to strávit a účinek je hrozný. Kdyby vám někdo vysvětlil význam každého znaku na stránce čínské knihy, mohli byste se pak v další půlhodině těšit básní napsanou na této stránce?

Důkazy

Někteří přednášející si myslí, že jednoduchost znamená nic nedokazovat. To není zcela správné. Je sice pravda, že smyslem veřejné přednášky není dokazovat fakta, ale nedokazovat vůbec nic znamená oloupit výklad o podstatné rysy, které jsou pro matematika

přitažlivé a poučné. Doporučuji každému, aby něco dokázal – nějakou maličkost, užitečnou a elegantní lemma, něco pro ten obor typického.

Je-li důkaz krátký, vůbec nevádí, že mu třeba nikdo neporozumí. Není bezcenné, jestliže se čtenář doví, že se Bernoulliho čísla vyskytují v teorii stabilních homotopických grup, i když má jen matný pojem o tom, co to jsou Bernoulliho čísla nebo homotopické grupy.

Ještě něco lepšího než důkaz na ukázkou je myšlenka důkazu, intuice, která jej původně vnukla, důvod, proč je tvrzení pravdivé. Někdy je obtížné nalézt správné slovo a popsat ústřední myšlenku důkazu, ale stojí to za to; svedete-li to, našli jste dokonalý způsob, jak vykládat matematiku.

Problémy

Podobně se některý přednášející z falešné představy jednoduchosti přidrží jen toho, co je dobře známé a jisté; vřele doporučuji, aby každá přednáška dosáhla až k hraničním poznáním a byla v ní alespoň zmínka o něčem neznámém a vzrušujícím. Nemusí to být a dokonce by to ani neměla být nejchoulostivější a nejnovější technická záležitost. Nezdráhejte se zopakovat něco staršího. Uvědomte si, kolik toho asi vaši posluchači slyšeli z vašeho oboru od doby, kdy jej před dávnými časy poslouchali na univerzitě. Něčemu se naučí, uslyší-li dnes, že neřešené problémy, o kterých slyšeli před léty, jsou dosud nerozřešeny. Rozbor nerozřešených problémů je vůbec nesmírně cenný jak pro upoutání pozornosti, tak i pro informovanost – řekl bych, že je dokonce neodmyslitelný. Žádný obor není dobře popsán, nejsou-li popsány jeho hranice; znalost hranic je podstatná pro porozumění, kde je obor dnes, právě tak pro rozšíření našich znalostí nazítří. Veřejná přednáška má být jednoduchá, ale ne za cenu, že bude prázdná nebo (což není tak zlé, ale zase dost zlé, protože nepoctivé) že bude neúplná.

Organizace

S organizací přednášky je to jako s lidskou kostrou; nic by bez ní nedrželo dohromady, ale není dobře ji ukazovat. Organizujte svou přednášku, rozvrhněte si ji, pečlivě ji připravte, ale potom ji proneste impromptu, spatra.

Abyste si ji mohli dobře připravit, musíte znát především svůj předmět a potom posluchače. Je mnohem důležitější stanovit správnou úroveň pro přednášku než pro napsání knihy. („Stanovit úroveň“ není eufemismus pro „snižte ji co nejvíc“.) Neurážejte posluchače, ale buďte reální. Trochu nad terč, jen docela mírně nemůže škodit, ale příliš vysoko je daleko horší než trochu pod. Knihu může čtenář na nějaký čas odložit a vrátit se k ní, až poněkud zmoudří; ale otrávený a znechucený posluchač se v duchu odvrátí a již se nikdy za přednášky nevrátí zpět.

Správné úrovně přednášky se má ovšem dosáhnout organizací, ale prvním a důležitějším cílem je organizace obsahu. K tomu mám dvě poznámky (dodatkem k „dokažte něco“ a „snažte se o něco“, jak jsem již řekl): (1) raději než úporně sledovat jedno ústřed-

ní téma, rozeberte tři nebo čtyři spřízněná témata a sledujte souvislosti mezi nimi a (2) rozložte každé téma na čtyři nebo pět subtémat, významných, volně slučitelných nebo rozpojitelých celků, takových, aby se vypuštěním žádného z nich neporušila souvislost.

Pro přednes spatra jsou dva důvody: předně zní dobře a potom umožňuje vzájemný kontakt mezi mluvčím a posluchači. Tváře v publiku mohou prozradit mnoho a v mnohém být prospěšné: mohou naznačovat, že je třeba zpomalit, zrychlit, něco vysvětlit, něco vynechat.

Příprava

Připravit přednášku znamená připravit si náměty, které má obsáhnout, jejich pořadí a souvislosti mezi nimi, jež považujete za hodné zmínky; neznamená to sepsat ji slovo od slova s úmyslem naučit se jí nazpaměť (ani, což je daleko horší, přečíst ji nahlas z papíru). Přesto však: sepsat všechno není tak špatná myšlenka. „Všechno“ znamená doslova všechno s tím včetně, co má být napsáno na tabuli (s jasnou představou, kdy to napsat a na jak dlouho nebo zda to hned smazat). Můžete si pak projít celou přednášku nahlas u tabule a odhadnout čas. (Pozor: trvá-li čtení na zkoušku hodinu, bude skutečný čas jedenapůl hodiny.)

Krátkost

Většina přednášek se označuje jako „hodinová přednáška“, ale podle obecně přijatého zvyku se tím většinou rozumí, že má trvat pouze 50 minut. Nikdo vám nebude jistě vyčítat, že sedí ještě po 45 minutách, ale většina posluchačů znervózní po 55 a velká většina bude na vás nepřátelsky a znechuceně zírat po 65 minutách.

Přetáhnout přednášku, nedodržet určený čas je hrubost. Vaše výroky ani vaše důkazy nejsou tím hlavním v životě jiných lidí; těch uspěchaných, bezdechých posledních pět vět lze oželet. Promarníte-li čas, řekněte to a vyjádřete své politování, musíte-li, ale skončete; je to tak lépe než posluchače naštvat.

Technika

Veřejnou přednášku obvykle zahajuje předseda schůze. Společenské pravidlo: dejte mu možnost. Před přednáškou si sedněte někde stranou nebo dopředu mezi posluchače; nepostávejte u tabule ani nepobíhejte kolem něho, nezervóznějte ho.

Dobrý trik, jak překonat počáteční strach: naučte se z paměti jednu větu, tu první. Potom už nabude vrch vaše příprava a znalost věci.

Vší mocí se vystříhejte obtížných zlovyků. Definice: obtížným zlovykem je všechno, co se opakuje víc než dvakrát. Zlovyk může být slovní („jinými slovy“ nebo zlovyky ve výslovnosti, které nic neznamenají); může být zrakový (umné zahrádky kolem textu na tabuli) nebo dynamický (bubnování prsty na hraně stolu).

Dostanete-li se do mechanických nesnází, zachyťte předsedův pohled a řekněte jen jemu „nemám křídu“ nebo „nemohl bych dostat houbu?“. Neúřadujte s nesnázemi a neustále se neomlouvejte („kam jsem to jen proboha mohl dát – promiňte – asi se budu musít poohlédnout jinde – dobře, uvidíme, snad se bez toho obejdu – spíše ...“.) Rozhodněte se a jedněte, avšak mlčky. Poradte si sami a nerozptylujte posluchače hloupostmi.

Ticho je mocný prostředek i za jiných okolností; nejlepší řečníci dovedou také nejlépe mlčet. Dlouhá pomlka (pět, nejvýš deset vteřin) po významné a břitké definici nebo větě vyburcuje posluchače („to je významné“) a poskytne jim čas vstřebat, co právě slyšeli. Nepřehánějte to, ale třikrát nebo čtyřikrát za hodinu po třech nebo čtyřech důležitých bodech; nakonec přijdete na to, že neřici nic je nejlepší způsob, jak něco vysvětlit.

Mluvte pomalu a mluvte zřetelně, pište jasně a mluvte, jak právě píšete; pište pomalu a pište málo. Inteligentně zvolené zkratky, šipky pro implikace a napovídající slova, žádná nesmrtelná próza – to uvítá každé předsednictvo; jejich smyslem je pomoci posluchačům sledovat výklad, dát jim podívanou, právě tak jako něco na poslech. (Příklad: nepište „poloprostý se definuje takto:“; napište „poloprostý“.) Nikdy nevítejte posluchače předem pečlivě připravenou tabulí (nebo projekčními lístky) přečpanou vzorci, definicemi a větami. (Výjimka pro obrázky – jestliže by vám jeden nebo dva obrázky pomohly při výkladu, ale trvalo by dlouho, než byste je při výkladu nakreslili, alespoň tak pečlivě, jak zasluhují, nikdo vám nebude zazlívát, nakreslíte-li si je předem.) Posluchače potěší, uvidí-li, jak se jim výklad rozvíjí před očima – vývoj je součástí vaší přednášky nebo by jí alespoň měl být.

Pružnost

Protože nelze přesně odhadnout, jak dlouho bude přednáška trvat (dost jste si to nevyzkoušeli, posluchači se za přednášky ptají, přednáškový sál je zamluven pro jinou skupinu od 5⁰⁰ přesně, nebo právě spějete do zmatku a dá vám práci dostat se z toho se zdravou kůží), měla by být přednáška pružná. Musíte být hotovi vypustit (nebo přidat!) látku a musíte být hotovi udělat to pod nátlakem, veřejně, spatra, aniž byste co řekli a aniž by to na vás bylo patrné. Je pravděpodobně mnoho způsobů, jak připravit tvárnou přednášku; zmíním se o dvou, které se mi osvědčily.

Prvním jsou úlohy. Připravte si dva nebo tři problémy, jejichž podrobný rozbor by docela dobře mohl přijít do přednášky, a na vhodném místě je „uložte“ posluchačům jako úlohy. Je to spojeno s malým rizikem, že ztratíte pro zbytek hodiny pozornost některých soutěživých členů skupiny. Ale získáte něco, čím vybraně vyplnit čas, jestliže (jakkoliv je to nepravděpodobné) skončíte příliš brzy a současně získáte něco, co by jinak přišlo nazmar, kdybyste nediskutovali řešení. (Úlohy v tomto smyslu mohou mít i jiný postranní účel, dají totiž posluchačům náměty k zdvořilostním otázkám.)

O druhém způsobu jsem se již zmínil, ale myslím si, že stojí za to, abych jej znovu připomněl: jsou to volné celky. Moje poznámky k přednášce tvoří asi 20 telegraficky napsaných paragrafů. Podrobný výklad každého z nich může trvat něco od 2 do 4 minut a alespoň polovinu z nich (posledních 10) lze vypustit. Ty často obsahují látku drahou

mému srdci: ten obratný důkaz, to duchaplné zobecnění, tu vzdorující otázku – ale nikdo (vyjma mne) by je nepostrádal, kdybych o nich pomlčel. S vědomím, že je mám, propluji první polovinou bez obav: jsem si jist, že mi nedojde řeč a že bude řečeno vše, co musím říci. V druhé polovině nebo spíš v poslední třetině s jedním okem na hodinkách se beze slova rozhodnu, co hodit přes palubu.

Nevýhodou tohoto způsobu je, že zakončení může dopadnout příliš stroze, jako by uřal. Abyste se tomu vyhnuli, připravte si závěr a určitě jej nevynechte. Závěrem může být shrnutí celé přednášky ve třech větách nebo to může být výčet nejzávažnějších neřešených problémů. Udělejte, jak myslíte, ale tím skončete.

Společenské pravidlo: když skončíte, zůstaňte sedět. Doslova zůstaňte sedět. Netěkejte bezradně, ani se neptejte, zda má někdo nějaký dotaz, to je věc předsedy.

Krátká sdělení

Krátká sdělení se hůře připravují a přednášejí než obsírná. Přednášející má méně času položit základy a posluchači mají méně času je pochopit; přednášející je v časové tísní nucen postupovat rychle a posluchači jsou nuceni rychle chápat.

Podle mých zkušeností může dvacetiminutová přednáška ještě být jak požitkem, tak poučením, je jenom třeba připravit si desetiminutovou řeč a pronést ji zvolna. Nejobtížnější je příprava desetiminutového sdělení, návod zůstává stejný (jednoduchost, organizace, krátkost), ale tentokrát není kdy na omyly. Soustředte se jen na jednu myšlenku a přitom na její nejjednodušší, netriviální případ, přednášejte a hospodařte s časem pečlivě a za žádných okolností nedopusťte, aby se z desetiminutového sdělení stala čtyřicetipětiminutová nevyžádaná přednáška. Stalo se to, ale výsledek nebyl ani přitažlivý, ani poučný.

Někteří odborníci jsou pro uvolnění pravidel při desetiminutových sděleních: klidně se ponořte hned doprostřed věci a klidně užívejte připravených projekčních lístků. Jiní vědí, jak je omezena rychlost a chápavost lidské mysli v technických otázkách, a nesohlasí s tím.

Závěr

Moje doporučení lze shrnout takto: udělejte ji jednoduchou, organizovanou a krátkou. Udělejte svou řeč krátkou (speciální a konkrétní); zcela jistě něco dokazujte a o něco usilujte; připravte si ji do nejmenších podrobností; organizujte obsah a stanovte správně úroveň posluchačů; udržte ji krátkou, a aby se vám to podařilo, připravte si ji tvárnou.

Uvědomte si, že mluvíte s úmyslem získat posluchače pro svůj obor a informovat je o něm; a uvědomte si, že méně je více.

Přeložil Přemysl Vihan