David Preiss

Nederivovatelné funkce

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 28 (1983), No. 3, 148--150,151--154

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137905

Nederivovatelné funkce

David Preiss, Praha

V tomto článku bych rád uvedl některé postřehy o vývoji studia spojitých funkcí nemajících nikde derivaci. Nečiním si žádné nároky na úplnost, proto je též seznam literatury velmi stručný a zahrnuje prakticky jen vybrané ukázky prací, které mají velmi úzký vztah k problémům, jichž si všímám.

Z hlediska studia derivací nederivovatelných funkcí (i když to zní poněkud nejasně, je to takřka přesná formulace problému, kterým se zde hodlám zabývat) lze vývoj rozdělit do těchto čtyř období:

1. Existují spojité funkce, které nemají derivaci na husté množině

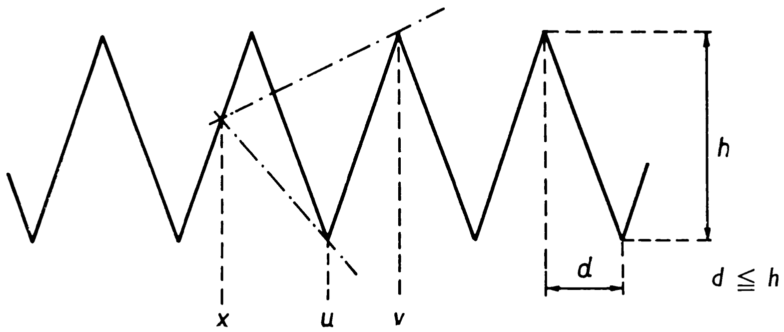
První příklad takové funkce pochází od B. Bolzana. Jeho práce však byla vydána až v době, kdy už byly známy mnohem „divočejší" příklady; nemohla tedy působit na ty matematiky, kteří si potřebovali na existenci takové funkce zvyknout. První příklad, který byl matematický svět donucen uznat, pochází od B. Riemanna; na něj pak navazovaly konstrukce všude nederivovatelných funkcí, které podle mého názoru lze považovat za druhé období vývoje problému.

2. Existují spojité funkce, které nemají derivaci v žádném bodě

Zdá se, že v předchozím období matematici neviděli prakticky žádný rozdíl mez funkcemi, které nemají derivaci na husté množině, a těmi, které nemají derivaci nikde Ve skutečnosti už Bolzanova funkce nemá nikde derivaci, to však Bolzano nedokazuje (a asi ani dokázat nemohl). Naproti tomu Riemannova funkce v některých bodech derivaci má, ačkoliv někteří autoři tvrdí, že Riemann ji uváděl jako příklad funkce, která nemá nikde derivaci. Za první příklad spojité, všude nederivovatelné funkce se proto považuje funkce Weierstrassova. V současné době máme k dispozici řadu takových příkladů pocházejících od matematiků zvučných i méně zvučných jmen. Vyvrcholením tohoto období je příklad sestrojený A. S. Besicovitchem — spojitá funkce, která nemá v žádném bodě ani jednostranou derivaci (konečnou ani nekonečnou). Jak uvidíme dále, je mezi Weierstrassovou a Besicovitchovou funkcí podstatný rozdíl; ten byl i jednou z příčin vzniku „čtvrtého období studia nederivovatelných funkcí".

Lze si vůbec funkci nemající nikde derivaci představit? Velmi lehce, skoro už to je taková „pila" (viz obr. 1).

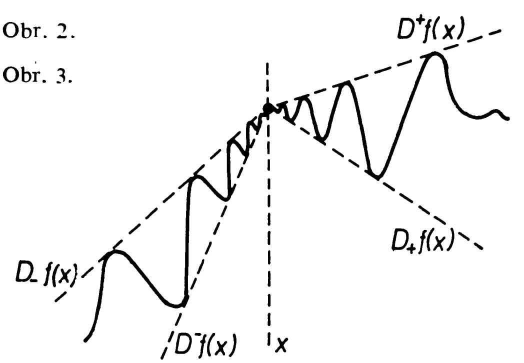
Obr. 1.



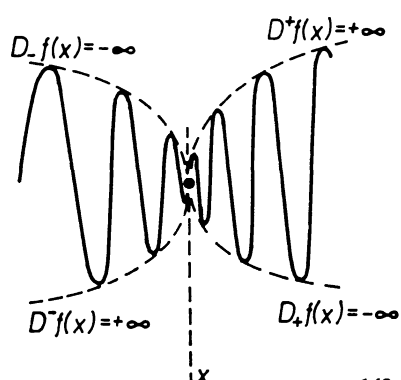
Na této funkci není podstatné, že v některých bodech nemá derivaci (rohy můžeme klidně zakulatit — např. funkce $a \cos (bx)$, $ab \geqq 1$ je také takovouto „pilou"), ale to, že ke každému bodu x můžeme najít body u, v, které jsou od x vzdáleny řádově o d a pro které je rozdíl směrnic úseček $\overline{(u,f(u))\,(x,f(x))}$ a $\overline{(v,f(v))\,(x,f(x))}$ velký (odražený od nuly). Dále je podstatné, že tato vlastnost zůstane zachována, i když „pilu" málo zdeformujeme. Z toho je vidět, že malou deformací „pily" (např. přičtením další „pily" s mnohem menším h) lze získat funkci, která bude ještě lépe aproximovat nederivovatelnou funkci — „špatné" body u, v můžeme najít jednak ve vzdálenosti d_1 (dané první „pilou"), jednak ve vzdálenosti d_2 (dané druhou „pilou"). Dalšími deformacemi dostáváme další aproximace, jejichž (stejnojměrnou) limitou bude spojitá funkce nemající nikde konečnou derivaci (dokonce ani jednostranou). Proč se najednou rozlišila konečnost a nekonečnost derivace? Prostě proto, že o naší funkci víme, že má od nuly odražené rozdíly příslušných směrnic, což vylučuje existenci konečné derivace, nikoliv však existenci derivace nekonečné. Prohlédneme-li si však náš argument podrobněji, zjistíme, že konstrukce funkce nemající nikde ani konečnou ani nekonečnou derivaci je prakticky stejná; pokusíme-li se však o funkci, která nemá ani nekonečné jednostrané derivace, potkáme se s naprostým nezdarem. Proč je tomu tak, to se pokusíme objasnit později.

Do tohoto období je asi vhodné zařadit řadu prací, vyšetřujících Diniho derivace nederivovatelných funkcí. (Diniho derivace se někdy v naší literatuře nazývají derivovaná čísla). Pomocí Diniho derivací lze totiž klasifikovat typ nederivovatelnosti funkce v daném bodě. To je patrné z obr. 2 a z obr. 3, ze kterých je též vidět jejich definici.

Obr. 2.



Obr. 3.



Obr. 3 zachycuje případ, který bude v našich dalších úvahách obzvlášť důležitý (obě horní Diniho derivace jsou $+\infty$, obě dolní jsou $-\infty$); nastane-li, říkáme, že funkce f má v bodě x uzel.

Podrobnější vyšetřování Diniho derivací nederivovatelných funkcí však spadá až do třetího, souvislost jejich vlastností s chováním nederivovatelných funkcí pak do čtvrtého období studia funkcí bez derivace.

3. Typické spojité funkce nemají nikde derivaci

a) Typičnost ve smyslu kategorií

Pro naše účely se zdá být nejvýhodnější tato definice „typičnosti ve smyslu kategorií": Je-li V nějaká vlastnost spojitých funkcí na uzavřeném intervalu $\langle 0, 1\rangle$, řekneme, že typická funkce má vlastnost V, jestliže v následující hře má hráč A vítěznou strategii.

Hru hrají dva hráči A a B. V prvním kroku volí hráč B otevřenou neprázdnou množinu $G_1 \subset C\langle 0, 1\rangle$ (v prostoru $C\langle 0, 1\rangle$ všech spojitých funkcí na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ uvažujeme metriku $d(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)|; x \in \langle 0, 1\rangle\}$). V dalším kroku volí hráč A otevřenou neprázdnou podmnožinu G_2 množiny G_1. Pokračování je snad jasné: pro lichá n volí B otevřenou neprázdnou podmnožinu G_{n-1}, pro sudá n volí takovou množinu A. Zbývá nám ještě říci, co znamená, že hráč A vyhraje. To bude tehdy, když průnik všech množin G_n obsahuje pouze takové funkce, které mají vlastnost V.

Poznamenejme, že žádná konkrétní funkce není typická (uvažujeme-li totiž vlastnost „být rovný dané funkci f", má dokonce vítěznou strategii hráč B — stačí mu volit v prvním kroku množinu, která neobsahuje f a v dalších krocích takovou množinu G_n, jejíž uzávěr je částí G_{n-1} a jejíž diametr nepřevýší 2^{-n}; průnik množin G_n je pak, díky úplnosti prostoru $C\langle 0, 1\rangle$, neprázdný a evidentně neobsahuje funkci f). Přesto však můžeme (ovšem nepřesně) říci, že typické funkce existují; tím míníme, že má-li typická funkce vlastnost V, pak existuje funkce, která tuto vlastnost má (to je vidět z předchozí argumentace, ve které jsme si uvědomili, že B má vždy možnost vynutit, aby průnik množin G_n byl neprázdný). Poznamenejme ještě, že jednoduchou kombinací strategií lze dokázat: Jestliže pro každé přirozené číslo i má typická funkce vlastnost V_i, pak typická funkce má současně všechny vlastnosti V_i.

Podíváme-li se znovu na konstrukci nederivovatelné funkce, ihned vidíme, že typická funkce nemá nikde derivaci. Hráč A totiž vždy může v neprázdné otevřené množině G_{n-1} spojitých funkcí najít „pilu" (samozřejmě ne tak úplně pravidelnou jako na obrázku); volí-li pak za G_n její dostatečně malé okolí, jsou všechny funkce z G_n jen malými deformacemi „pily", a mají tedy ty její vlastnosti, které aproximovaly nederivovatelnost. V průniku množin G_n pak mohou ležet pouze funkce, které nemají nikde konečnou derivaci. Stejně lehce se ukáže, že typická funkce nemá v žádném bodě ani nekonečnou derivaci a že v žádném bodě nemá konečnou žádnou jednostrannou derivaci.

Derivační vlastnosti typických funkcí ve smyslu kategorií byly velmi podrobně vyšetřovány řadou autorů (přesto zůstávají stále některé otázky nezodpověděny). Není mým úmyslem rozebírat zde podrobněji dosažené výsledky; uvedu zde pouze dvě vlastnosti typických funkcí, ke kterým se ještě později vrátíme. V. Jarník dokázal, že typická funkce má skoro ve všech bodech intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ uzel. S. Saks dokázal, že typická funkce má aspoň v jednom bodě derivaci zprava (nutně nekonečnou).

Předchozí výklad metody kategorií není ovšem zcela obvyklý. Většina autorů dokazovala vlastnosti typických funkcí pomocí běžné definice. Nejznámější výjimkou je výše uvedená Saksova věta, která pokud je mi známo, nebyla nikde dokázána pouze užitím klasické definice. O to překvapivější se může zdát jeden z výsledků čtvrtého období studia nederivovatelných funkcí: Saksovo tvrzení je důsledkem Jarníkovy věty! Než se však k němu dostaneme, zastavme se na chvíli u jiného pojmu typičnosti.

b) Typičnost ve smyslu míry

Na prostoru $C\langle 0, 1 \rangle$ máme k dispozici značné množství měr; pro každou z nich se můžeme ptát, zda typické (tj. skoro všechny) funkce jsou derivovatelné. Poněvadž tato otázka je vlastně otázkou po vlastnostech trajektorií stochastických procesů, byla jí věnována pozornost těch matematiků, kteří se trajektoriemi stochastických procesů zabývali. Problematika zde není ještě zdaleka uzavřena, a to dokonce ani v případě nejprozkoumanějším — v případě Wienerovy míry (tj. pro trajektorie Brownova pohybu). Je asi dobře známo, že typická funkce ve smyslu Wienerovy míry nemá nikde konečnou derivaci, a že má i některé další vlastnosti typických funkcí ve smyslu kategorií. Některé vlastnosti typických funkcí v těchto dvou smyslech se však podstatně liší; tyto otázky zde nebudu rozebírat podrobněji, ale přesto se k nim na závěr alespoň na chvíli vrátím.

4. Proč nederivovatelné funkce vypadají tak, jak vypadají?

Metodu studia zákonitostí, jimiž se nederivovatelné funkce řídí, budu ilustrovat na dvou příkladech.

a) Proč má typická funkce ve smyslu kategorií aspoň v jednom bodě derivaci zprava?

Odpověď je překvapivě jednoduchá: Protože má skoro všude uzel a protože platí tato věta o monotonii:

Je-li f spojitá, $D^+f(x) \geqq 0$ skoro všude, $D^+f(x) > -\infty$ všude, pak f je neklesající.

Protože typická funkce splňuje první dvě podmínky této věty a nesplňuje její tvrzení, musí pro ni existovat bod, kde $D^+f(x) = -\infty$, což je ovšem totéž jako $f'_+(x) = -\infty$.

Za poznámku snad stojí fakt, že důkaz použité věty o monotonii není nijak obtížný a že tato věta zdaleka nepatří k nejsilnějším větám o monotonii.

Úvahou, kterou jsme použili při důkazu toho, že typická funkce má někde derivaci zprava, můžeme odůvodnit i to, proč se nám nedaří sestrojit Besicovitchův příklad jednoduchou metodou. Např. při naší konstrukci nederivovatelné funkce pomocí „pily“ jsme chtěli, aby „pila“ měla všude špatné chování, pokud jde o derivovatelnost — sestrojovali jsme tedy vlastně co nejhorší příklad. Co však může být horšího z hlediska existence derivace než uzel? Nelze se proto divit, že naše funkce bude mít v hodně bodech uzel (samozřejmě, že ne všude, musí také někde nabývat maxima!). Avšak Besicovitchova funkce díky uvedené větě o monotonii nesmí mít uzel v bodech nějaké množiny kladné míry.

b) Proč má typická funkce ve smyslu kategorií skoro všude uzel?

Zde už nebude odpověď tak jednoduchá. První informaci získáme z Denjoy-Young-Saksovy věty:

Je-li f libovolná funkce, pak pro skoro všechna x nastane jeden z těchto případů:

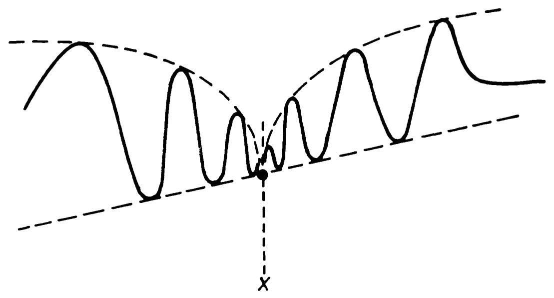
(i) *f má v bodě x konečnou derivaci,*

(ii) *f má v bodě x uzel,*

(iii) $D_+ f(x) = D^- f(x)$ *je konečné,* $D^+ f(x) = +\infty$, $D_- f(x) = -\infty$ (viz obr. 4),

(iv) *Symetrický případ k* (iii).

Obr. 4.



Poněvadž typická funkce nemá nikde derivaci, víme, že ve skoro každém bodě nastane jeden z případů (ii)—(iv). Co však vyloučilo případy (iii) a (iv)? Abychom to mohli říci, podívejme se podrobněji na množinu těch bodů, kde nastane (iii). (Následující úvahy budou správné pouze pro měřitelné funkce; to nás však nemusí bolet, neboť my studujeme dokonce jenom funkce spojité).

Rozdělíme-li množinu těch bodů, kde nastane (iii) přirozeným způsobem, dostaneme spočetně mnoho množin, na kterých je funkce neklesající (přesněji: stane se neklesající po přičtení vhodné lineární funkce). Neklesající funkce má ale skoro všude konečnou derivaci. Znamená to však něco o původní funkci? Neukázali jsme totiž, že je neklesající na intervalu, ale pouze na nějaké (měřitelné) množině. Víme tedy jen, že pro skoro všechna x z této množiny existuje konečná limita derivačního podílu přes tuto množinu. Je-li však x navíc bodem hustoty uvedené množiny (a to jsou skoro všechny její body), vidíme, že

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

existuje konečná, uvažujeme-li y probíhající pouze nějakou měřitelnou množinou, která má x za bod hustoty. Takovouto limitu nazveme aproximativní derivací funkce f v bodě x.

Ukázali jsme vlastně tento speciální případ Denjoy-Young-Saksovy věty pro aproximativní derivace:

Je-li f libovolná měřitelná funkce, nastane pro skoro všechna x jeden z následujících případů:

(i) *f má v bodě x konečnou aproximativní derivaci,*

(ii) *f má v bodě x uzel.*

Nyní už známe odpověď na naši otázku. Typická spojitá funkce nemá v žádném bodě konečnou aproximativní derivaci (důkaz je prakticky stejný jako pro obyčejnou derivaci), tedy má skoro všude uzel.

Vraťme se ještě jednou k Besicovitchově funkci. Předchozí větu můžeme totiž zkombinovat s větou o monotonii, a tím dostaneme:

Jestliže spojitá funkce nemá nikde derivaci zprava, pak má na množině kladné míry konečnou aproximativní derivaci.

Vidíme tedy, že Besicovitchova funkce se musí v jistém smyslu chovat velmi rozumně. Současně vidíme, proč Besicovitch konstruoval svůj příklad zhruba následujícím způsobem:

Místo libovolné deformace „pily" připouštíme jenom takové deformace, které s původní „pilou" splývají na množině velké míry. (Na této množině pak bude mít výsledná funkce konečnou aproximativní derivaci.) Z Denjoy-Young-Saksovy věty pro obyčejné derivace dále plyne, že deformace původní „pily" by z ní měla vyčnívat jen na jednu stranu (nesmíme vytvořit uzel ani konečnou derivaci; musíme tedy vytvářet případy (iii) a (iv)). Takto budeme pokračovat dále; limita vytvořené posloupnosti funkcí má naději nemít v žádném bodě jednostranou derivaci.

Na závěr uveďme ještě několik poznámek o typických funkcích ve smyslu Wienerovy míry. Ani tyto funkce nemají nikde aproximativní derivaci, tedy naše úvaha říká, že musí mít alespoň v jednom bodě nekonečnou derivaci zprava. Z hlediska aproximativní derivatelnosti se však chovají mnohem hůře (nebo snad lépe?) než typické funkce ve smyslu kategorií. Ve všech bodech je totiž aproximativní limita absolutní hodnoty derivačního podílu rovna $+\infty$! Představit si takovou funkci se zdá být mnohem obtížnější; její přímá konstrukce nebyla dosud provedena.

Literatura

1. K příkladům nederivovatelných funkcí snad literaturu uvádět nemusím. Besicovitchovu funkci lze nalézt např. v jeho práci *Diskussion der stetigen Funktionen im Zusammenhang mit der Frage über ihre Differentierbarkeit*, Bull. Acad. Sci. de Russie, *19* (1925), 527—540.
2. Podrobné vyšetření Diniho derivací Bolzanovy funkce bylo provedeno V. Jarníkem v práci *O funkci Bolzanově*, Čas. pěst. mat. *51* (1922), 248—264.

3. O vztazích Banachovy-Mazurovy hry a metody kategorií se lze dozvědět např. v knize J. C. OXTOBY: *Mass und Kategorie*, Springer, 1971.
4. Námi zmiňované vlastnosti typických funkcí ve smyslu kategorií jsou uvedeny v práci V. JARNÍK: *Über die Differenzierbarkeit stetiger Funktionen*, Fund. Math, *21* (1933), 48—58.
5. Původní SAKSŮV důkaz derivovatelnosti typických funkcí je v jeho práci *On the functions of Besicovitch in the space of continuous functions*, Fund. Math. *19* (1932), 211—219.
6. Diskusi zákonitostí, jimiž se nederivovatelné funkce řídí, lze nalézt v sérii prací K. M. GARGA; pro typické funkce pak zejména v jeho práci *On a residual set of continuous functions*, Czech. Math. J. *20* (95) (1970), 537—543.
7. Denjoy-Young-Saksovy věty a mnoho dalších informací lze nalézt v nestárnoucí knize S. SAKS: *Theory of the integral*, Monografie Matematyczne, Warszawa—Lwow, 1937.
Mnoho zajímavostí souvisících s naší problematikou lze nalézt též v knize A. M. BRUCKNER: *Differentiation of real functions*, Lecture Notes in Mathematics *659*, Springer, 1978.
8. Vlastnosti aproximativních derivací trajektorií Wienerova procesu souvisí úzce s existencí spojitého lokálního času. Viz např. D. GEMAN, J. HOROWITZ: *Local times for real and random functions*, Duke Math. J. *43* (1976), 809—828.

Stav a koncepce rozvoje matematické informatiky v ČSSR*)

Jiří Hořejš a kol.

I. Charakteristika matematické informatiky (MI)

V úvodu je třeba podat jisté terminologické vysvětlení. Termín „MI" vznikl z nedostatku lepšího názvu původně k označení „vědy o počítačích", computer science (CS), který se v některých evropských zemích překládá prostě jako „informatika". Adjektivum „matematický" mělo nejdříve za úkol odlišit CS od informatiky jako oboru zaměřeného na organizaci a zpracování dat v knihovnictví; během doby se vžil název MI k označení těch částí CS, které mají výraznější matematický charakter. V tomto smyslu se chápe i v této stati, i když hranice mezi matematickou a nematematickou složkou CS není dosti zřetelná a tato skutečnost je jednou z příčin, proč matematická obec přistupovala — na škodu věci i na škodu svou — k otázkám CS s jistou skepsí a váhavě.

---

*) Příspěvek byl přednesen autorem na společném zasedání vědeckého kolegia matematiky ČSAV a komise pro matematiku SAV konaném ve dnech 27.—28. 9. 1982. Byl sestaven na základě práce komise ve složení: doc. dr. J. Hořejš, CSc. — předseda, člen korespondent ČSAV J. Nedoma, prof. dr. M. Novotný, DrSc., dr. J. Demner, CSc., dr. J. Pelouch, CSc., a na základě konzultací s řadou dalších odborníků.