Bohumil Pardubský

Teoretické základy statistických přejímacích postupů [Dokončení]

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 4 (1959), No. 1, 34--39

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137870

TEORETICKÉ ZÁKLADY STATISTICKÝCH PŘEJÍMACÍCH POSTUPŮ

Ing. Dr. B. PARDUBSKÝ, *Výzkumný ústav tepelné techniky, Praha*

(Dokončení*).

7. Přejímací postupy při několika jakostních znacích

Přejímání výrobků podle několika jakostních vlastností lze provádět několika způsoby.

Pro celkový nepřípustný podíl zmetků, vzhledem ke všem kontrolovaným vlastnostem, stanovíme příslušná přejímací čísla (c, n). Dodávku přijímáme, jestliže součet všech vadných výrobků, vzhledem ke kterékoli kontrolované vlastnosti, je menší nebo roven hodnotě c. Jinak dodávku zamítáme. Nevýhodou tohoto přejímacího postupu je, že u zamítnuté dodávky je nutno provést stoprocentní kontrolu na všechny uvažované vlastnosti.

Tento nedostatek lze odstranit tím, že pro každý jakostní znak předepíšeme samostatný přejímací postup. Vzhledem k závažnosti jednotlivých jakostních znaků lze uvažovat i různě přísné přejímací postupy tak, že rozsahy výběrů jsou stále stejné, ale rozhodná čísla c jsou různá (čím menší je rozhodné číslo, tím přísnější je přejímací postup). Při tomto přejímacím postupu neznáme však průběh operativní charakteristiky vzhledem k celkovému podílu zmetků v dodávce.

Vzhledem k těmto požadavkům kladeným na přejímací postup při kontrole několika jakostních znaků, stanovíme pro daný rozsah dodávky N a daný celkový nepřípustný podíl zmetků p_2 příslušna přejímací čísla (c, n) (pomocí tabulek Dodge a Romiga).

Při přejímacím postupu vybereme náhodně n výrobků a provedeme na těchto výrobcích postupně kontrolu vzhledem k jednotlivým jakostním znakům. Dodávku přijímáme, jestliže u žádného jakostního znaku počet nevyhovujících výrobků nepřekročí hodnotu ck_i, pro $i = 1, 2, \dots, l$, kde l je počet jakostních znaků a k_i je tak zvaná váha pro i-tý jakostní znak. Potom platí $\sum_{i=1}^{l} k_i = 1$. Dodávku podrobujeme stoprocentní kontrole vzhledem k jakostnímu znaku, pro který byla dodávka přejímacím postupem zamítnuta. Výslednou operativní charakteristiku pro tento přejímací postup označme $L^*(p)$; lze dokázat [12], že leží v pásmu ohraničeném operativní charakteristikou $L(c, n, p)$ a operativní charakteristikou $L_D^*(p)$. Tedy platí

$$L_D^*(p) \leqq L^*(p) \leqq L(c, n, p)\,, \quad \text{kde} \quad L_D^*(p) = \prod_{i=1}^{l} P(\zeta \leqq c_i \mid p_i, n)\,,$$

$$p_i = 1 - q_i\,, \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \dots, l\,, \quad p = 1 - q\,, \quad q = \prod_{i=1}^{l} q_i \qquad (38)$$

$$\text{pro} \quad i = 1, 2, \dots, l\,,$$

a q_i pro $i = 1, 2, \dots, l$ vyhovují systému rovnic

*) První část viz v tomto časopise, III (1958), č. 3.

$$\frac{q_i}{B_i(n, c_i)} = \frac{q_j}{B_j(n, c_j)} \quad \text{pro} \quad i, j = 1, 2, \ldots, l, \quad i \neq j,$$

kde

$$B_i(n, c_i) = \frac{P(\zeta_i \leqq c_i \mid q_t, n)}{P(\zeta_i = c_i \mid q_i, (n-1))}. \tag{39}$$

Pro praktické účely byly sestaveny tabulky hodnot dolní a horní hranice nepřípustného podílu zmetků pro 2, 3, 4 a 5 kontrolovaných vlastností, pro různé váhové poměry a pro risiko odběratele $\beta = 0{,}1$ ([12], [13]).

8. Přejímací postupy prováděné metodou měření

U těchto přejímacích postupů provádíme u jednotlivých náhodně vybraných výrobků měření ať již rozměru nebo jiných fysikálních nebo chemických jejich vlastností. Pomocí naměřených hodnot vyčíslujeme pak příslušnou výběrovou charakteristiku. Podle toho, jakou výběrovou charakteristiku si zvolíme, rozeznáváme

a) přejímací postup při předpisu průměrné hodnoty jakostního znaku,

b) přejímací postup při předpisu jednostranné tolerance.

8.1. Přejímací postup prováděný metodou měřením při předpisu průměrné hodnoty jakostního znaku

Dodávku výrobků považujeme za vyhovující, jestliže průměrná hodnota jakostního znaku pro celou dodávku je rovna předepsané hodnotě X. Předpokládáme-li, že rozdělení jakostního znaku je normální, potom je známo ([18], [19]), že náhodná proměnná η, která nabývá hodnot $t = \frac{|\bar{x} - X| \cdot \sqrt{n}}{s}$, kde $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$, x_i = hodnoty jakostního znaku pro $i = 1, 2, \ldots, n$, $s = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$, n = počet kusů ve výběru, má známé Studentovo „t“ rozdělení s $(n-1)$ stupni volnosti, jehož hustota je dána výrazem

$$g_{n-1}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\pi(n-1)}} \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}.$$

Dodávku považujeme za vyhovující, jestliže

$$\frac{|\bar{x} - X|}{s} \sqrt{n} \leqq t_\alpha, \tag{40}$$

kde α je risiko dodavatele. Pro daný rozsah výběru n je t_α dáno vztahem $2\int_0^{t_\alpha} g_{n-1}(t)\, dt = 1 - \alpha$. Pro praktické účely jsou pro různé rozsahy výběru n a různé hodnoty α vypočtena přejímací čísla t_α resp. $t_\alpha/\sqrt{n}$ ([5]). Nevýhodou je poměrně obtížný výpočet směrodatné odchylky s a proto ji nahrazujeme rozpětím R. Potom považujeme dodávku za vyhovující, jestliže

$$\frac{|\bar{x} - X|}{R} \leqq c_\alpha , \tag{41}$$

kde přejímací číslo c_α, pro daný rozsah výběru n a dané risiko dodavatele α se vypočte z rozdělení výběrového průměru a rozpětí, které jsou navzájem staticky nezávislými veličinami ([5], [21]).

8.2. Přejímací postup prováděný metodou měření při předpisu jednostranných tolerancí

U těchto přejímacích postupů je pro sledovaný jakostní znak předepsán buď horní T_h resp. dolní T_d mezní rozměr nebo hodnota. Výrobek považujeme za nevyhovující, jestliže hodnota jakostního znaku je větší než horní mezní rozměr T_h. Obdobně při předpisu dolního mezního rozměru T_d. Stanovení přejímacích čísel naznačíme pro případ předpisu horního mezního rozměru. Zcela obdobný postup je pro případ dolního mezního rozměru.

Od přejímacího postupu požadujeme, aby s pravděpodobností β nebo menší byly přijímány dodávky, u kterých podíl p nevyhovujících výrobků je roven nebo větší než nepřípustný podíl p_2. Obdobně požadujeme, aby s pravděpodobností $(1 - \alpha)$ nebo větší byly přijímány dodávky, u kterých podíl nevyhovujících výrobků je roven nebo menší než přípustný podíl p_1. Předpokladem pro tento druh přejímaných postupů je, že rozdělení jakostního znaku je normální $N(\mu, \sigma)$.

Jestliže podíl nevyhovujících výrobků $p = p_2$, potom lze stanovit takové číslo K_2, aby platilo

$$p_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{K_2}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x . \tag{42}$$

Obdobně když $p = p_1$ stanovíme číslo K_1 tak, aby

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{K_1}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x . \tag{43}$$

Zřejmě platí

$$\frac{T_h - \mu}{\sigma} = K_2 \quad \text{resp.} \quad \frac{T_d - \mu}{\sigma} = K_1 . \tag{44}$$

Parametry μ a σ odhadneme pomocí výběrového průměru $\bar{x}$ a směrodatné odchylky s. Uvažujeme-li náhodnou proměnnou η, která nabývá hodnot $(\bar{x} + ks)$, potom pro přiměřeně velké n přísluší této náhodné proměnné normální rozdělení

$$P(\eta \leqq T_h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{T_h - \mu - k\sigma}{\sigma\sqrt{\frac{2+k^2}{2n}}}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x . \tag{45}$$

Vzhledem ke vztahům (42), (43) a (44) dostaneme

$$\left.\begin{aligned} P(\eta \leqq T_h \mid p = p_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\frac{K_1 - k}{A}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = 1 - \alpha\,, \\ P(\eta \leqq T_h \mid p = p_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\frac{K_2 - k}{A}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \beta\,, \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

kde $A = \sqrt{\frac{2 + k^2}{2n}}$. Snadno dokážeme, že platí $P(\eta \leqq T_h|p \leqq p_1) \geqq$ $\geqq P(\eta \leqq T_h \mid p = p_1)$ a $P(\eta \leqq T_h \mid p \geqq p_2) \leqq P(\eta \leqq T_h \mid p = p_2)$.

Řešením soustavy rovnic (46) vzhledem ke k a n dostaneme

$$k = \frac{K_2 K_\alpha + K_1 K_\beta}{K_\alpha + K_\beta}\,, \quad (48) \qquad n = \frac{k^2 + 2}{2} \left(\frac{K_\alpha + K_\beta}{K_1 - K_2}\right)^2. \tag{49}$$

Dodávku přijímáme, jestliže pro vypočtený rozsah výběru n platí

$$k \leqq \frac{T_h - \bar{x}}{s}. \tag{50}$$

Pro různé hodnoty p_1 a p_2 a pro $\alpha = 0{,}05$ a $\beta = 0{,}1$ byla napočtena přejímací čísla n a k ([17], [5]). Jestliže volíme $\alpha = \beta = 0{,}05$ potom

$$k = \frac{K_1 + K_2}{2}\,, \quad n = \frac{10{,}8 + 1{,}35(K_1 + K_2)^2}{(K_1 - K_2)^2}. \tag{51}$$

V případech, kdy počet n výrobků ve výběru je předem dán, určíme hodnotu rozhodného čísla k řešením prvé resp. druhé rovnice ze systému (46) při vynechání požadavku na hodnotu risika odběratele resp. dodavatele [5]. Tento způsob stanovení rozhodného čísla k platí pro dostatečně velký rozsah výběru n. V případě malého rozsahu výběru podal řešení N. L. Johnson a B. L. Welsh [20]. Jelikož výpočet směrodatné odchylky s je značně pracný, bylo uvažováno, nahradit směrodatnou odchylku ve vztahu (50) výběrovým rozpětím. Při odvozování rozhodného čísla k vycházíme z požadavku, aby dodávky, které obsahují více než $100p\%$ výrobků, u kterých hodnota jakostního znaku je větší než horní mezní rozměr T_h, byly přijímány s pravděpodobností ε nebo menší. Současně si předem volíme počet n výrobků ve výběru. Dodávku přijímáme, když

$$\frac{T_h - \bar{x}}{R} \geqq t_\varepsilon(n, p)\,, \tag{52}$$

jinak ji zamítáme.

Hodnoty rozhodného čísla $t_\varepsilon(n, p)$ závisí na n, p a ε. Při odvození vztahu pro $t_\varepsilon(n, p)$ vycházíme z předpokladu, že rozdělení jakostního znaku je normální $N(\mu, \sigma)$ a lze tedy pro dané p stanovit hodnotu K_p tak, aby platilo

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{K_p}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x\,, \tag{53}$$

kde

$$K_p = \frac{T_h - \mu}{\sigma}.$$

Veličina $t_\varepsilon(n, p)$ je dána vztahem

$$\int_{-\infty}^{t_\varepsilon(n,p)} f(t)\,\mathrm{d}t = \varepsilon\,, \tag{54}$$

kde

$$f(t) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{n}{2}(tR - K_p)^2} \varphi(R)\, R\, \mathrm{d}R\,; \tag{55}$$

funkce $\varphi(R)$ je frekvenční funkcí pro rozpětí a platí

$$\varphi(R) = 2n(n-1) \int_{\frac{R}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-R)^2}{2}} \left[\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{x-R} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right]^{n-2} \mathrm{d}x\,. \tag{56}$$

Uvažujeme-li náhodné proměnné ξ_i pro $i = 1, 2, \ldots, n$, kterým přísluší společné normální rozdělení $N(\mu, \sigma)$, potom snadno dokážeme, že za předpokladu, že dávka obsahuje 100 % zmetků, rozdělení náhodné proměnné

$$\eta = T_h - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

je dáno vztahem

$$\varphi(y) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{n}{2}(y - K_p)^2}. \tag{57}$$

Jelikož náhodná proměnná η a ϱ, která nabývá hodnot rozpětí R, jsou statisticky nezávislé, potom rozdělení náhodné proměnné $\tau = \dfrac{T_h - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{\varrho}$, která nabývá hodnot $t = \dfrac{T_h - \bar{x}}{R}$, je dáno vztahem (55).

Pro $\varepsilon = 0{,}05$; $0{,}95$, pro $p = 0{,}01$; $0{,}05$; $0{,}10$ a pro různá n byly napočteny hodnoty rozhodných čísel $t_\varepsilon(n, p)$ ([4], [5] něm. vydání 1957). Účinnost přejímacích postupů ještě zvýšíme, uvažujeme-li několik podvýběrů. I pro tento případ byly napočteny hodnoty příslušných rozhodných čísel [22]. Necentrální t-test s použitím rozpětí navrhla A. Žaludová. Odvození frekvenční funkce pro proměnnou t provedl F. Zítek. Tabulky kritických hodnot byly vypočteny nejdříve ve VÚTT pak v Ústavu matematických strojů [22], [23].

9. Závěr

Tím byl podán stručný přehled základních metod statistické regulace výrobních pochodů a výběrových přejímacích postupů užívaných v našem průmyslu. Vydání československé normy „Statistická kontrola“ vypracované v teoretickém oddělení Výzkumného ústavu tepelné techniky jistě přispěje k dalšímu rozšíření těchto metod v našem průmyslu.

Literatura

[1] B. Pardubský: *Matematicko-statistické metody při kontrole hromadné výroby.* Pokroky matematiky, fysiky a astronomie č. 5 a 6, Praha ČSAV 1957.
[2] Leslie E. Simon: *An Engineer's Manuel of Statistical Methods*, New York 1945, John Wiley & Sons.
[3] Karl Pearson: *Tables of the Incomplete Beta-Function Ratio*, The Biometrika Office, University College, London 1934.
[4] J. Janko: *Tabulky k matematické statistice*, ČSAV Praha 1958.
[5] Směrnice pro statistickou kontrolu jakosti a regulaci výrobních pochodů, SNTL Praha 1953.
[6] Annals of Mat. Stat. Vol 20/1949 str. 242.
[7] Annals of Mat. Stat. Vol 17/1946 str. 81.
[8] Sborník referátů pro XXVIII. sjezd Elektrotechnického svazu československého, str. 46 a 50.
[9] H. F. Dodge a H. G. Romig: *Sampling Inspection Tables*, New York 1949, John Wiley & Sons.
[10] L. Prouza: *Praktické základy statistické kontroly*, Výzkumný ústav pro elektrotechnickou fysiku 1952.
[11] Freeman, Friedman, Mosteller, Wallis: *Sampling Inspection*, New York, London, Mc Graw-Hill Book Company 1948.
[12] V. Horálek: *Operativní charakteristika přejímky jedním výběrem při kontrole několika jakostních vlastností na jednom výrobku.* Aplikace matematiky č. 6, Praha ČSAV 1956.
[13] V. Horálek: *Přejímka výrobků při kontrole několika vlastností*, Strojírenství č. 10, 1957, SNTL.
[14] Abraham Wald: *Sequential Analysis*, New York, John Wiley & Sons 1948.
[15] Columbia University: *Sequential Analysis of Statistical Data:* Applications; Columbia university Press 1945.
[16] J. Sedláček: *Použití postupných testů v přejímce*, VÚTT-VT-Z 5217.
[17] Eisenhart, Hastay, Wallis: *Techniques of Statistical Analysis*, New York, Mc Graw-Hill Book Company 1947.
[18] Harald Cramér: *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University Press 1946.
[19] Jaroslav Janko: *Teorie náhodných výběrů — odhady a některé testy významnosti*, SN Praha 1951.
[20] N. L. Johnson, B. L. Welch: *Application of the Noncentral t-Distribution*, Biometrika, Vol. 31, str. 362, 1940.
[21] B. Pardubský, A. Žaludová: *Teorie a použití výběrového rozpětí v centrálním a necentrálním t-testu*, VÚTT-VT-Z 5223.
[22] A. Žaludová, M. Bilwachs: *Výpočet kritických hodnot pro necentrální t-test použitím rozpětí*, VÚTT-VT-Z 5337.
[23] Sborník Ústavu matematických strojů č. V, 1957, ČSAV.
[24] M. Jiřina, J. Nedoma: *Minimaximální řešení výběrového přejímacího postupu*, Aplikace matematiky č. 4, Praha 1956.