

# Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

---

Ladislav Drs

Metody používané v perspektivě

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 4 (1959), No. 1, 12--22

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/137860>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1959

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

- [8] M. Fréchet: Positions typiques d'un élément aléatoire de nature quelconque, Ann. scient. de l'école normale supérieure (3), LXV, fasc. 3, 211—237.
- [9] M. D. Donsker: An invariance principle for certain probability limit theorems, Memoires of the Amer. Math. Soc., n. 6, 1951.
- [10] Ю. В. Прохоров: Распределения вероятностей в функциональных пространствах, Успехи матем. наук, т. 8, в. 3[55], 1953, 165—167.
- [11] W. Feller, Diffusion processes in one-dimension, Trans. of Amer. Math. Soc. 77 : 1, 1954, 1—31.
- [12] Е. Б. Дынкин: Инфинитезимальные операторы марковских процессов, Теория вероятностей и ее применения, т. 1, в. 1, 1956, 38—60.
- [13] А. Я. Хинчин: Математические методы теории массового обслуживания, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 49, 1955.
- [14] Р. Курант, К. Фридрихс и Г. Леви: О разностных уравнениях математической физики; Успехи матем. наук, т. 8, 1941, 125—160.
- [15] A. Wald: Statistical Decision Functions, Ann. Math. Statistics, v. XX, N 2, 1949, 165—205.
- [16] В. С. Михалевич: Последовательные байесовские решения и оптимальные методы статистического контроля, Теория вероятностей и ее применения, т. 1, в. 4, 1956, 437—465.
- [17] Grenander U. and Rosenblatt M.: Statistical Analysis of Stationary Time Series, New York, 1957.

## METODY POUŽÍVANÉ V PERSPEKTIVĚ

LADISLAV DRŠ, Praha

Perspektivu daného objektu lze sestrojit mnoha způsoby a každý z nich je pro určitý případ více či méně vhodný. Úkolem článku je uvést pokud možno přehledně a systematicky jednotlivé metody a zhodnotit jejich použitelnost.

Předpokládáme, že čtenáři jsou známy základy perspektivy. Proto neuvádíme důkazy známých vět a ani důkazy zřejmé, nebo zcela jednoduché. Pokud je to možné, používáme obvyklého názvosloví a symboliky.

### Průsečná metoda

Je-li zobrazovaný objekt určen v Mongeově promítání půdorysem a nárysem, lze jeho perspektivu sestrojit jednoduchou metodou průsečnou. Průsečíky promítacích přímků bodů objektu s obvykle svislou perspektivní průmětnou<sup>1)</sup> určí jeho perspektivu. Vhodně zvolíme perspektivní průmětnu  $\pi$  a střed promítání  $S^2$ ). Budiž  $A$  jedním bodem zobrazovaného objektu. Pak jeho perspektiva  $A_s = AS \cdot \pi$ .

a) Půdorys perspektivy  $A_{s1}$  určí vzdálenost  $a$  bodu  $A_s$  od hlavní vertikály  $v$ , nárys  $A_{s2}$  vzdálenost  $b$  bodu  $A_s$  od horizontu  $h$ .

b) Ke konstrukci lze také užít jen půdorys. Promítací přímku  $AS$  sklopíme do obzorové roviny (vodorovné roviny obsahující střed  $S$ ) do  $(A)S_1$ . Potom je  $\overline{A_{s1}(A_s)} = b$ .

c) Snadněji lze délky  $b$  získat vždy na  $\pi_1$ , nanese-li od  $A_1$  na rovnoběžku s  $\pi_1$  délku  $\overline{A_1[A]} = \overline{A_1(A)}$ . Přímkou  $A_1S_1$ ,  $[A]S_1$  omezí na  $\pi_1$  úsečku  $b$ .

Jestliže nyní umístíme  $\pi$  do nákresny, zvolíme horizont  $h$  a vertikálu  $v$ , lze perspektivu  $A_s$  určit z délek  $a, b$  podle obr. 1b. V případech b), c) nemusí být ortogonální průměty umístěny ve sdružené poloze.

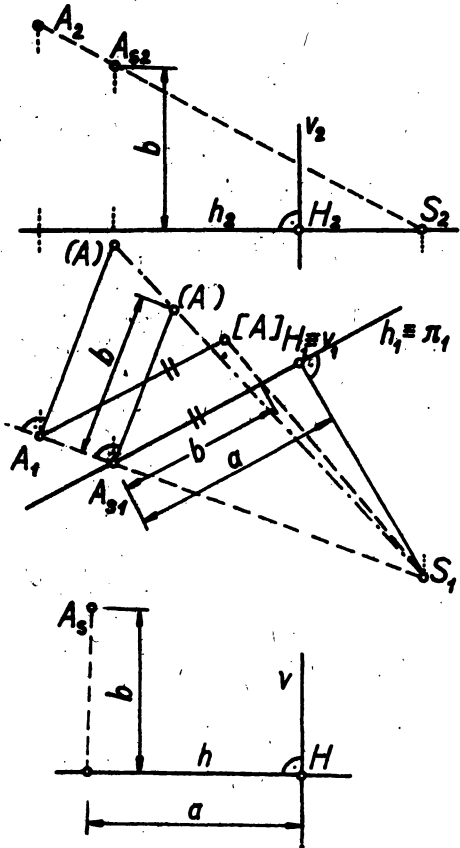
<sup>1)</sup> Perspektivní průmětna se v celém článku předpokládá svislá.

<sup>2)</sup> Vhodnou volbou  $\pi, S$  se zde zabývat nebudeme. O tom je možno se poučit na př. v [1], [4].

d) Průsečná metoda kombinovaná s metodou jednoho úběžníku užívá také odděleného půdorysu od nárysu. Polohu půdorysu  $p$  objektu, průmětny  $\pi$  a středu promítání  $S$  volme podle obr. 2 a dále budiž  $h \parallel \pi_1$ . Nárys  $n$  objektu je umístěn tak, že  $h_2 \equiv h$ . Bodem  $A$  vedme vodorovnou přímku  $a \parallel \pi$ . Úběžník  $U^a$  přímky  $a$  má půdorys  $U_{s1}^a$  v průsečíku  $\pi_1$  a rovnoběžky s  $a_1$ , vedené bodem  $S_1$ . Stopník  $P^a$  přímky  $a$  má perspektivu  $P^a = P^a$  svisle pod  $P_1$  na  $a_2$ ,  $a_2 = P_1^a U_{s1}^a$ . Dále je  $A_{s1} = \pi_1 \cdot S_1 A_1$ . Perspektiva  $A_2$  je na kolmici bodem  $A_{s1}$  k  $\pi_1$  a na přímce  $a_2$ .

Tato metoda je základem u nás vyrobeného perspektografu „Prema“ (schematický obr. 3a)<sup>3)</sup>. Přímku  $a_1$  nahrazuje ryska  $r$  na pravítku 1, jímž lze posunovat vodorovně. Pro určitou distanci je zhotoven tištěný rastr  $I$ , skládající se z přímek  $A_1 S_1, \dots$  svazku se středem  $S_1$ , pravidelně rozmístěných po ploše rastru (obr. 3b). Svislé přímky  $A_{s1} A_{s2}, \dots$  jsou na druhém tištěném rastru  $II$  v pokračování přímek  $A_1 S_1, \dots$ . Oba rastry se stýkají v  $\pi_1$ . Na rastru  $II$  je vyznačena svislice  $\hat{S} = U_{s1}^a U_{s2}^a$ . Na  $\hat{S}$  zvolíme polohu jehly  $J = U_{s2}^a$ , a tím i polohu horizontu  $h$ . Půdorys  $p$  na průsvitném papíře položíme přes rastr  $I$ , nárys  $n$  přes rastr  $II$  tak, aby splynul horizont  $h$  se svým nárysem  $h_2$ . Vodorovnou rysku  $r' = a_2$  na pravítku 2, kterou vede pravítko 1 vodorovně, nastavíme na nárys  $A_2$ , rysku  $r$  na pravítku 1 na půdorys  $A_1$  bodu  $A$ . Perspektiva  $a_2$  přímky  $a$  je tvořena nití  $n$ , procházející bodem  $P$  pravítka 2 a kolem jehly  $J$ . Leží-li bod  $A_1$  na přímce  $I$  horního rastru, je perspektiva  $A_2$  bodu  $A$  v průsečíku přímky  $II$  dolního rastru, která navazuje v  $\pi_1$  na  $I$ , s nití  $n$ .

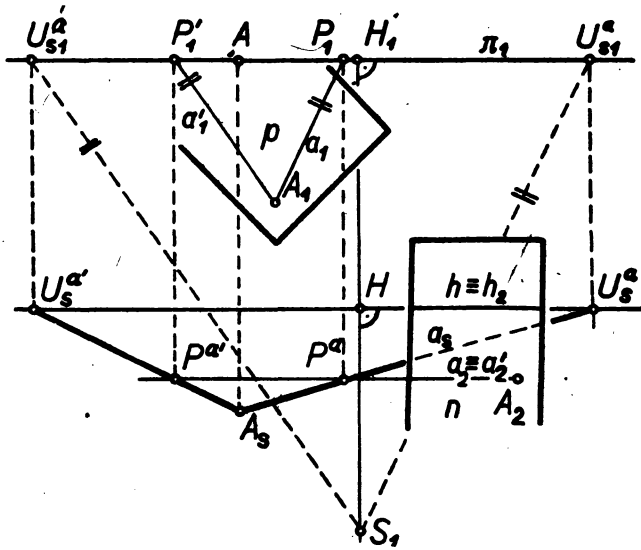
Výhodou perspektografu je zmechanisování a rychlost konstrukce. S přístrojem může pracovat i neodborník. Výhodně se získávají perspektivy křivek, zvláště graficky zadáných (např. perspektivy topografických ploch daných vrstevnicemi, grafických ploch a podobně). Určujeme zde perspektivy těch bodů, v nichž půdorysy křivek protínají přímky rastru  $I$ . Méně vhodné je použití přístroje k perspektivám stavebních objektů. Je nutné se tu podířit distanci rastru a pro jinou distanci musíme buď sestrojiti ortogonální průměty v potřebném měřítku anebo poříditi nový rastr pro tuto distanci. Při rýsování dochází též k nepřesnostem vlivem konstrukčních nedostatků přístroje (např. je nevhodný způsob upevnění nitě k pravítku 2).



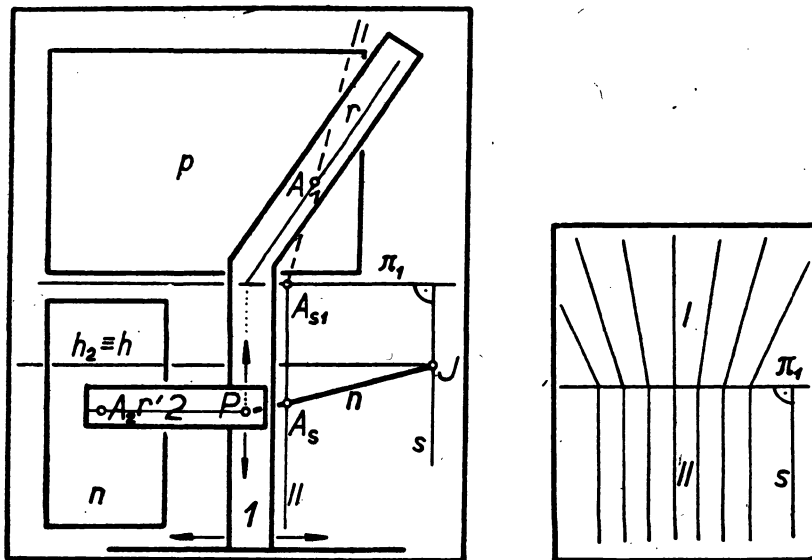
Obr. 1.

<sup>3)</sup> Podrobnosti v [2], o jiných typech perspektografů [4].

e) Průsečná metoda spojená s metodou dvou úběžníků. Vraťme se ještě k obr. 2. Bodem  $A$  můžeme vést další vodorovnou přímkou  $a'$  a sestrojiti její perspektivu  $a'_s$ . Pak bychom nemuseli sestrojovat bod  $A_{s1}$ , neboť  $A_s = a_s \cdot a'_s$ .



Obr. 2.



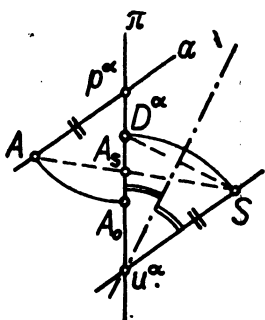
Obr. 3a, b.

Průsečná metoda se používá ke konstrukci perspektivy nejčastěji. Má však dosti nevýhod. Vyžaduje velkou nákresnu a mnoho konstrukcí. Je nutno sestřiovat zbytečný půdorys a v případě a) i nárys perspektivy. Použití úběžníků je výhodné, jsou-li v dostupné vzdálenosti. Přímký jdoucí nedostupným úběžníkem lze rýsovat pomocí Nicholsonova trojpravítka.<sup>4)</sup>

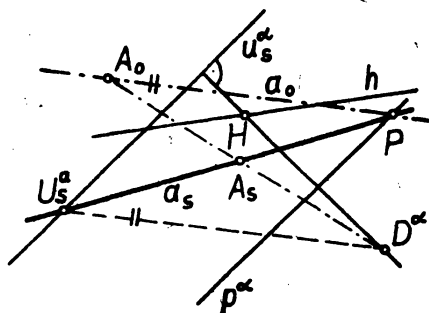
### Dělicí bod roviny

Perspektivu rovinných útvarů lze sestřovit na základě této věty:

Perspektivy  $A_s, \dots$  bodů  $A, \dots$  roviny  $\alpha \parallel \pi$  a body  $A_0, \dots$  roviny  $\alpha$  otočené kolem stopy  $p^\alpha$  do průmětny  $\pi$  jsou perspektivně kolineární. Osou kolineace je  $p^\alpha$ , středem kolineace je tzv. dělicí bod  $D^\alpha$  roviny  $\alpha$  (tj. ve stejném smyslu jako  $\alpha$  otočený bod  $S$  kolem úběžnice  $u_s^\alpha$  roviny  $\alpha$  do  $\pi$ )<sup>5)</sup>, nevlastní přímce  $u_s^\alpha$  odpovídá kolineárně úběžnice  $u_s^\alpha$ .



Obr. 4.



Obr. 5.

Body  $A_0, A_s, D^\alpha$  leží totiž na přímce (obr. 4, pohled směrem  $p^\alpha$ ), která je stopou roviny, určené rovnoběžkami  $SD^\alpha, AA_0$ , v níž leží též přímka  $SA$ . Další tvrzení věty jsou zřejmá. Z obr. 4 je též patrné, že  $D^\alpha$  je úběžník směru kolmého k rovině souměrnosti rovin  $\pi, \alpha$ .

Perspektiva přímky a bodu je na základě této věty sestřovena v obr. 5. Perspektiva je určena horizontem  $h$ , hlavním bodem  $H \in h$ , středem promítání  $S$ . Dále je dána rovina  $\alpha$  stopou  $p^\alpha$  a úběžnicí  $u_s^\alpha \parallel p^\alpha$  a otočená přímka  $a_0 \parallel p^\alpha$  roviny  $\alpha$  s bodem  $A_0$ . Na kolmici bodem  $H$  k  $u_s^\alpha$  leží  $D^\alpha$ ,  $\overline{U_s^\alpha D^\alpha} = \overline{u_s^\alpha S}$ .<sup>6)</sup> Perspektiva  $a_s$  přímky  $a \parallel p^\alpha$  prochází stopníkem  $P^a = a_0 p^\alpha$  a úběžníkem  $U_s^a \in u_s^\alpha$ ,  $U_s^a D^\alpha \parallel a_0$ .

Perspektiva  $A_s$  bodu  $A$  je průsečík přímky  $a_s$  s přímkou  $A_0 D^\alpha$ . Perspektiva  $\overline{A_s P^a}$  úsečky  $\overline{AP^a}$  se z bodu  $D^\alpha$  promítá do  $a_0$  do své skutečné délky  $\overline{P^a A_0} = \overline{P^a A}$ . Tuto vlastnost bodu  $D^\alpha$  použijeme později.

Zvláštní případy.

a) *Dělicí bod svíslé roviny  $\alpha$ .* Platí  $u_s^\alpha \perp h$  a proto  $D^\alpha \in h$  (obr. 6). Opět je dáno  $h, H, S, p^\alpha, u_s^\alpha, a_0, A_0 \in a_0$ . Bod  $D^\alpha$  bývá mimo nákresnu. V tom případě

<sup>4)</sup> O použití trojpravítka jedná [1], [4].

<sup>5)</sup> Název dělicí bod roviny nově zavádíme. Srv. v [3] název *Messpunkt*.

<sup>6)</sup>  $\alpha A$  je vzdálenost bodu  $A$  od roviny  $\alpha$ .

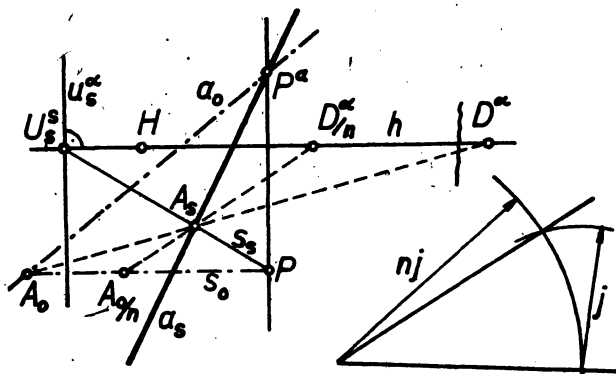
užijeme místo předchozí konstrukce *metodu redukovaného dělicího bodu roviny*  $D_{1/n}^\alpha$ . Bod  $U_s^\alpha = u_s^\alpha \setminus HD^\alpha$  je úběžníkem spádových přímek roviny  $\alpha$ . Bod  $D_{1/n}^\alpha$  leží na  $U_s^\alpha D^\alpha$  a platí  $\overline{U_s^\alpha D_{1/n}^\alpha} = 1/n \overline{U_s^\alpha D^\alpha}$ .

Perspektivu  $A_s$  bodu  $A$  sestrojíme takto: Bodem  $A_s$  vedeme otočenou spádovou přímkou  $S_0$  roviny  $\alpha$ ,  $s_0 \perp p^\alpha$ ,  $P^\alpha = p^\alpha \cdot s_0$  a na její perspektivě  $s_s = U_s^\alpha P^\alpha$  leží bod  $A_s$ . Sestrojíme podle obr. 6b redukční úhel pro redukování na  $n$ -tinu a na něm zredukujeme  $A_0 P^\alpha$  na  $A_{0/n} P^\alpha$ . Pak je  $A_s = s_s \cdot A_{0/n} D_{1/n}^\alpha$ . Perspektiva  $a_s$  přímky  $a \in A$  je pak spojnice stopníku  $P^\alpha$  s bodem  $A_s$ .

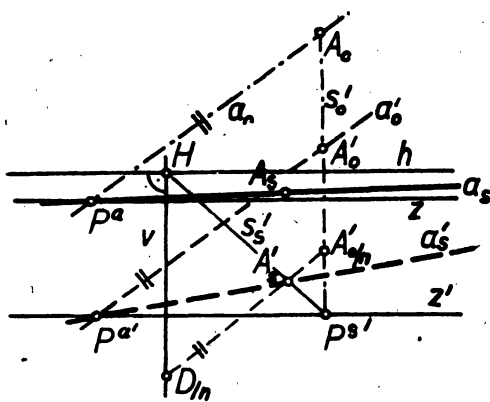
Je-li speciálně  $\alpha \perp \pi$ , je dělicí bod roviny  $\alpha$  levý (pravý) distančník  $^l D$  ( $^r D$ ), jeho vzdálenost od hlavního bodu  $H$  je totiž rovna distanci  $\overline{HS}$ .

b) Dělicí bod vodorovné roviny  $\zeta$  je dolní (horní) distančník  $^d D$  ( $^h D$ ), leží na vertikále  $v$  a platí  $\overline{H^d D} = \overline{H^h D} = \overline{HS}$ .

*Metoda sníženého a zvýšeného půdorysu.* Je-li vzdálenost  $\overline{zS}$  malá, promítá se polorovina  $\zeta$  za průmětnou do úzkého pásu a perspektivu útvaru, který



Obr. 6a.h.



Obr. 7.

leží v této polorovině nelze dosti přesně provádět. Posuňme rovinu  $\zeta$  svisle do roviny  $\zeta' \parallel \zeta$ . Perspektivy  $\zeta_s$ ,  $\zeta'_s$  jsou ve vztahu pravoúhlé perspektivní afinity. Osou afinity je horizont  $h$ , pár afinně sdružených přímek je základnice  $z = \zeta \cdot \pi$  a posunutá základnice  $z' = \zeta' \cdot \pi$ . Na obr. 7 je sestrojena nejprve perspektiva sníženého půdorysu  $a'_s$ ,  $A'_s \in a'_s$  metodou redukovaného dolního distančníku.

Je dáno  $H, h, S, z, a_0, A_0 \in a_0 \parallel z$ . Sestrojíme na vertikále  $v$  bod  $D_{1/n}$ ,  $\overline{HD_{1/n}} = 1/h \overline{HS}$ ,  $a_0$  i  $A_0$  jsou posunuty svisle dolů do  $a'_0, A'_0$ . Bodem  $A'_0$  vedeme otočenou hloubkovou přímkou (tj. spádovou přímkou roviny  $\zeta'$ )  $s'_0 \perp z'$ , její perspektiva  $s'_s$  jde hlavním bodem  $H$ . Sestrojíme-li pomocí redukčního úhlu, redukujícího na  $n$ -tinu, bod  $A'_{0/n}, A'_{0/n} P^{s'} = 1/h A'_0 P^{s'}$ , je  $A'_s = s'_s \cdot A'_{0/n} D_{1/n}$ ,  $a'_s = P^a A'_s$ . Afinní bod  $A_s$  sestrojíme užitím redukčního úhlu, který  $\overline{hz'}$  redukuje na  $\overline{hz}$ ?);  $a_s = P^a A_s$ .

Perspektivu vodorovných řezů objektu získáváme tzv. *vrstevnou metodou*. Ke konstrukci perspektiv vrstev lze

?)  $\overline{ab}$  je vzdálenost rovnoběžek  $a, b$ .

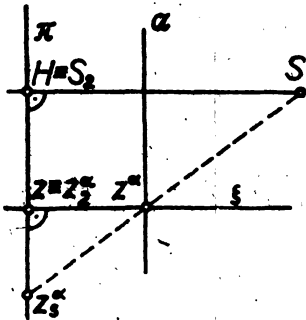
použít metodu redukovaného distančníku, nebo i metodu průsečnou, nejlépe spojenou s metodou úběžníků.

Metoda dělicího bodu roviny je základní metodou tzv. *volné perspektivy*. Její nevýhodou je nedostupnost dělicích bodů. Redukováním se konstrukce komplikuje. Není-li dostupný úběžník a používají-li se proto spádové přímky, je konstrukce nepřesná v okolí vertikály a je nutno ji nahradit jinou.

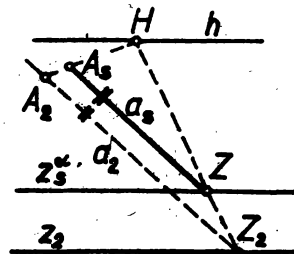
Metodu dělicího bodu roviny užíváme i při konstrukci perspektiv rovinných křivek. V tom případě sestrojíme perspektivy význačných bodů a tečen křivky. Perspektivu kuželosečky  $k$  sestrojíme ovšem přesně kolineací mezi  $k_0, k_s$ .

*Perspektiva roviny  $\alpha \parallel \pi$ .*

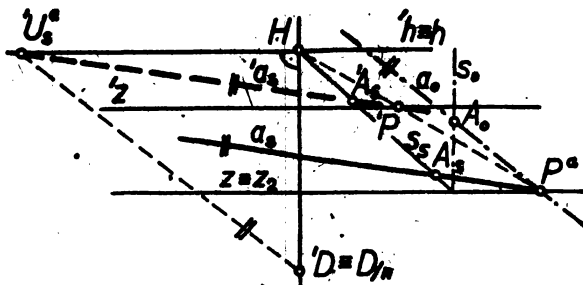
Pravoúhlé průměty bodů roviny  $\alpha \parallel \pi$  a jejich perspektivy jsou homotetické. Homotetie je určena středem, jímž je hlavní bod  $H$  a modulem  $m = \overline{S\alpha}/\overline{S\pi}$ . Je-li  $z$  stopa vodorovné roviny  $\zeta$  a  $z^\alpha = \zeta \cdot \alpha$ , platí též  $m = \overline{Hz}/\overline{Hz^\alpha}$  (obr. 8, pohled směrem  $h$ ).



Obr. 8.



Obr. 9.



Obr. 10.

Důkaz je snadný, neboť  $H = S_s, z \dot{=} z_s^a$ . Obr. 9 ukazuje použití této věty ke konstrukci perspektivy bodu, přímky a úsečky. Je dáno  $h, H, z, z^\alpha, a_s, A_s \in a_s$ . Budiž  $Z_s = a_s \cdot z$ , pak  $Z_s = \overline{HZ_s} \cdot z_s^\alpha, a_s \parallel a_s$  jde bodem  $Z_s, A_s = a_s \cdot AH$  a  $A_s Z_s = \overline{AZ_s}$ .

Zvolíme-li  $\alpha$  za novou průmětnu, lze získat z perspektivy v  $\pi$  redukovanou perspektivu v  $\alpha$ . *Metodu redukce perspektivy* je možno užít při nedostupném dělicím bodu roviny a při nedostupných úběžnících. Mezi kolmým průmětem

perspektivy v  $\pi$  do  $\alpha$  a perspektivou v  $\alpha$  je také homotetie (střed  $H$ , odpovídají si přímky  $z_2 = \zeta\alpha$ ,  $'z = \alpha \cdot zS$  (obr. 10b, pohled směrem  $z$ ). Je-li  $\overline{\alpha S} = 1/n\overline{\pi S}$ , prochází redukovaná perspektiva  $'a_s$  redukovaným stopníkem  $'P^a$ ,  $\overline{P^a H} = 1/n\overline{P^a H}$  a úběžníkem  $'U_s^a$ ,  $\overline{DH} = 1/n\overline{SH}$ ,  $\overline{D'U_s^a} \parallel a_0$ ;  $a_s \parallel 'a_s$  prochází bodem  $P^a$  (obr. 10a). Bod  $A_s$  je sestrojen pomocí hloubkové přímky  $S$ .

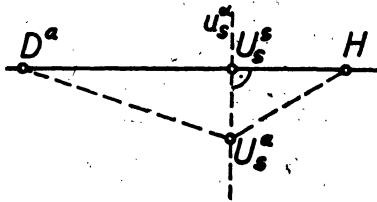
Metodu redukce perspektivy používáme jen v nejkrajnějším případě. Je komplikovaná, neboť je nutno určovat pomocnou redukovanou perspektivu a je nepřesná, neboť zvětšováním rostou i chyby.

### Dělicí bod přímky.

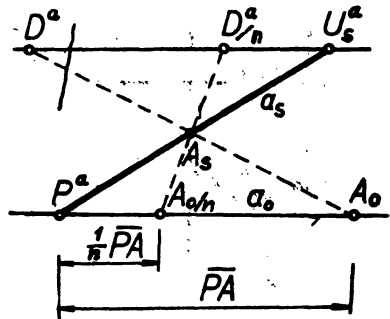
Dělicí bod  $D^a$  přímky  $a \not\perp \pi$  je dělicí bod jakékoli roviny  $\alpha$  proložené touto přímkou.

Dělicí body  $D^a$  přímky  $a \not\perp \pi$  leží na kružnici se středem  $U_s^a$  a poloměrem  $\overline{U_s^a S}$ .

Určíme-li rovinu  $\rho$  tak, že  $D^a U_s^a = u_s^e$ , pak se perspektiva  $P^a A_s$ , úsečky  $P A$  na přímce  $a$  promítá z dělicího bodu  $D^a$  přímky  $a$  do stopy  $p^e$  do skutečné délky.



Obr. 11.



Obr. 12.

**Důkaz:** Vedme bodem  $U_s^a$  úběžnici  $U_s^a$  libovolné roviny  $\alpha$ , která obsahuje přímku  $a$ . Je-li  $D^a$  její dělicí bod, pak platí (obr. 11)  $\overline{D^a U_s^a}^2 = \overline{D^a U_s^a}^2 + \overline{U_s^a U_s^a}^2 = \overline{U_s^a S}^2 + \overline{U_s^a S}^2 = \overline{U_s^a S}^2$ , a tedy  $\overline{D^a U_s^a} = \overline{S U_s^a}$ . Poslední část věty vyplývá z obr. 5, označíme-li  $D^a = D^a$ ,  $D^a U_s^a = u_s^e$ ,  $a_0 = p^e$ .

Pomocí dělicího bodu  $D^a$  přímky  $a$  tedy vynášíme úsečky na přímce v perspektivě anebo hledáme naopak délku úsečky, dané perspektivou. Na obr. 12 je sestrojena délka úsečky  $\overline{P A}$ , jsou-li na  $a_s$  dány body  $P^a$ ,  $A_s$ ,  $U_s^a$  a dále  $H$ ,  $S$ . Určíme  $D^a$ ,  $\overline{D^a U_s^a} = \overline{S U_s^a}$  a podle obr. 6 je  $a_0 \parallel D^a U_s^a$ ,  $\overline{P^a A_0} = \overline{P A}$ . Není-li  $D^a$  dostupný, lze analogicky s obr. 7 použít *redukovaný dělicí bod přímky a*  $D_{1/n}^a$ , pomocí něhož určená délka  $\overline{P^a A_{0/n}}$  je rovna  $1/n \overline{P^a A}$ . Podobně se řeší úloha obrácená.

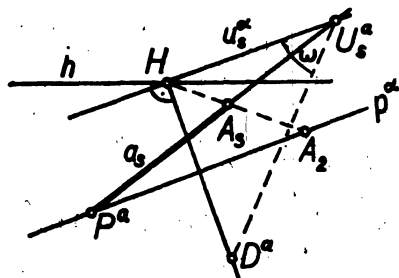
### Zvláštní případy.

1) Je-li přímka  $a$  vodorovná, proložme jí svislou rovinu  $\alpha$ ,  $D^a$  pak leží na horizontu a z něho se úsečka promítá do základnice do své skutečné délky.

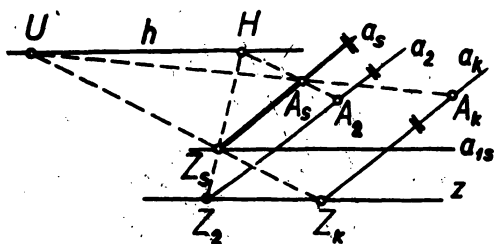
2) Je-li  $a$  hloubková přímka, volme opět rovinu  $\alpha$  svisle. Bod  $D^a$  je levý (pravý) distančník  ${}^l D$ ,  ${}^r D$ ,  ${}^l D H = {}^r D H = \overline{H S}$ . Perspektivu úsečky na hloubkové přímce pak sestrojujeme *metodou (redukovaného) levého (pravého) distančníku*.



Je-li  $D^a$  nedostupný, můžeme místo  $D_n^a$  užít *metodu hloubkových přímk*. Pomocí nich sestrojíme pravouhlý průmět  $a_2$  přímky  $a$  do  $\pi$ ,  $A_2B_2 = AB \cos \omega$ , je-li  $\omega$  odchylka přímky  $a$  (obr. 13). Přímky  $a, a_2$  určí rovinu  $\alpha$ ,  $u_s^a = HU_s^a$ ,  $\cos \omega = \frac{HU_s^a}{SU_s^a}$ . Máme-li sestrojiti  $A_s$ , tak, aby  $P^aA = d$ , určíme na redukčním úhlu délku  $d \cos \omega$ , sestrojíme na  $p^a = a_2$  bod  $A_2$ ,  $P^aA_2 = d \cos \omega$  a pak  $A_s = A_2A_s$ . Je-li navíc přímka  $a$  rovnoběžná s průmětnou, pak  $\cos \omega = 1$ .



Obr. 13.



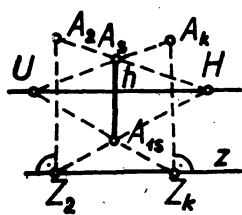
Obr. 14.

Konstrukce perspektivy úsečky na  $a \parallel \pi$  je provedena na obr. 14. Přímka  $a$  je určena průměty  $a_s, a_{1s} \parallel z$  a označíme-li  $a \cdot a_1 = a \cdot \zeta = Z$ , pak  $ZA = ZA_2$  na  $a_2 \parallel a_s$  bodem  $Z_2 = Z_sH \cdot z$ .

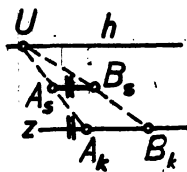
Je-li přímka  $a$  svislá, ukazuje obr. 15 vynášení perspektiv úseček nad základní rovinou  $\zeta$ .

Kromě kolmého průmětu  $a_2$  můžeme sestrojiti i kosoúhlý průmět  $a_k$  vodorovným směrem, určeným bodem  $U \in h$ . Pak  $AZ = A_kZ_k$  (obr. 14, 15). Kosoúhlý průmět používáme zejména u svislých přímk v okolí vertikály, konstrukce je pak přesnější.

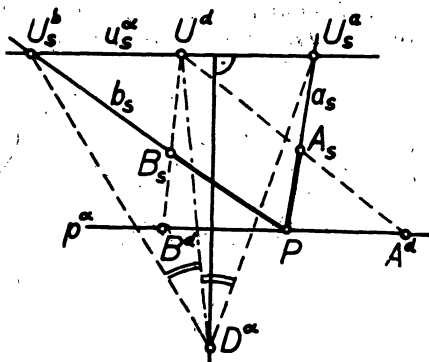
Délka úsečky na vodorovné průčelné přímce se získá z perspektivy také



Obr. 15.



Obr. 16.

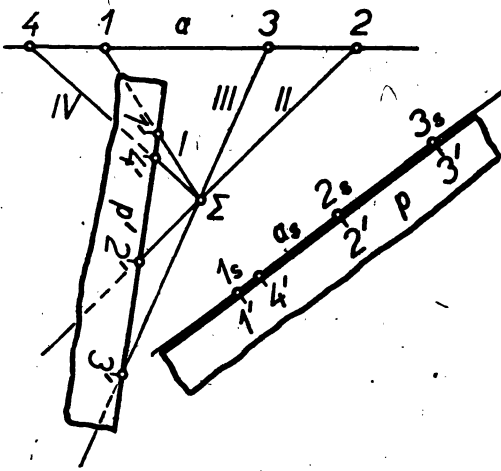


Obr. 17.

šikmým promítnutím. Zvolíme-li  $U \in h$  je  $UA_s \cdot z = A_k$ ,  $UB_s \cdot z = B_k$ ,  $AB = A_kB_k$  (obr. 16).

Často se v rovině vyskytují dva význačné směry. (U stavebních objektů to jsou navzájem kolmé směry hran budov apod.) Pak lze pro vynášení úseček v těchto směrech buď sestrojiti dva redukční úhly podle předchozích úvah, nebo je možno užít úběžník osy obou směrů, tzv. diagonální bod, z něhož se úsečky na přímkách obou směrů promítají do stopy roviny ve stejné redukci,

takže vystačíme s jedním redukčním úhlem. Obr. 17 ukazuje tuto *metodu diagonálního bodu* pro směry  $a, b$  v rovině  $\alpha$ . Sestrojíme diagonální bod  $U_s$  jako průsečík osy úhlu  $U_s D^a U_s$  s úběžnicí  $u_s^a$  a dále úhel redukující  $\overline{D^a U_s}$  na  $\overline{U_s U^a}$ . Máme-li sestrojiti  $A_s \in a_s, B_s \in b_s$ , tak, aby  $\overline{A_s P} = \overline{B_s P} = d$ , určíme na redukčním úhlu redukcí této délky, na  $p^a$  tím získáme body  $A^a, B^a$  a promítnutím bodů  $A^a, B^a$  z  $U^a$  určíme na  $a_s, b_s$  hledané body  $A_s, B_s$ .



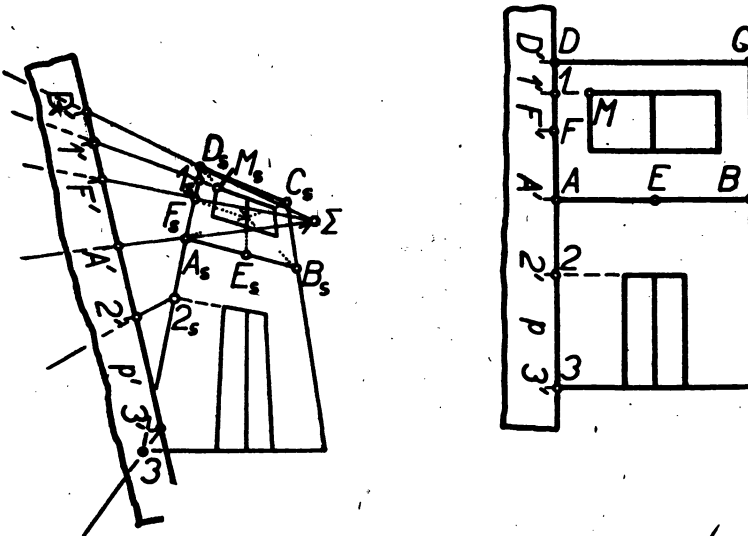
Obr. 18.

spektivy  $1_s, 2_s, 3_s$  na  $a_s$ . S řadou  $1, 2, 3, \dots$  sestrojíme perspektivní svazek  $I, II, III, \dots$  se středem  $\Sigma$  a proužek  $p$  s body  $1_s, 2_s, 3_s$  přemístíme do perspektivní polohy  $p'$  se svazkem  $\Sigma$ . Průsečíky  $4, \dots$  přímkou  $IV, \dots$  vedených body  $4, \dots$  s hranou proužku udají po přemístění  $p'$  do  $p$  na  $a$ , hledané perspek-

metody přibližné. Z nich vyniká technickou přesností *metoda ko-*

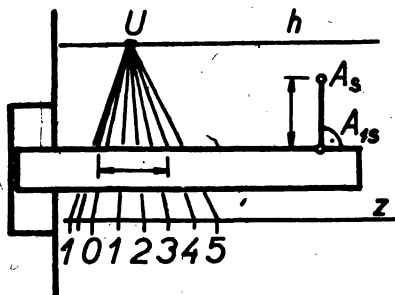
*incidenčních trojín.*

Bodová řada na přímce je projektivní s perspektivou této řady. Projektivita je určena třemi páry odpovídajících si bodů. Perspektivu dalších bodů přímky lze určit tak, že některou z dříve popsaných metod sestrojíme perspektivy tří bodů přímky a perspektivy dalších bodů určíme na základě této projektivity. Obr. 18 ukazuje praktický postup. Jsou dány body  $1, 2, 3, 4, \dots$  na přímce  $a$  a per-



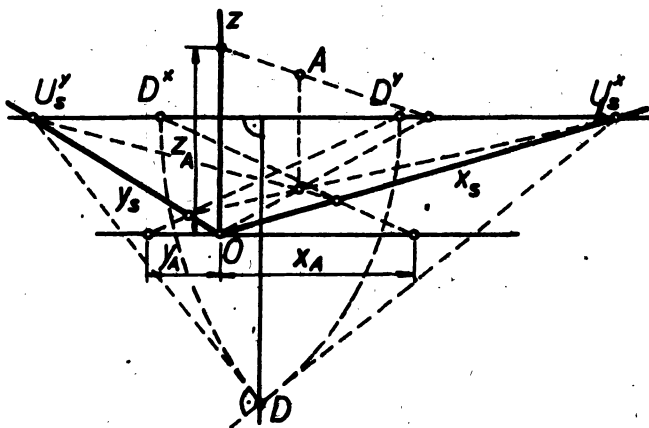
Obr. 19.

tivy 4, ... bodů 4, ... přímky  $a$ . Výhodou této metody je, kromě jednoduchosti, rychlosti a přesnosti i to, že vlastní náčrtna se nezaplňuje konstrukcemi. Nevadí nedostupné úběžníky a dělicí bod. Měřítka ortogonálních průmětů mohou být od sebe různá. Dobře se touto metodou sestrojí i perspektivy křivek. Přes danou křivku sestrojíme síť rovnoběžek se dvěma směry tak, aby se přímky sítě protínaly na význačných bodech křivky. Pak jsou odpovídající průřešky v perspektivě této sítě body perspektivy křivky. Výhody metody koincidenčních trojnů nebyly plně využity ani v konstruktivní fotogrametrii, kde je metoda pro rekonstrukci roviny velmi jednoduchá. Na obr. 19 je provedena rekonstrukce z šikmého snímku. Snímek obdélníka  $ABCD$  je čtyřúhelník  $A_1B_1C_1D_1$ . Význačnými body snímku  $M_1, \dots$  vedeme přímky, procházející úběžníky  $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, D_2, B_2, C_2$ . V rekonstrukci jsou to rovnoběžky se stranami  $AB, AD$ . V perspektivě sestrojíme pomocí úhlopříček  $A_1C_1, B_1D_1$  body  $E_1, F_1$  odpovídající v rekonstrukci středům  $E, F$  stran  $AB, AD$ . Tím je na přímkách  $AB, A_1B_1$ , resp.  $AD, A_1D_1$  určena projektivita. S bodovou řadou  $A_1, D_1$  sestrojíme perspektivní svazek  $\Sigma$ , proužek  $p$  s body  $A_1, D_1, F_1$  přemístíme do perspektivní polohy  $p'$  se svazkem  $\Sigma$  a určíme body  $1', \dots$  na  $p'$  jako průřešky  $\Sigma 1', \dots$



Obr. 20.

s hranou proužku  $p'$ . Uvedením proužku do polohy  $p$  získáme rekonstrukci bodů  $1, \dots$  na  $AD$ . Podobně bychom postupovali s řadou  $A_1, B_1$ . V odpovídajících průřešcích sítě získáme rekonstruované body  $M, \dots$ . Konstrukce vnitřní orientace snímku odpadá. Již mnohem méně přesná, ale také velmi rychlá a jednoduchá je metoda sítě čtverců. Je vhodná zejména pro perspektivy grafických křivek. Přes křivku



Obr. 21.

s hranou proužku  $p'$ . Uvedením proužku do polohy  $p$  získáme rekonstrukci bodů  $1, \dots$  na  $AD$ . Podobně bychom postupovali s řadou  $A_1, B_1$ . V odpovídajících průřešcích sítě získáme rekonstruované body  $M, \dots$ . Konstrukce vnitřní orientace snímku odpadá.

Již mnohem méně přesná, ale také velmi rychlá a jednoduchá je metoda sítě čtverců. Je vhodná zejména pro perspektivy grafických křivek. Přes křivku

položíme čtvercovou síť na průsvitném papíře a sestrojíme perspektivu této sítě. Odhadneme průsečíky křivky s přímkami sítě a přeneseme je do perspektivy sítě (v případě průčelných čtverců tzv. *gratikuláž*).

*Metoda hloubkového měřítka* slouží k vynášení výšek nad základní rovinou (obr. 20). U krajů nákresny sestrojíme perspektivy rovnoběžek v základní rovině, procházejících body měřítka na základnici. Perspektivou  $A_1$ , vedeme průčelnou přímkou  $a_s \parallel z$  (nahradí ji hrana příloženku),  $Aa \parallel \pi$ , redukce  $A_1, A_s$  úsečky  $A_1A$  (na obr. 4,6) je též jako redukce této délky na přímce  $a_s$ , a odměříme ji přímo na perspektivě rovnoběžek.

Přesnost metody ovšem závisí na podrobném dělení měřítka. Výhodné je, že metoda nevyžaduje konstrukce ve vlastní nákresně.

### Perspektivní axonometrie.

U stavebních objektů, které vykazují tři navzájem kolmé směry, lze zvolit pravouhlou soustavu souřadnic s osami těchto směrů. Každý bod je pak určen souřadnicemi vzhledem k této soustavě. Sestrojíme-li perspektivu os souřadnic, lze potom např. metodou dělicích bodů os najít perspektivy souřadnic a tím i perspektivu daného bodu. Na obr. 21 je osa  $z$  v průmětně, bod  $A$  má souřadnice  $x_A, y_A, z_A$ . Metoda je pracná a v této podobě se jí nepoužívá.

Sestrojíme v každé souřadnicové rovině síť čtverců a určíme jejich perspektivu. Tím získáme tzv. *perspektivní síť*, ve které je možno již bez dalších konstrukcí rýsovat perspektivu jak objektu daného ortogonálními průměty, tak také i objektu navrhovaného. Ovšem že tuto výhodu zmenšuje nemožnost změnit distanci a odchylky os.

### Literatura:

- [1] Kadeřávek-Klíma-Kounovský, *Deskriptivní geometrie I*, ČSAV 1954.
- [2] A. Salner, *Prostorové zobrazování ve strojnictví*, SNTL 1954.
- [3] F. Hohenberg, *Konstruktive Geometrie für Techniker*, Springer 1956.
- [4] Scheffers, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie II*, Berlin 1920.

## IRACIONÁLNÍ ČÍSLA NA STŘEDNÍ ŠKOLE<sup>1)</sup>

G. M. FICHTEŇGOLC

1. Je všeobecně uznáváno, že iracionální čísla jsou slabým místem ve výuce matematice na střední škole. Je tomu tak především proto, že iracionální čísla jsou teoreticky i metodicky obtížným problémem, a částečně také proto, že výklad této otázky v učebnici algebry je špatný, učebnice geometrie, která částečně plní úkol výkladu iracionálních čísel, nemůže se této úlohy plně zhostit.

2. Matematikové se s iracionálními čísly setkávali již po mnoho století, především v souvislosti s odmocňováním a dále při vyšetřování poměru nesouměřitelných veličin. Logická podstata těchto čísel, jejich vztah k dobře známým racionálním číslům však zůstával nevyjasněným a zákonitosti početních operací s iracionálními čísly neodůvodněné.

<sup>1)</sup> Г. М. Фихтенгольц, Иррациональные числа в средней школе, *Математическое просвещение*, č. 2, 1957.