Juraj Bosák

Ako bol vyriešený problém štyroch farieb

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 24 (1979), No. 4, 181--201

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137800

POKROKY MATEMATIKY, FYZIKY A ASTRONOMIE, ROČNÍK XXIV (1979) ČÍSLO 4

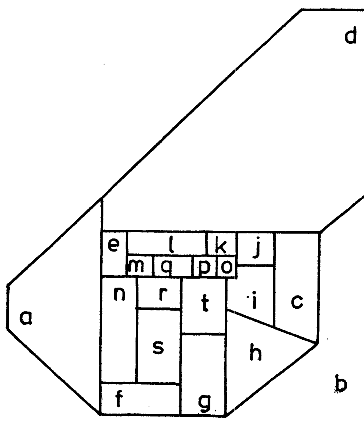
Ako bol vyriešený problém štyroch farieb

Juraj Bosák, Bratislava

Úvod

Ak vám začiatkom roku 1977 prišla poštová zásielka z Urbany v štáte Illinois (USA), mohli ste si na obálke prečítať záhadný nápis FOUR COLORS SUFFICE – štyri farby stačia. Tento nápis ohlasoval svetu víťazstvo ľudského ducha nad jedným z najznámejších a súčasne najťažších matematických problémov – nad problémom štyroch farieb.

V tomto článku sa zoznámime s podstatou a históriou problému štyroch farieb, načrtneme stručne spôsob jeho riešenia a pokúsime sa odpovedať na otázku, aký význam má pre matematiku jeho vyriešenie.



Obr. 1. Politická mapa.

1. Formulácia problému

Začnime s jednoduchým príkladom: Na obr. 1 je znázornená tzv. politická mapa s 20 štátmi, označenými písmenami $a, b, c, \ldots, t$. Štáty tejto mapy treba zafarbiť tak, aby susedné štáty mali vždy rôzne farby.

Pravda, takto formulovanú úlohu možno veľmi ľahko vyriešiť: stačí každý štát vyfarbiť inou farbou. Toto zafarbenie je však neúsporné a narazí na problémy nielen v tlačiarni, ale aj pri použití obyčajných farbičiek: nie každý má zásobu 20 rôznych farieb. Preto je rozumné pripustiť, aby sa tá istá farba na mape vyskytla viackrát – pravdaže, nie pri susedných štátoch. Matematik sa, prirodzene, opýta, aký najmenší počet farieb nám na zafarbenie tejto mapy potom postačí. Bez ťažkostí našu mapu zafarbíme pomocou 15, 10, ba i len 5 farieb. Po určitej (nie príliš veľkej) námahe zistíme, že nám na to postačia dokonca iba 4 farby.

Odporúčame čitateľovi, aby na tomto mieste čítanie článku prerušil, zohnal si červenú, modrú, zelenú a žltú farbičku a mapu naozaj vyfarbil. Odmenou mu bude nielen zničený exemplár časopisu, ale aj pocit uspokojenia z vyriešenia „malého problému štyroch farieb".

Ľahko zistíme, že počet farieb už ďalej znižovať – vo všeobecnosti – nemožno: ani štát m spolu s jeho 5 susedmi e, l, q, r a n už 3 farbami nezafarbíme. Ak je totiž m zafarbené prvou farbou, zvyšné dve farby by sa museli pozdĺž jeho hranice striedať, čo je pri nepárnom počte 5 susedných štátov nemožné.

Naskytá sa otázka, či existujú mapy, na zafarbenie ktorých 4 farby nepostačia – a v tom je práve podstata problému štyroch farieb. Aby sme však mohli poblém skúmať z matematického hľadiska, musíme si ho spresniť a pridať niekoľko podmienok – ich porušenie by mohlo výsledok problému zmeniť. Predovšetkým každá uvažovaná mapa bude ležať v jedinej rovine (alebo na guľovej ploche, čo predstavuje ekvivalentný problém). Ďalej, na mape okrem štátov nič nefarbíme – teda ani moria a ďalšie vodné plochy. Ak by sa na mape vyskytovali a nepatrili do žiadneho štátu, buď ich z mapy vynecháme, alebo ponecháme nezafarbené. Ďalej predpokladáme, že územie každého štátu je súvislé, jeho hranica však môže byť aj nesúvislá; môže ju tvoriť jedna alebo viac (konečný počet) uzavretých jordanovských čiar, napr. mnohouholníkov, kružníc a pod. Nepripúšťame teda štáty s kolóniami alebo s územím skladajúcim sa z viacerých oddelených častí.

Aby sme si našu úlohu trochu zjednodušili, budeme predpokladať, že počet štátov v mape je konečný (hoci možno dokázať, že vynechaním tejto podmienky sa výsledok nezmení).

Problém štyroch farieb sa teraz dá formulovať takto: Možno štáty každej mapy spĺňajúcej uvedené podmienky regulárne zafarbiť štyrmi farbami, t. j. priradiť im po jednej zo štyroch daných farieb tak, aby susedné štáty mali priradené vždy rôzne farby? Pritom štáty nazývame *susednými*, ak majú spoločný úsek hraničnej čiary, nie však iba jeden alebo viac izolovaných bodov.

Možno ešte namietnuť, že formulácia problému štyroch farieb obsahuje nedefinované pojmy mapa, štát a farba. Preto v tretej a štvrtej časti článku tieto pojmy spresníme, prípadne nahradíme matematickými pojmami.

2. História problému

Keby matematické problémy mali svoje pomníky, na pomníku nášho problému by sme mohli čítať asi takýto nápis:

PROBLÉM ŠTYROCH FARIEB

* 23. X. 1852

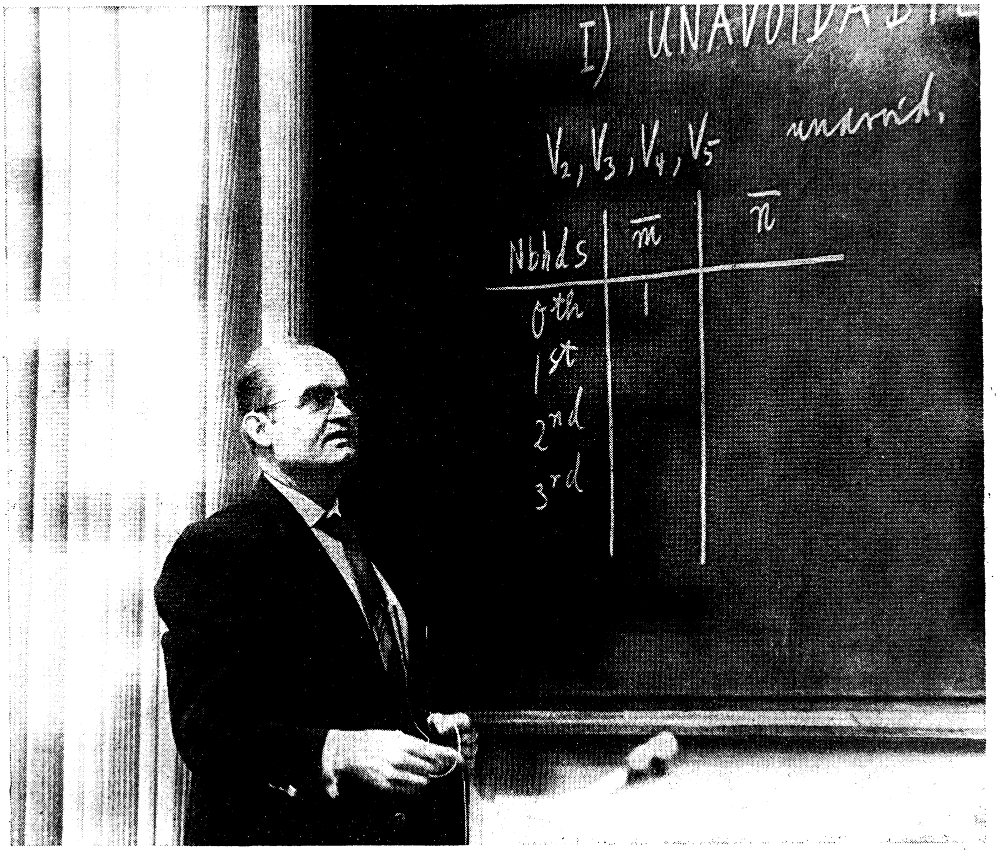
† 21. VI. 1976

Spi sladko!

W. Haken a K. Appel

Proti každej časti tohto nápisu však možno vzniesť námietky. Nebudeme sa zaoberať (prípadnou) námietkou jazykovedcov, že problém by sa mal skôr nazývať „problém o štyroch farbách", ale sústredíme sa radšej na ďalšie riadky nápisu.

Hneď na začiatok poznamenajme, že história problému štyroch farieb (pozri napr. [3, 5, 7, 9, 11]) je plná omylov historických i matematických. V minulosti sa často tvrdilo, že problém štyroch farieb po prvý raz položil A. F. Möbius okolo r. 1840. Zdá sa však, že ide o zámenu s podstatne ľahším problémom o existencii piatich navzájom susedných štátov (odpoveď je tu záporná). Podľa dnešného stavu výskumu sa autorstvo problému pripisuje anglickému matematikovi Francisovi Guthriemu, ktorý na neho narazil pri farbení mapy grófstiev Anglicka. Jeho brat Frederick Guthrie 23. októbra 1852 oznámil problém svojmu profesorovi A. De Morganovi, ktorý ešte toho istého dňa o ňom napísal W. R. Hamiltonovi. Tento list, uložený v archíve v Dubline (Írsko), je najstarším písaným dokumentom o probléme; v tlači bol problém štyroch farieb po prvý raz uvedený pravdepodobne v De Morganovej recenzii knihy W. Whewella, ktorá vyšla v periodiku Athenaeum 14. apríla 1860, avšak okrem niekoľkých výnimiek ostal nepovšimnutý. Po druhý raz sa problém štyroch farieb „narodil" až 13. júna 1878, keď ho A. Cayley predniesol na zasadaní londýnskej matematickej spoločnosti. (Sté výročie tejto udalosti bolo oslávené v londýnskej televízii krátkou reláciou, ktorú sledovalo vyše 10 miliónov divákov.) V r. 1879 Cayley uverejnil článok o probléme štyroch farieb v prácach kráľovskej geografickej spoločnosti. Od r. 1878 sa objavilo v tlači veľa zdanlivých dôkazov pravdivosti hypotézy o štyroch farbách, v ktorých sa neskôr našli chyby. Z nich sú najznámejšie pokusy A. B. Kempeho (1879 a 1880) a P. G. Taita (1878–1880), ktoré mali aj pozitívny význam, lebo použili nové metódy, ktoré neskôr viedli k pokroku v riešení problému. Kempeho dôkaz indukciou vzhľadom na počet štátov sa považoval za správny až do r. 1890, keď P. J. Heawood našiel v ňom chybu, ale ukázal, že Kempeho metódy umožňujú ukázať, že na zafarbenie každej mapy v rovine stačí päť farieb. Mnohí si však Heawoodovej práce nevšimli a naďalej považovali dôkazy Kempeho a Taita za správne. V ďalšom období najzávažnejšie príspevky k problému štyroch farieb priniesli G. D. Birkhoff (1912–13 a 1930), O. Veblen (1912–13), A. Errera (1925) a H. Whitney (1932). P. Franklin (1922) dokázal, že hypotéza o štyroch farbách platí pre všetky mapy s počtom štátov menším než 26. C. N. Reynolds (1926–27) zlepšil tento odhad na 28, C. E. Winn (1938) na 36, O. Ore a J. Stemple (1970) na 40 a W. Stromquist (1975) na 52. No až práca W. Hakena a K. Appela zakončená 21. júna 1976 (predbežné oznámenie výsledku bolo publikované v [2])

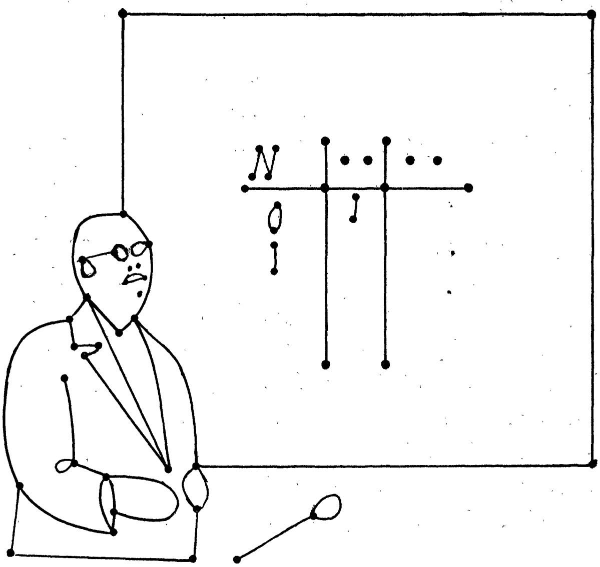


Obr. 2. W. Haken na Medzinárodnom kongrese matematikov (Helsinki 1978).

priniesla zásadnú zmenu, keď túto hranicu celkom vygumovala. Prečo teda námietky k posledným trom riadkom nápisu? Po prvé, ich práca [3, 4] vyšla až v septembri 1977 a trvalo do r. 1978, kým prekonala nedôveru a získala všeobecné uznanie (na obr. 2 je W. Haken pri vysvetľovaní riešenia problému štyroch farieb na ICM 78 – Medzinárodnom kongrese matematikov, ktorý sa konal v Helsinkách v auguste 1978). Pôvodná nedôvera súvisela najmä s použitím počítačov. Ešte bolo v živej pamäti, ako Y. Shimamoto v októbri 1971 vystúpil s údajným dôkazom hypotézy o štyroch farbách s rozsiahlym využitím počítačov (pozri [13]). Nakoniec zásluhou W. T. Tutteho a ďalších sa našla chyba v programe pre počítač, ktorý nesprávne označil istú konfiguráciu za D-reducibilnú. Ten istý Tutte však prijal dôkaz Appela a Hakena s dôverou. Po druhé, ani poznámka o „sladkom spánku" nie je celkom namieste – bolo by žiadúce dôkaz podrobne preveriť a pokúsiť sa ho zjednodušiť. A po tretie, nie je jasné, či za riešiteľov problému treba považovať len uvedenú dvojicu autorov, alebo či je správne zásluhy rozdeliť rovným dielom aj na tretieho spoluautora J. Kocha, ktorý sa podieľal najmä na príprave programov pre počítače. Ako vidno, historici budú mať ešte čo robiť. A my sa teraz budeme radšej venovať matematickej stránke problému.

3. Rovinné grafy

Prv než začneme rigoróznejšie úvahy, ujasníme si niekoľko základných pojmov. Pod *grafom v rovine R* alebo *rovinným grafom* (stručne len *grafom*) budeme v tomto článku rozumieť usporiadanú dvojicu $G = [V, H]$, kde V a H sú konečné množiny spĺňajúce nasledujúce podmienky $\mathbf{G}_1$ až $\mathbf{G}_5$. Aby sme sa mohli ľahšie vyjadrovať, bude-



Obr. 3. Rovinný graf.

me prvky množiny V nazývať *vrcholmi* a prvky množiny H – *hranami* grafu G. Na obr. 3 je príklad rovinného grafu s 54 vrcholmi a 53 hranami.*) Spomínané podmienky $\mathbf{G}_1$ až $\mathbf{G}_5$ sú tieto:

$\mathbf{G}_1$. Každý vrchol je bodom danej roviny (t. j. $V \subseteq R$).

$\mathbf{G}_2$. Každá hrana sa skladá z bodov danej roviny (t. j. $\cup H \subseteq R$) a je čiarou spájajúcou buď dva rôzne vrcholy (vtedy sa nazýva *linka*), alebo jeden vrchol sám so sebou (vtedy sa nazýva *slučka*); krajné body tejto čiary sú vrcholmi; nijaký vnútorný bod tejto čiary nie je vrcholom (grafu G).

$\mathbf{G}_3$. Každá linka grafu G je *jordanovským oblúkom*, t. j. čiarou homeomorfnou s úsečkou (napr. úsečka, kružnicový oblúk, neuzavretá jednoduchá lomená čiara).

$\mathbf{G}_4$. Každá slučka grafu G je *uzavretou jordanovskou čiarou*, t. j. čiarou homeomorfnou s kružnicou (napr. kružnica, elipsa, uzavretá jednoduchá lomená čiara).

$\mathbf{G}_5$. Každý spoločný prvok dvoch rôznych hrán je vrcholom (grafu G). (Z toho vyplýva, že dve rôzne hrany buď nemajú ani jeden spoločný prvok, alebo práve jeden, alebo práve dva.)

Základom našej definície sú vlastnosti $\mathbf{G}_1$ a $\mathbf{G}_2$. Z vlastností $\mathbf{G}_3$ a $\mathbf{G}_4$ vyplýva, že hrany nepretínajú samy seba. Z vlastnosti $\mathbf{G}_5$ nasleduje, že hrana nepretína iné hrany (iba ak v spoločných krajných bodoch – vrcholoch).

*) Za nakreslenie tohto grafu ďakujem svojej dcére Elene.

V našej definícii grafu sme požadovali, aby V a H boli konečné množiny, obmedzili sme sa teda len na tzv. *konečné grafy*. Naše úvahy o rovinných grafoch možno rozšíriť aj na niektoré nekonečné grafy; tie však nebudeme potrebovať, keďže sme sa už predtým obmedzili na mapy s konečným počtom štátov.

Rovinné grafy $G = [V, H]$ a $G' = [V', H']$ nazývame *izomorfné*, ak existuje prosté zobrazenie (bijekcia) f množiny V na V' a bijekcia g množiny H na H' s vlastnosťou: Ak v grafe G hrana h spája vrcholy u, v, tak v grafe G' hrana $g(h)$ spája vrcholy $f(u)$, $f(v)$. Rovinný graf $G' = [V', H']$ nazývame *podgrafom* rovinného grafu $G = [V, H]$, ak $V' \subseteq V$ a $H' \subseteq H$.

Utvorme množinu B všetkých bodov roviny R, ktoré sú buď vrcholmi daného rovinného grafu $G = [V, H]$, alebo ležia na hranách grafu G. Ani množina B, ani jej komplement $R \setminus B$ nemusia byť súvislé množiny (v zmysle topológie roviny) — môžu sa skladať z jednej alebo viacerých *komponentov súvislosti* (maximálnych súvislých podmnožín). Z bodov každého komponentu súvislosti množiny B možno zostaviť podgraf grafu G, ktorý sa nazýva *komponent grafu* G. Graf s jediným komponentom sa nazýva *súvislý*. Na druhej strane, môžeme skúmať komponenty súvislosti množiny $R \setminus B$; tieto komponenty sa nazývajú *stenami grafu* G. Množinu všetkých komponentov grafu G budeme označovať znakom K, množinu všetkých stien — znakom S. Možno dokázať, že ak graf G je konečný, tak aj množiny K a S sú konečné. Napr. rovinný graf z obr. 3 má 16 stien a 16 komponentov. Obr. 1 môžeme považovať za znázornenie rovinného grafu, ktorý má 36 vrcholov, 54 hrán, 20 stien a 1 komponent (ak za vrcholy považujeme práve tie body, v ktorých sa stretávajú hranice troch štátov).

Medzi počtom vrcholov, hrán, stien a komponentov rovinného grafu platí *Eulerova formula*

$$|V| - |H| + |S| = |K| + 1,$$

pričom symbolom $|X|$ označujeme počet prvkov množiny X. Eulerovu formulu možno ľahko dokázať indukciou vzhľadom na počet $|H|$ hrán pri pevnom počte $|V|$ vrcholov.

V každom rovinnom grafe je práve jedna zo stien neohraničená; nazývame ju *vonkajšia stena*. Ostatné steny sa nazývajú *vnútorné*.

Pod *stupňom vrcholu* grafu rozumieme počet hrán, ktoré z neho vychádzajú (slučku počítame za dve hrany). Ak n je prirodzené číslo, tak *n-uholníkom grafu G* rozumieme súvislý podgraf G' grafu G, pričom každý vrchol z G' má v podgrafe G' stupeň 2. Tak v grafe z obr. 3 ľahko nájdeme n-uholník pre každé prirodzené číslo $n \leqq 18$ okrem $n = 13$ a $n = 17$.

Vrcholy a hrany, ktoré ležia na hranici určitej steny s grafu G, tvoria podgraf grafu G. Ak je týmto podgrafom n-uholník, nazývame stenu s *n-uholníkovou stenou*.

Súvislý rovinný graf nazývame *konfiguráciou*, ak sú všetky jeho vnútorné steny trojuholníkové. Konfigurácia zrejme nemôže obsahovať jednouholníky (teda ani slučky). Príklady konfigurácií sú na obr. 4 a 6—9 (z ďalších častí článku).

Konfiguráciu nazývame *trianguláciou*, ak má aj vonkajšiu stenu trojuholníkovú. Zrejme konfigurácia z obr. 4 je trianguláciou. Ľahko zistíme, že v triangulácii sa nemôžu vyskytovať jednouholníky ani vrcholy stupňa 0 a 1. O trianguláciách platí nasledujúci zaujímavý vzťah, ktorý vyplýva z Eulerovej formuly:

Lema 1. *Ak v_i ($i \geqq 2$) je počet vrcholov stupňa i v určitej triangulácii, tak*

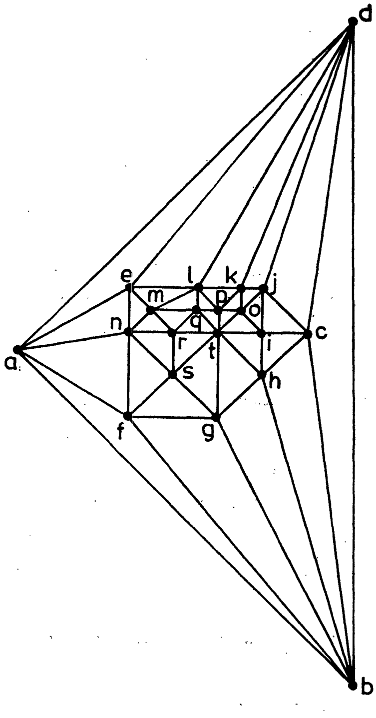
$$4v_2 + 3v_3 + 2v_4 + v_5 = 12 + v_7 + 2v_8 + 3v_9 + \ldots$$

Dôkaz. Označme množinu všetkých vrcholov, hrán, stien, resp. komponentov danej triangulácie znakmi V, H, S, resp. K. Zrejme platí:

$$|V| = \sum_{i=2}^{\infty} v_i ,$$

$$2|H| = 3|S| = \sum_{i=2}^{\infty} iv_i ,$$

$$|K| = 1 .$$



Obr. 4. Triangulácia.

Ak Eulerovu formulu vynásobíme šiestimi a dosadíme uvedené vzťahy, po malej úprave dostaneme

$$\sum_{i=2}^{\infty} (6 - i)\, v_i = 12 ,$$

odkiaľ vyplýva požadovaný vzťah. Lema je dokázaná.

Trianguláciu nazývame *jednoduchou*, ak nemá dvojuholníky, vrcholy stupňa $\leqq 4$, ani trojuholníky netvoriace hranicu žiadnej steny. Čitateľ sa ľahko môže presvedčiť, že triangulácia z obr. 4 je jednoduchá. Z lemy 1 vyplýva, že každá jednoduchá triangulácia (vtedy $v_2 = v_3 = v_4 = 0$) má aspoň 12 vrcholov stupňa 5.

Dve steny rovinného grafu G sa nazývajú *susedné*, ak sú navzájom rôzne a ak prienik ich hraníc obsahuje aspoň jednu hranu grafu G. Pod *zafarbením stien grafu G* štyrmi farbami rozumieme zobrazenie množiny S do danej štvorprvkovej množiny F (napr. $F = \{1, 2, 3, 4\}$); prvky množiny F nazývame *farby*. Zafarbenie stien nazývame *regulárne*, ak susedné steny majú vždy priradené rôzne farby. V ďalšej časti článku tieto pojmy využijeme na spresnenie formulácie problému štyroch farieb (presnejšie, hypotézy o štyroch farbách).

4. Prvá redukcia problému

Teraz ukážeme, ako možno problém štyroch farieb postupne previesť do tvaru vhodného na riešenie.

Prvá redukcia spočíva v prechode od „geografickej" do „matematickej" formulácie problému. Potrebný aparát sme si už vybudovali v 3. časti článku.

Majme geografickú (politickú) mapu, ktorej štáty treba zafarbiť, vhodným spôsobom ohraničenú (napr. obdĺžnikom). Predpokladáme, že územie každého štátu je na mape súvislé, že sú vyznačené hranice štátov i vodné plochy, ktoré majú ostať nezafarbené. Mapu považujeme za vnorenú do istej roviny R, takže nemusíme rozlišovať medzi bodmi (a ďalšími útvarmi) na mape a zodpovedajúcimi bodmi v rovine R.

Tejto mape možno prirodzeným spôsobom priradiť graf G v rovine R, ktorého vrcholy i hrany ležia na hraniciach štátov, vodných plôch a samotnej mapy, pričom ich rozmiestnenie volíme tak, aby zjednotenie všetkých hrán splývalo so zjednotením uvedených hraníc.

Je zrejmé, že z regulárneho zafarbenia stien rovinného grafu G štyrmi farbami dostaneme i regulárne zafarbenie štátov pôvodnej geografickej mapy štyrmi farbami – stačí vynechať steny, ktoré nie sú štátmi (teda vodné plochy a vonkajšiu stenu ležiacu mimo okraj mapy). Mohli by sme síce zafarbiť aj tieto steny štyrmi farbami; keby sme však požadovali, aby všetky vodné plochy boli zafarbené tou istou farbou – napr. modrou, vo všeobecnosti by sme nevystačili so štyrmi farbami, ale by sme potrebovali päť farieb (ako príklad poslúži mapa z obr. 1 doplnená jazerom vnútri každého štátu).

Videli sme, že pôvodný „geografický" problém bude vyriešený, ak dokážeme platnosť nasledujúcej hypotézy:

Hypotéza o štyroch farbách. *Steny každého rovinného grafu možno regulárne zafarbiť štyrmi farbami.*

5. Druhá redukcia problému

Pri druhej redukcii problému štyroch farieb zafarbenie stien rovinného grafu prevedieme na zafarbenie vrcholov (iného) rovinného (tzv. duálneho) grafu. Teraz budeme priraďovať farby (prvky štvorprvkovej množiny F) vrcholom rovinného grafu a toto priradenie nazveme *zafarbením vrcholov grafu* štyrmi farbami. Takéto zafarbenie nazveme *regulárne*, ak *susedné vrcholy* (t. j. dva rôzne vrcholy spojené hranou) budú mať priradené vždy rôzne farby. Pri hodnotení regulárnosti zafarbenia nebudeme brať do úvahy okolnosť, či rovinný graf má slučky.

Ako príklad využijeme opäť rovinný graf z obr. 4, ktorý možno takýmto spôsobom zafarbiť, ako ukazuje nasledujúce priradenie farieb vrcholom:

vrcholy $a, g, i, l, r \rightarrow$ červená farba
vrcholy $b, e, j, p, s \rightarrow$ modrá farba
vrcholy $c, f, k, m, t \rightarrow$ zelená farba
vrcholy $d, h, n, o, q \rightarrow$ žltá farba

Čitateľ si zaiste uvedomil, že tým sme vlastne vyriešili úlohu regulárne zafarbiť štyrmi farbami štáty mapy z obr. 1. Preto asi nebude prekvapený nasledujúcim výsledkom.

Lema 2. *Hypotéza o štyroch farbách je správna, ak vrcholy každého rovinného grafu možno regulárne zafarbiť štyrmi farbami.*

Dôkaz. Nech je daný rovinný graf G. Zostrojíme tzv. duálny graf G^* ku grafu G.*) Zvoľme vnútri každej steny s grafu G jeden bod V_s („hlavné mesto štátu") a prehlásme ho vrcholom duálneho grafu G^*. Dva nové vrcholy spojme (práve jednou) hranou práve vtedy, keď sú príslušné steny susedné. Pôvodné vrcholy a hrany z grafu vynechajme. Ľahko sa zistí, že nové hrany možno viesť tak, aby vznikol opäť rovinný graf — označme ho G^* a nazvime *duálny graf* ku grafu G. (Na obr. 4 je duálny graf k rovinnému grafu z obr. 1.)

Ak možno vrcholy každého rovinného grafu regulárne zafarbiť štyrmi farbami, zafarbime takto vrcholy grafu G^*. Ďalej zafarbime steny grafu G tak, že farba steny s sa zhoduje s farbou vrcholu V_s pri predošlom zafarbení vrcholov grafu G^*. Zrejme vznikne regulárne zafarbenie stien grafu G štyrmi farbami. Lema je dokázaná.

6. Tretia redukcia problému

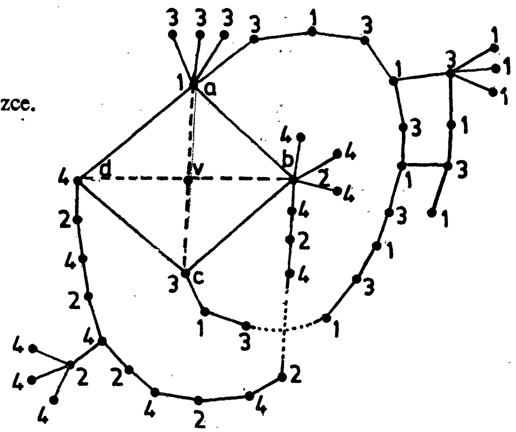
Ukazuje sa, že množina všetkých rovinných grafov, s ktorou narábanie predpokladá lema 2, je pre ďalšie skúmanie problému príliš široká. Pohodlnejšie sa nám bude pracovať, ak túto triedu zúžime. A ďalšia redukcia problému štyroch farieb (lema 4) ukazuje, že namiesto všetkých rovinných grafov stačí sa zaoberať len jednoduchými trianguláciami, prípadne iba ireducibilnými jednoduchými trianguláciami. Pritom rovinný graf sa nazýva *ireducibilný* (alebo tiež *minimálny 5-chromatický*), ak jeho vrcholy nemožno regulárne zafarbiť štyrmi farbami, ale v každom grafe s menším počtom vrcholov tieto vrcholy už možno takto zafarbiť. Našou snahou bude práve ukázať, že ireducibilný graf musí spĺňať toľko podmienok, že vôbec nemôže existovať.

Prvý krok tohto typu je skrytý v nasledujúcej leme. Pre jej dôkaz budeme potrebovať dôležitý pojem Kempeho reťazca (jeho podrobnejší rozbor je napr. v [13]): Nech je dané regulárne zafarbenie vrcholov grafu G, nech α, β sú dve z použitých farieb a nech je daný

*) Pre naše účely sme definíciu trochu zjednodušili. Bežnejšiu definíciu duálneho grafu nájde čitateľ napr. v [11].

vrchol u, zafarbený jednou z týchto dvoch farieb. Utvorme podgraf grafu G *indukovaný* vrcholmi farieb α a β (t. j. skladajúci sa zo všetkých takýchto vrcholov a hrán spájajúcich vždy dva takéto vrcholy). Komponenty tohto podgrafu sa nazývajú *Kempeho $\alpha\beta$-reťazce* grafu G(vzhľadom na dané zafarbenie vrcholov), a ten z nich, ktorý obsahuje vrchol u, sa nazýva *Kempeho $\alpha\beta$-reťazec z vrcholu u*. Na obr. 5 sú znázornené Kempeho 13-reťazce a 24-reťazce. Hlavný vtip pojmu Kempeho $\alpha\beta$-reťazca je, že po jeho alternácii (t. j. zámene farieb α a β pri všetkých vrcholoch reťazca) vznikne opäť regulárne zafarbenie vrcholov daného grafu.

Obr. 5. Kempeho reťazce.



Lema 3. *Ak existuje ireducibilný rovinný graf, existuje aj ireducibilná jednoduchá triangulácia s tým istým počtom vrcholov.*

Dôkaz. Predpokladajme, že existuje ireducibilný rovinný graf G. Zrejme G má aspoň päť vrcholov (inak by sa jeho vrcholy dali regulárne zafarbiť štyrmi farbami). Vynechajme z grafu G všetky slučky; ak G má skupiny hrán spájajúce tú istú dvojicu vrcholov (tzv. *násobné hrany*), vynechajme z každej skupiny všetky hrany okrem jednej. Vznikne graf G', ktorý nemá jednouholníky ani dvojuholníky. Ak sa na hranici niektorej steny grafu G' vyskytujú dva rôzne vrcholy, ktoré nie sú susedné, spojme ich cez túto stenu novou hranou tak, aby vznikol opäť rovinný graf. Opakujme tento postup tak dlho, kým je to možné. Nakoniec vznikne graf G'', o ktorom možno dokázať, že je trianguláciou. Zrejme G'' má ten istý počet vrcholov ako G a je to opäť ireducibilný graf (keby existovalo regulárne zafarbenie jeho vrcholov štyrmi farbami, bolo by to aj regulárne zafarbenie vrcholov pôvodného grafu). Dokážeme, že triangulácia G'' je jednoduchá.

Z konštrukcie grafu G'' vyplýva, že tento graf nemá dvojuholníky. Pripusťme, že v G'' existuje trojuholník T, ktorý netvorí hranicu žiadnej steny. Z toho vyplýva, že vnútri i zvonku trojuholníka T existuje aspoň jeden vrchol. Utvorme z grafu G'' graf G_1 (resp. G_2) tým, že z G'' vynecháme všetky vrcholy a hrany ležiace vnútri (resp. zvonku) trojuholníka T. Z regulárnych zafarbení vrcholov grafov G_1 a G_2 štyrmi farbami ľahko zostrojíme takéto zafarbenie aj pre graf G'', čo je však v spore s predpokladom, že G'' je ireducibilný graf.

Pripusťme, že v G'' existuje vrchol v stupňa $\leqq 4$. Ak vynecháme z grafu G'' vrchol v a hrany z neho vychádzajúce, vznikne graf G''', ktorý má menší počet vrcholov než graf G''. Keďže G'' je ireducibilný graf, existuje regulárne zafarbenie vrcholov štyrmi farbami pre graf G''', nie však pre graf G''. Z toho vyplýva, že vrchol v má stupeň 4 (inak by sme zafarbenie z G''' ľahko rozšírili na G'') a všetky štyri s ním susedné vrcholy (označme ich v smere pohybu hodinových ručičiek znakmi a, b, c, d) majú rôzne farby (označme tieto farby v danom poradí znakmi 1, 2, 3, 4) — pozri obr. 5. Rozoznávajme tri prípady:

1. V grafe G''' Kempeho 13-reťazec z vrcholu a neobsahuje vrchol c. V tom prípade po jeho *alternácii* (t. j. zámene farieb 1 a 3 všetkých jeho vrcholov) vznikne opäť regulárne zafarbenie vrcholov štyrmi farbami, v ktorom vrchol a bude mať farbu 3 a vrchol v bude možné zafarbiť farbou 1 — spor s tým, že graf G'' nemožno regulárne zafarbiť štyrmi farbami.

2. V G''' Kempeho 24-reťazec z vrcholu b neobsahuje vrchol d. Po jeho alternácii vrchol b získa farbu 4 a vrchol v možno zafarbiť farbou 2 — opäť spor.

3. V G''' Kempeho 13-reťazec z vrcholu a obsahuje c a Kempeho 24-reťazec z vrcholu b obsahuje vrchol d. Keďže ide o rovinný graf, tieto reťazce sa musia pretínať (pozri obr. 5). Nemôžu sa však pretínať vnútri hrán (podľa vlastnosti $\mathbf{G}_5$ rovinných grafov), preto musia mať spoločný vrchol. Ten musí byť zafarbený jednou z farieb 1 a 3, i jednou z farieb 2 a 4, čo je nemožné.

Teda G'' je jednoduchá (ireducibilná) triangulácia a dôkaz lemy je hotový.

Z lemy 2 a 3 bezprostredne vyplýva:

Lema 4. *Hypotéza o štyroch farbách je správna, ak vrcholy každej jednoduchej triangulácie možno regulárne zafarbiť štyrmi farbami (t. j. ak neexistuje ireducibilná jednoduchá triangulácia).*

7. Štvrtá redukcia problému

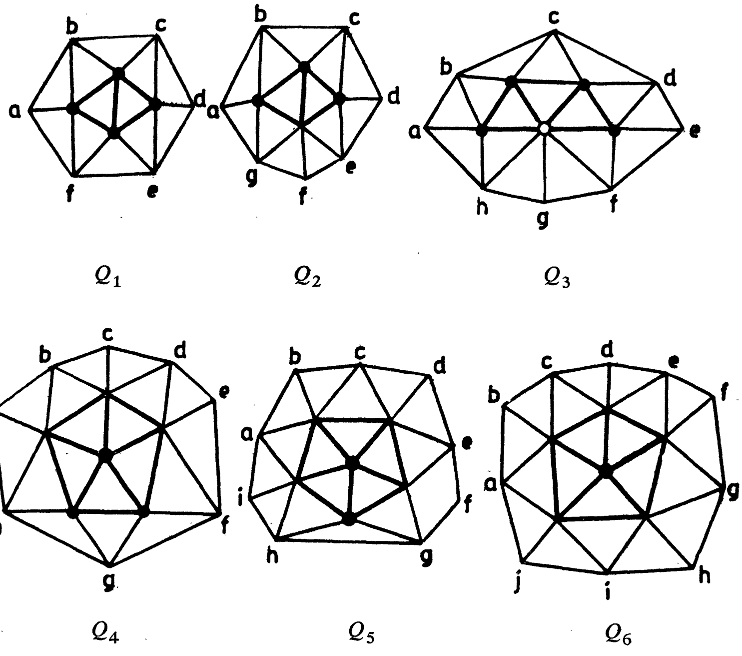
Aby sme mohli vykonať štvrtú (a poslednú) redukciu problému štyroch farieb, potrebujeme si povedať trochu viac o konfiguráciách.

Ak v nejakej triangulácii zvolíme jeden n-uholník a vynecháme všetky vrcholy a hrany ležiace zvonka neho (ponecháme však ich krajné vrcholy ležiace na n-uholníku), vznikne konfigurácia. Číslo n (počet hrán tzv. *obvodového mnohouholníka*) nazývame *rádom* tejto konfigurácie. Napr. prvá konfigurácia Q_1 z obr. 6 (známa pod názvom *Birkhoffov diamant*) má rád 6, druhá Q_2 — 7, tretia Q_3 a štvrtá Q_4 — 8, piata Q_5 — 9 a šiesta Q_6 — rád 10. Pri vrcholoch ležiacich vnútri obvodového mnohouholníka sme použili symboliku zavedenú HEESCHOM [10]: vrcholy stupňa 5 sú označené plným krúžkom, vrcholy stupňa 6 sa osobitne nevyznačujú, vrcholy stupňa 7 sa označujú prázdnym krúžkom, vrcholy stupňa 8 — prázdnym štvorčekom, vrcholy stupňa 9 — trojuholníkom, vrcholy stupňa 10 — päťuholníkom a vrcholy vyššieho stupňa — príslušným číslom. Bodka označuje vrchol stupňa $\geqq 6$ a neúplný krúžok (napr. v tvare U) vrchol stupňa $\geqq 7$. Táto symbolika má tú výhodu, že na opis konfigurácie potom stačia vrcholy ležiace vnútri obvodového mnohouholníka a ich spojnice (na obr. 6 vyznačené hrubými čiarami).

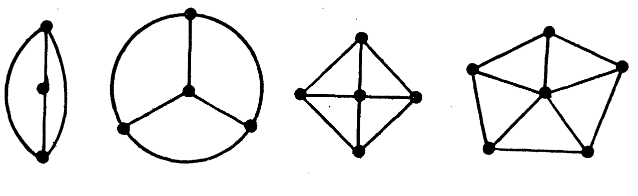
Dôležitú úlohu majú konfigurácie, ktoré sa nemôžu vyskytovať v žiadnom ireducibilnom grafe – nazývajú sa reducibilné. Presnejšie, konfigurácia sa nazýva *reducibilná*, ak nie je izomorfná žiadnemu podgrafu ireducibilného grafu. Pri dôkaze lemy 3 sme vlastne ukázali, že prvé tri konfigurácie z obr. 7 sú reducibilné. Dá sa dokázať, že aj každá zo šiestich konfigurácií znázornených na obr. 6 je reducibilná. K metódam dôkazu reducibility konfigurácií sa vrátime v 8. časti článku.

Ďalším dôležitým pojmom je pojem nevyhnutnej množiny (angl. *unavoidable set*). Ak máme dve množiny grafov, M_1 a M_2, budeme hovoriť, že M_1 je *množina nevyhnutná vzhľadom na* M_2, ak každý graf z M_2 má aspoň jeden podgraf izomorfný s niektorým grafom z M_1.

Z lemy 1 vyplýva, že každá rovinná triangulácia má vrchol stupňa 2, 3, 4 alebo 5. Preto množinu nevyhnutnú vzhľadom na množinu všetkých triangulácií tvoria napr. konfigurácie z obr. 7; v prípade jednoduchých triangulácií stačí jediný graf – posledný graf z obr. 7.



Obr. 6. Reducibilné konfigurácie.



Obr. 7. Množina konfigurácií nevyhnutná vzhľadom na množinu všetkých triangulácií.

Najčastejšie budeme skúmať množiny nevyhnutné vzhľadom na množinu všetkých ireducibilných jednoduchých triangulácií a budeme ich stručne nazývať *nevyhnutné množiny*. Je zrejmé, že posledný graf z obr. 7 tvorí nevyhnutnú množinu aj v tomto zmysle. K metódam dokazovania nevyhnutnosti množín sa vrátime v 9. časti článku.

A teraz už môžeme vyjadriť poslednú redukciu problému štyroch farieb:

Lema 5. *Hypotéza o štyroch farbách je správna, ak existuje nevyhnutná množina reducibilných konfigurácií.*

Dôkaz. Nech N je nevyhnutná množina reducibilných konfigurácií. Keby hypotéza o štyroch farbách bola nesprávna, existoval by podľa lemy 2 ireducibilný graf a podľa lemy 3 ireducibilná jednoduchá triangulácia t. Keďže N je nevyhnutná množina, obsahuje aspoň jednu konfiguráciu k, ktorá je izomorfná s niektorým podgrafom triangulácie t. Konfigurácia k je však reducibilná, takže triangulácia t obsahuje podgraf izomorfný s reducibilnou konfiguráciou, a teda nemôže byť ireducibilná. Tento spor dokazuje lemu.

Význam práce Appela, Hakena a Kocha [3, 4] je práve v tom, že dokázali:

Lema 6. *Existuje nevyhnutná množina reducibilných konfigurácií.*

Ako to urobili, stručne naznačíme v časti 10.

Z lemy 5 a 6 bezprostredne vyplýva:

Teoréma o štyroch farbách. *Steny každého rovinného grafu možno regulárne zafarbiť štyrmi farbami.*

A tak sa hypotéza o štyroch farbách zmenila na teorému.

Z predchádzajúcich úvah vidíme, že pre dôkaz teorémy o štyroch farbách stačí zostrojiť nevyhnutnú množinu reducibilných konfigurácií.*) Ako vôbec možno zostrojiť takú množinu? Je to ťažké? Na tieto otázky budeme hľadať odpoveď v ďalších častiach článku.

8. Reducibilné konfigurácie

Najprv si položme takéto otázky: Akým spôsobom možno zostrojiť reducibilné konfigurácie? A ako možno overiť, či je daná konfigurácia reducibilná?

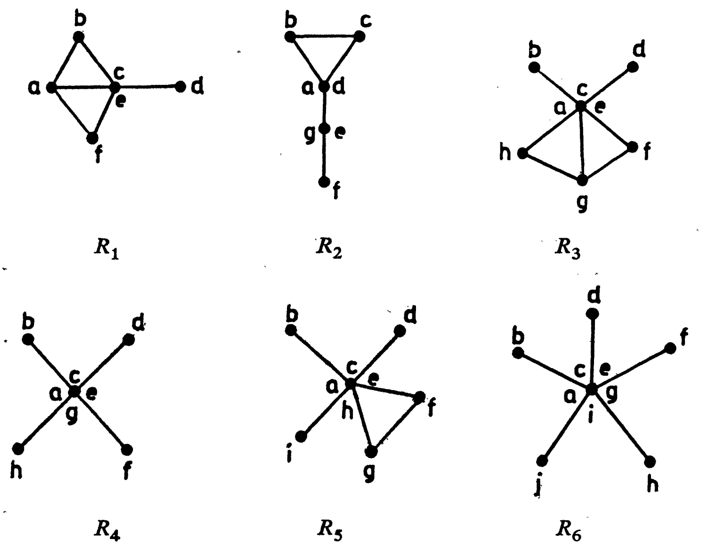
Spočiatku sa reducibilné konfigurácie hľadali viacmenej náhodným spôsobom. Postupne sa však stalo želateľným zaviesť do neustále vzrastajúceho počtu známych reducibilných konfigurácií nejaký systém. Najprirodzenejším spôsobom klasifikácie reducibilných konfigurácií sa ukázalo ich roztriedenie podľa rádu, t. j. podľa počtu hrán obvodového mnohouholníka.

Už r. 1913 G. D. Birkhoff dokázal, že sú reducibilné všetky konfigurácie rádu 2; konfigurácie rádu 3 obsahujúce viac než tri vrcholy, v ktorých vrcholy možno regulárne

*) Pozornejší čitateľ síce asi objaví v dôkazoch lem 1—3 menšie skoky, ktoré však možno doplniť starostlivejším využitím metód topológie roviny, najmä známej Jordanovej teorémy o tom, že uzavretá jordanovská čiara rozdeľuje rovinu na dve súvislé otvorené množiny. Čitateľovi, ktorého by zaujímala teória rovinných grafov dôsledne budovaná na tomto základe, odporúčame knihu [11].

zafarbiť štyrmi farbami; konfigurácie rádu 4 obsahujúce viac než štyri vrcholy a rádu 5 obsahujúce viac než šesť vrcholov. Preto sa záujem sústredil na konfigurácie rádu $\geqq 6$.

Na tomto mieste treba poznamenať, že po vyriešení problému štyroch farieb je vlastne každá konfigurácia reducibilná. Preto sa pojem reducibilnej konfigurácie obyčajne spresňuje v tom zmysle, že konfigurácia je *reducibilná*, ak možno štandardnými metódami dokázať, že nie je izomorfná žiadnemu podgrafu ireducibilného grafu (pričom treba stanoviť, čo sa rozumie pod štandardnými metódami). Zrejme každá konfigurácia, ktorá obsahuje ako podgraf reducibilnú konfiguráciu, je sama reducibilná. Preto sa ukazuje výhodným skúmať len *minimálne reducibilné konfigurácie* (ktoré už nemajú za podgraf iné reducibilné konfigurácie). Sústredeným úsilím mnohých autorov, ktoré bolo zavŕšené prácou dvojice F. Allaire a E. R. Swart [1], sa podarilo nájsť všetky takéto reducibilné konfigurácie rádu menšieho než 12. Ani táto veľká zásoba reducibilných konfigurácií však nestačí na zostrojenie nevyhnutnej množiny reducibilných konfigurácií: E. F. Moore zostrojil v marci 1977 rovinný graf s 846 vrcholmi (v duálnom tvare mapy s 846 stenami), ktorý neobsahuje žiadnu reducibilnú konfiguráciu rádu menšieho než 12.



Obr. 8. Reducéry konfigurácií z obr. 6.

Pokiaľ ide o metódy dôkazu reducibility, možno povedať, že sú založené na princípoch, ktoré objavil A. B. Kempe 1879–80, P. J. Heawood 1890 a G. D. Birkhoff 1913 a ktoré sme použili v dôkaze lemy 3, keď sme fakticky dokázali reducibilitu prvých troch konfigurácií z obr. 7: nahradenie konfigurácie konfiguráciou s menším počtom vrcholov (tzv. *reducérom*) a *metóda alternácie farieb* v Kempeho reťazcoch (pozri obr. 5). V prípade potreby sa táto alternácia môže opakovať na rôznych miestach konfigurácie a s rôznymi farbami. Najzaujímavejším spôsobom redukcie je tzv. *D-redukcia*, pri ktorej možno zvoliť ľubovoľný reducér s menším počtom vrcholov, pričom vrcholom hranice pôvodnej konfigurácie sú priradené vrcholy na obvode reducéra; ak sú susedné dva vrcholy z hranice pôvodnej konfigurácie, musia byť susedné aj ich obrazy. Pritom sa pripúšťa, že obrazy nesusedných vrcholov sú v reducéri susedné alebo dokonca splývajú. Napr. možno ukázať, že konfigurácie Q_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$) z obr. 6 majú reducéry R_i z obr. 8. Vo všetkých týchto príkladoch možno reducér zostrojiť z obvodového mnohouholníka vhodnou identifikáciou niektorých vrcholov a pridaním niektorých uhlopriečok – napr. R_1 vznikne z obvodového 6-uholníka konfigurácie Q_1 identifikáciou vrcholov c, e a pridaním uhlopriečky $ac = ae$. Pritom vnútorné vrcholy konfigurácie sa vynechávajú. Tento spôsob tvorby reducérov je veľmi častý, aj keď nie je jediný (niekedy nevystačíme len s obvodovými vrcholmi). Možno dokázať, že v prípade konfigurácie Q_1 až Q_5 ide o D-redukciu (hovoríme, že tieto konfigurácie sú *D-reducibilné*); v prípade konfigurácie Q_6 je to iba tzv. *C-redukcia*, keď reducér už nemožno voliť ľubovoľne. Čitateľa, ktorého by zaujímali rôzne druhy redukcií, odkazujeme na monografiu [10]. My sa tu obmedzíme na nasledujúci výsledok.

Lema 7. *Všetky konfigurácie z obr. 6 sú reducibilné.*

Dôkaz. Pripusťme, že konfigurácia Q_i ($i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) sa nachádza v niektorom ireducibilnom rovinnom grafe G (presnejšie, Q_i je izomorfné s niektorým podgrafom grafu G). Nahraďme v G konfiguráciu Q_i konfiguráciou (reducérom) R_i z obr. 8 tak, aby vrcholy a hrany zvonku konfigurácie ostali zachovalé. Vznikne rovinný graf H, ktorý má menší počet vrcholov než mal G, a preto jeho vrcholy možno regulárne zafarbiť štyrmi farbami. Dokážeme, že potom možno tak zafarbiť aj vrcholy grafu G, čo bude v spore s predpokladom, že G je ireducibilný graf. Aby sme to dokázali, stačí ukázať, že každé regulárne zafarbenie vrcholov konfigurácie R_i štyrmi farbami možno rozšíriť na obdobné zafarbenie konfigurácie Q_i, a to buď priamo, alebo použitím alternácií v Kempeho reťazcoch zvonku konfigurácie.

Nech $i = 1$. Ak označíme farby vrcholov a, b, c v konfigurácii R_1 znakmi 1, 2, resp. 3 a štvrtú farbu znakom 4, pre regulárne zafarbenie vrcholov a, b, c, d, e, f v danom poradí prichádzajú do úvahy tieto možnosti: 123132, 123134, 123232, 123234, 123432 a 123434. Ľahko si overíme, že vo všetkých šiestich prípadoch okrem tretieho toto zafarbenie možno rozšíriť na zafarbenie konfigurácie Q_1. V prípade zafarbenia 123232 použijeme Kempeho reťazce:

Ak Kempeho 24-reťazec z vrcholu d neobsahuje žiaden z vrcholov b, f, možno jeho alternáciou zmeniť farbu vrcholu d na 4 a dostávame už známu možnosť 123432, ktorú vieme doplniť na regulárne zafarbenie vrcholov konfigurácie Q_1.

Naopak, ak tento Kempeho 24-reťazec obsahuje napr. vrchol b (pre vrchol f je situácia symetrická), Kempeho 13-reťazec z vrcholu c nemôže obsahovať žiaden ďalší vrchol danej konfigurácie a alternáciou tohto 13-reťazca dostávame pre obvodový šesťuholník zafarbenie 121232, ktoré zrejme možno rozšíriť na regulárne zafarbenie vrcholov konfigurácie Q_1.

Analogicky sa postupuje v prípadoch $i = 2$ až 6. Podrobné dôkazy čitateľ nájde v [10, 11].

Skúsenosti ukazujú, že každá konfigurácia rádu $n \geqq 4$, ktorá má mimo n vrcholov obvodového n-uholníka ďalších

$$m > \tfrac{3}{2}n - 6$$

vrcholov, je reducibilná (dokonca D-reducibilná). Keby sa podarilo túto hypotézu dokázať, značne by sa situácia zjednodušila. Zdá sa však, že táto hypotéza je ešte ťažšia ako samotná hypotéza o štyroch farbách a experti sa vyslovujú veľmi skepticky o možnosti jej dokázania.

9. Nevyhnutné množiny konfigurácií

Na ilustráciu pojmu nezávislej množiny dokážeme nasledujúci výsledok, ktorý, voľne povedané, tvrdí, že každá jednoduchá triangulácia s menej než 26 vrcholmi obsahuje niektorú z konfigurácií znázornených na obr. 6.

Lema 8. *Konfigurácie z obr. 6 tvoria množinu nevyhnutnú vzhľadom na množinu všetkých jednoduchých triangulácií s menej než 26 vrcholmi.*

Dôkaz. Pripusťme, že existuje jednoduchá triangulácia t s menej než 26 vrcholmi, ktorej žiadny podgraf nie je izomorfný s niektorou konfiguráciou z obr. 6. V triangulácii t priraďme každému vrcholu stupňa i ($i = 5, 6, 7, \ldots$) číslo $60(6 - i)$, ktoré budeme nazývať *nábojom* tohto vrcholu. Potom zmeňme náboje takto: Z vrcholov stupňa 5 presuňme náboj s hodnotou 7 do všetkých susedných vrcholov stupňa 6 (t. j. z nábojov vrcholov stupňa 5 odčítajme číslo 7 toľkokrát, koľko má susedných vrcholov stupňa 6; k nábojom vrcholov stupňa 6 pripočítajme toľkokrát číslo 7, koľko má tento vrchol susedných vrcholov stupňa 5) a náboj 17,6 do všetkých susedných vrcholov stupňa $\geqq 7$. Dokážeme, že potom náboj $N(v)$ ľubovoľného vrcholu v bude $\leqq 28{,}4$.

Ak má vrchol v stupeň 5, musí mať aspoň jeden susedný vrchol stupňa $\geqq 7$ (inak by t obsahovalo podgraf izomorfný s niektorou konfiguráciou Q_1 až Q_6 z obr. 6). Ak je takýto vrchol stupňa $\geqq 7$ práve jeden, musia s vrcholom v byť susedné aspoň dva vrcholy stupňa 6 (inak by s vrcholom v museli byť susedné aspoň tri vrcholy stupňa 5 a t by obsahovalo konfiguráciu Q_1 alebo Q_2), a preto má náboj $N(v) \leqq 60 - 17{,}6 - 2 \,.\, 7 = 28{,}4$.

Ak sú takéto vrcholy stupňa $\geqq 7$ aspoň dva, vrchol v má náboj $N(v) \leqq 60 - 2 \,.\, 17{,}6 < 28{,}4$.

Ak má vrchol v stupeň 6, môžu s ním byť susedné najviac 4 vrcholy stupňa 5 (inak by t obsahovalo konfiguráciu Q_2). Potom v má náboj $N(v) \leqq 4 \,.\, 7 < 28{,}4$.

Ak má vrchol v stupeň 7, môže s ním byť susedných najviac 5 vrcholov stupňa 5 (inak by t obsahovalo konfiguráciu Q_3). Potom má však náboj $N(v) \leqq -60 + 5 \,.\, 17{,}6 < 28{,}4$.

Ak má vrchol v stupeň $j \geqq 8$, jeho náboj zrejme spĺňa vzťah
$N(v) \leqq 60(6 - j) + j \,.\, 17{,}6 = 360 - 42{,}4j \leqq 360 - 42{,}4 \,.\, 8 < 28{,}4$.

Presúvaním náboja sa síce niektoré náboje vrcholov zmenili, nie však ich celkový súčet. Ak označíme počet vrcholov triangulácie t znakom $|V|$, podľa lemy 1 platí: súčet nábojov všetkých vrcholov triangulácie t je (v_i je počet vrcholov stupňa i):

$$\sum_{i=5}^{\infty} v_i \, 60(6 - i) = 60 \,.\, 12 = 720 \leqq 28{,}4|V| \,,$$

takže

$$|V| \geqq \frac{720}{28{,}4} > 25\,,$$

čo odporuje tomu, že triangulácia t má $\leqq 25$ vrcholov. Lema je dokázaná.

Ako dôsledok predošlých výsledkov môžeme odvodiť teorému, ktorú poznal už Franklin r. 1922.

Teoréma. *Ak rovinný graf má menej než 26 stien, možno tieto steny regulárne zafarbiť štyrmi farbami.*

Dôkaz. Nech v rovinnom grafe G, ktorý má <26 stien, nemožno steny regulárne zafarbiť štyrmi farbami. Jeho duálny graf má <26 vrcholov, ktoré taktiež nemožno regulárne zafarbiť štyrmi farbami. Preto existuje ireducibilný rovinný graf, a podľa lemy 3 aj ireducibilná jednoduchá triangulácia t s <26 vrcholmi. Podľa lemy 8 triangulácia t obsahuje podgraf izomorfný s niektorou konfiguráciou z obr. 6. Podľa lemy 7 sú tieto konfigurácie reducibilné. To je však nemožné, lebo t je ireducibilná triangulácia. Tento spor dokazuje teorému.

Predchádzajúcimi výsledkami sme vlastne zostrojili nevyhnutnú množinu reducibilných konfigurácií, nie však vzhľadom na množinu všetkých ireducibilných jednoduchých triangulácií (čo by sa žiadalo pre dôkaz lemy 6), ale len vzhľadom na množinu všetkých (ak chceme, ireducibilných) jednoduchých triangulácií s menej než 26 vrcholmi. Toto číslo možno zjemnením úvah z dôkazu zvyšovať. No na úplné odstránenie ohraničenia počtu vrcholov (a teda na dôkaz teorémy o štyroch farbách) treba použiť podstatne zložitejší postup.

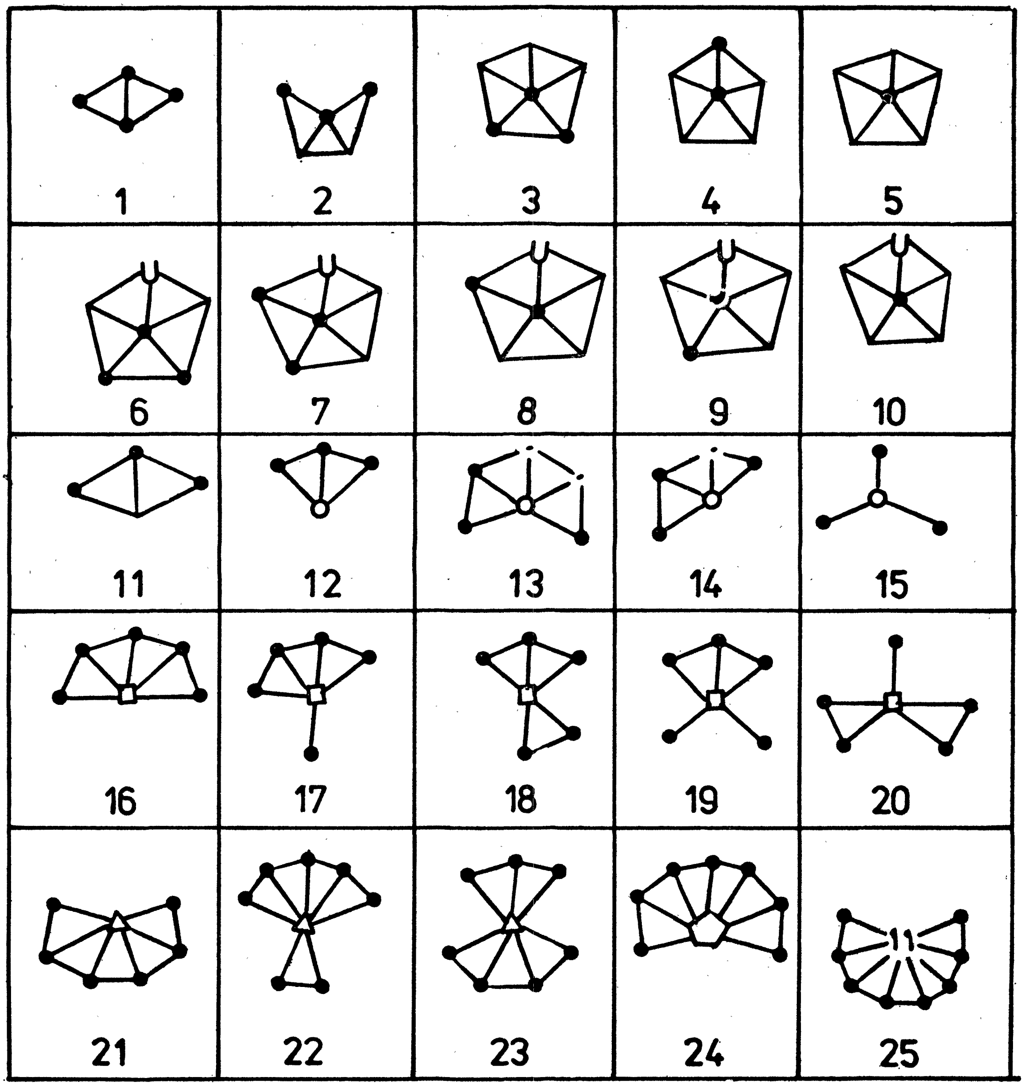
10. Zdolanie problému

Riešenie problému štyroch farieb v práci Appela a Hakena [3] sa začína podobne ako dôkaz našej lemy 8 a takisto používa terminológiu z *teórie elektrických sietí*. Každému vrcholu ireducibilnej jednoduchej triangulácie (podľa lemy 3 alebo 4 stačí sa zaoberať takýmito rovinnými grafmi) sa priradí reálne číslo, tzv. *náboj* vrcholu tak, aby len vrcholy stupňa 5 mali kladný náboj, ale aby i celkový súčet všetkých nábojov vrcholov bol kladný. Potom sa uskutoční *vybíjanie* (angl. *discharging procedure*), pri ktorom sa presúvajú náboje z vrcholov stupňa 5 na vrcholy vyšších stupňov tak, aby sa nemenil celkový súčet nábojov. Spravidla nie je ťažké zistiť všetky možnosti pre okolia vrcholov, ktoré budú mať po skončení vybíjenia kladný náboj a urobiť akýsi katalóg týchto konfigurácií s kladným nábojom niektorého vrcholu. Proces vybíjania je možné definovať dokonca tak dômyselne, aby každá z týchto konfigurácií bola reducibilná. Keďže sme však vyšli z ireducibilnej triangulácie, takéto konfigurácie v nej nemôžu existovať a daná triangulácia bude úplne vybitá, t. j. nebudú v nej existovať žiadne vrcholy s kladným nábojom (platí tzv. *lema o vybití — discharging lemma*). To však nie je možné, lebo súčet nábojov po vybíjacej procedúre sa nezmení. Teda musí ostať kladný, takže aspoň jedna zo zostrojených konfigurácií sa musí v triangulácii vyskytovať. Tento spor dokazuje teorému o štyroch farbách.

Všimnime si, že ide vlastne o zostrojenie nevyhnutnej množiny reducibilných konfigurácií podľa schémy z lemy 4 a 5. Treba povedať, že program dokázať takýmto spôsobom teorému o štyroch farbách vyhlásil už HEESCH, no zostrojiť nevyhnutnú množinu reducibilných konfigurácií sa mu nepodarilo. Zato však vybudoval teóriu reducibility, ktorá zohrala v ďalšom vývoji dôležitú úlohu. Pod vplyvom Heeschových myšlienok začali svoju prácu aj Haken a Appel. Na začiatku svojho postupu definovali náboje vrcholov rovnako ako my v našom dôkaze lemy 7: Vrcholy stupňa 5 mali náboj 60, vrcholy stupňa 6 náboj 0, vrcholy stupňa 7 náboj −60, vrcholy stupňa 8 náboj −120 atď. Pri vybíjaní sa najskôr presunul náboj 30 z každého vrcholu stupňa 5 do všetkých s ním susedných vrcholov stupňa aspoň 7. Ľahko sa zistí, že po tomto kroku kladný náboj môžu mať len vrcholy stupňa 5 až 11 a triangulácia musí obsahovať niektorú z 25 konfigurácií z obr. 9. Z nich je 11 reducibilných (konfigurácie 1−5, 11, 16, 21, 23−25). Naším cieľom je však to, aby všetky „kladné konfigurácie" boli reducibilné. Preto treba opraviť vybíjaciu procedúru tak, aby konfigurácie, pri ktorých nevieme dokázať reducibilitu, zo zoznamu vypadli a miesto nich sa tam dostali reducibilné konfigurácie. Appel a Haken boli nútení postupne pridať k základnému pravidlu vybíjania (presun náboja 30) takmer 500 výnimek a opráv, pri ktorých presúvali medzi vrcholmi náboje 0 až 60, kým zoznam neobsahoval len samé reducibilné konfigurácie. Pritom bolo potrebné presúvať náboje nielen k susedným, ale i k vzdialenejším vrcholom. Takto zostrojená nevyhnutná množina reducibilných konfigurácií mala pôvodne 1936 prvkov. Počas recenzného pokračovania a tlače článku autori ich počet postupne zmenšovali na 1923, 1879, 1877, 1834 a 1482 prvkov; v poznámke k článku uvádzajú, že s použitím nového, doteraz neuverejneného zoznamu 2669 reducibilných konfigurácií [8] možno mohutnost nevyhnutnej množiny zmenšiť až na 1405. (Čitateľ zaiste prepáči, že nevyhnutnú množinu reducibilných konfigurácií tu nereprodukujeme. Prezradíme len, že obsahuje všetky konfigurácie z obr. 6.) Je pravdepodobné, že tento počet možno ešte ďalej znižovať, nezdá sa však možné, že by toto zníženie mohlo byť výraznejšie (napr. že by bolo možné zostrojiť nevyhnutnú množinu okolo sto reducibilných konfigurácií).

Osobitnou kapitolou vyriešenia problému štyroch farieb bola previerka reducibility konfigurácií. Aby ju autori uľahčili (no aj z iných dôvodov), postavili si zásadu (a podarilo sa im ju dodržať), že všetky konfigurácie z nevyhnutnej množiny musia mať rád 14 alebo menší. Pri kontrole reducibility konfigurácií rádu $\leqq 10$ sa autori opierali o tabuľky reducibilných konfigurácií zostavené ALLAIROM a SWARTOM [1]. Reducibilitu konfigurácií rádu 11 až 14 preverovali pomocou počítača − postupne použili tri rôzne počítače firmy IBM: 360-75, 370-158 a 370-168. Príslušné programy vypracoval KOCH v spolupráci s APPELOM a HAKENOM. Výpočty spotrebovali asi 1200 hodín strojového času. Príprava metód a programu trvala tri a pol roka a ďalší polrok trvala práca s počítačmi. Celá práca bola úspešne zakončená 21. júna 1976, v deň 48. narodenín prof. Hakena.

Preskúšanie D-reducibility konfigurácií vzhľadom na dobré rozpracovanie metódy nebolo po teoretickej stránke príliš složité, bolo však náročné na strojový čas. Tento



Obr. 9. Nevyhnutná množina 25 konfigurácií

fakt nás neprekvapí, ak si uvedomíme, že pri konfigurácii rádu n existuje [6]

$$\tfrac{1}{8}(3^{n-1} + 3(-1)^n + 2)$$

podstatne rôznych zafarbení vrcholov obvodového n-uholníka, nehľadiac na ostatné (vnútorné) vrcholy konfigurácie a nutnosť skúšať možnosť premeny „zlých" (*bad*) zafarbení na „dobré" (*good colorations*) pomocou aparátu odpovedajúceho Kempeho reťazcom. Naproti tomu previerka C-reducibility zabrala spravidla kratší čas, autori sa však obmedzili len na určitý typ reducérov. Stávalo sa, že počítač nepotvrdil reducibilitu konfigurácie buď pre obmedzený výber redukčných metód, alebo pre obmedzený strojový čas (ak pri previerke jednej konfigurácie spotreboval počítač IBM 370-158 90 minút alebo počítač IBM 370-168 30 minút). V tomto prípade autori zmenili vybíjací predpis tak, aby sa v takejto konfigurácii nemohli vyskytnúť náboje kladných hodnôt.

Otvorenou ostáva otázka, do akej miery možno uvedený dôkaz zlepšiť: či možno zjednodušiť proces vybíjania, zmenšiť mohutnosť nevyhnutnej množiny, znížiť maximálny rád 14 pre použité konfigurácie (vieme už, že viac ako na 12 tento rád znížiť nemožno), zjednodušiť činnosť vykonávanú ručne i počítačmi. Dá sa očakávať, že v najbližších rokoch výskum prinesie v tomto smere zaujímavé poznatky.

11. Význam vyriešenia problému štyroch farieb pre matematiku

Dnes ešte ťažko možno zhodnotiť prínos vyriešenia problému štyroch farieb pre ďalší rozvoj matematiky. Predsa však na túto tému urobíme niekoľko poznámok.

Problém štyroch farieb spolu s FERMATOVOU hypotézou boli pravdepodobne najznámejšími nevyriešenými matematickými problémami. Vzhľadom na mimoriadny záujem a početné pokusy expertov i laikov bolo veľmi želateľné, aby táto prekážka bola zdolaná. Vyriešenie problému znamená vyplnenie nepríjemnej medzery vo výstavbe teórie grafov a topológie. Bolo známych veľa problémov ekvivalentných s problémom štyroch farieb a veľa hypotéz, ktorých pravdivosť závisela od správnosti hypotézy o štyroch farbách.

Na ukázku uveďme zovšeobecnenie problému farbenia stien na uzavreté orientovateľné plochy S_g rodu g (kde g je celé nezáporné číslo). Takáto plocha, voľne povedané, vznikne z guľovej plochy pridaním g rúčok, podobne ako sa pridávajú uchá na hrncoch. Plocha S_0 je *guľová plocha*, plocha S_1 je *torus* (nazývaný tiež *prstenec* alebo *anuloid*) — môžeme si ju predstaviť v tvare pneumatiky (bez ventilu) a pod. Vzniká otázka, aký najmenší počet $\chi(S_g)$ farieb je potrebný na regulárne zafarbenie štátov každej mapy (stien každého grafu) nakreslenej na ploche S_g. Pomocou tzv. *stereografickej projekcie* možno (zo „severného pólu") premietnuť mapu z guľovej plochy na rovinu a ihneď vidieť, že problém farbenia štátov na guľovej ploche a na rovine je ekvivalentný. Pre plochy S_g s kladným rodom g sa podarilo G. RINGELOVI a J. W. T. YOUNGSOVI r. 1968 dokázať, že

$$\chi(S_g) = \left[\frac{7 + \sqrt{(1 + 48g)}}{2}\right],$$

čo predpokladala HEAWOODOVA hypotéza z r. 1890 (hranatá zátvorka označuje celú časť čísla). Pre $g = 1$ dostávame výsledok, dokázaný už Heawoodom, podľa ktorého minimálny počet farieb potrebný na regulárne zafarbenie štátov každej mapy na toruse je 7. Pre $g = 0$ uvedený vzťah dáva $\chi(S_0) = 4$, čo sa však podarilo dokázať až teraz vo forme teorémy o štyroch farbách.

Možno vysloviť obdiv rozhodnutiu APPELA a HAKENA, že sa podujali spolu s KOCHOM na vyčerpávajúcu štvorročnú prácu, ktorej výsledok mohol byť nulový. Hrozila totiž nielen možnosť, že hypotéza o štyroch farbách neplatí (t. j. že existuje kontrapríklad —

mapa, ktorej štáty nemožno regulárne zafarbiť štyrmi farbami), ale aj ďalšia nepríjemná možnosť, že hypotéza síce platí (t. j. neexistuje kontrapríklad), ale nemožno ju dokázať (t. j. neexistuje dôkaz s konečným počtom krokov) – teda, že hypotéza je nerozhodnuteľná. Do tretice, bolo možné, že hypotéza je dokázateľná, ale jej dôkaz je tak dlhý alebo komplikovaný, že ho s použitím súčasných metód nemožno v reálnom čase zostrojiť. Riešitelia problému si boli vedomí týchto možností; úvahy pravdepodobnostného charakteru ich však viedli k presvedčeniu, že žiaden z týchto nepriaznivých prípadov nenastane. O oprávnenosti ich predpokladov svedčí aj ich úspešný odhad, že pre dôkaz hypotézy bude stačiť použitie konfigurácií rádov $\leqq 14$.

Azda za najvýznamnejší prínos vyriešenia problému štyroch farieb pre matematiku možno považovať fakt, že poskytlo jej veľmi presvedčujúci príklad tvrdenia, ktorého dôkaz je mimoriadne náročný z hľadiska výpočtovej zložitosti a sotva by mohol byť realizovaný bez použitia počítačov (výrečný je aj fakt, že podrobnosti dôkazu autori museli vložiť do dodatku vo forme mikrofilmu). Zdá sa, že si pracovníci v matematickom výskume dnes už začínajú uvedomovať, že prichádza čas, keď sa počítač stáva významným pomocníkom matematika i v procese dokazovania matematických teorém.

Literatúra

[1] ALLAIRE, F. - SWART, E. R.: *A systematic approach to the determination of reducible configurations in the four-color conjecture*, J. Combinatorial Theory Ser. B *25* (1978), 339—362.

[2] APPEL, K. - HAKEN, W.: *Every planar map is four colorable*, Bull. Amer. Math. Soc. *82* (1976), 711—712.

[3] APPEL, K. - HAKEN, W.: *Every planar map is four colorable. Part I: Discharging*, Illinois J. Math. *84* (1977), 429—490.

[4] APPEL, K - HAKEN, W. — KOCH, J.: *Every planar map is four colorable. Part II: Reducibility*, Illinois J. Math. *84* (1977), 491—567.

[5] BERNHART, F. R.: *A digest of the four color theorem*, J. Graph Theory *1* (1977), 207—225.

[6] BERNHART, F. R.: *Irreducible configurations and the four color conjecture*, In: Theory and Applications of Graphs, Proc. Conf. Kalamazoo, Michigan 1976, Springer-Verlag, Berlin 1978, 37—52.

[7] BIGGS, N. L. - LLOYD, E. K. - WILSON, R. J.: *Graph theory 1736—1936*. Clarendon Press, Oxford 1977.

[8] DÜRRE, K. - HEESCH, H. - MIEHE, F.: *Eine Figurenliste zur chromatischen Reduktion*. Institut für Mathematik der TU Hannover, Preprint No. 73, 1977.

[9] HAKEN, W.: *An attempt to understand the four color problem*, J. Graph Theory *1* (1977), 193—206.

[10] HEESCH, H.: *Untersuchungen zum Vierfarbenproblem*. Bibliographisches Institut, Mannheim 1969.

[11] ORE, O.: *The four-color problem*. Academic Press, New York 1967.

[12] STROMQUIST, W.: *The four-color theorem for small maps*, J. Combinatorial Theory Ser. B *19* (1975), 256—268.

[13] TUTTE, W. T. - WHITNEY, H.: *Kempe chains and the four color problem*, Utilitas Mathematica *2* (1972), 241—281; Studies in Graph Theory, Studies in Math., Math. Assoc. America, Washington, D. C. *12* (1976), 378—413.