Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Michael F. Atiyah

Co je geometrie

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 29 (1984), No. 4, 213--217

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/137780`

vyučování

CO JE GEOMETRIE

Michael F. Atiyah

Sir Michael F. Atiyah je profesorem na Matematickém ústavu Oxfordské university. Je jedním z předních světových matematiků posledních let. Zejména jeho práce o indexu operátorů na varietách (Atiyahova-Singerova věta), o K-teorii a teorii komplexních variet obsahovaly zásadní výsledky v dané problematice. V posledních letech dosáhl vynikajících výsledků i v matematické fyzice, zejména v oblasti samoduálních řešení Yangových-Millsových rovnic. Je také velice aktivní jako organizátor. V loňském roce byl za své zásluhy povýšen do šlechtického stavu. V období 1981–1982 byl prezidentem Britské matematické asociace.

1. Historie

Mezi všemi změnami, ke kterým došlo v matematice na středních školách a univerzitách, je nejvíce zarážející pokles ústřední role geometrie. Eukleidovská geometrie spolu s příbuznou projektivní geometrií byla svržena z trůnu a v některých případech téměř zapuzena ze scény. I když reforma ve výuce byla jistě potřebná, je zde nebezpečí opačného extrému, že geometrii v jejích různých formách bude věnována nedostatečná pozornost. Mnoho těžkostí je soustředěno okolo těžko zachytitelné povahy předmětu. Vzniká otázka „Co je geometrie?" Chtěl bych zde zkoumat tuto otázku v celé obecnosti, v naději, že se mi podaří objasnit a podpořit důvody jak pro vyučování geometrie, tak pro rozhodnutí, která látka z geometrie je nejvhodnější na různých úrovních vzdělávání.

Začnu s historickým pohledem na vývoj matematiky. Myslím, že není náhoda, že geometrie byla u Řeků prvním odvětvím matematiky, které dosáhlo zralosti. Základní příčina byla v tom, že geometrie je nejméně abstraktní forma matematiky: tím míním, že má přímé použití v každodenním životě a lze jí porozumět s menším intelektuálním úsilím. Na rozdíl od geometrie je algebra výtažek abstrakce zahrnující slovník symbolismů, který může být zvládnut pouze s velkým úsilím. Dokonce i aritmetika, založená na procesu počítání, závisí na svém vlastním slovníku jako je například desítková soustava, a déle se vyvíjela.

Ovšem na pokročilé úrovni již zahrnuje geometrie abstrakci. Již Řekové poznali, že body a přímky, které potkáváme v reálném světě, jsou pouze aproximacemi jakýchsi „ideálních objektů" v „ideálním světě", kde body nemají rozměr a přímky jsou dokonale rovné. Tyto filozofické úvahy však uživatele geometrie, ať jsou jimi školní děti nebo inženýři, neznepokojují a geometrie na této úrovni představuje praktické studium fyzikálních tvarů.

Po mnoho století hrála eukleidovská geometrie dominantní roli na matematické scéně, avšak teprve objevení se algebry, její užití v geometrii Descartem a pozdější rozvoj infinitezimálního počtu změnily charakter celé matematiky. Stala se mnohem více symbolickou a abstraktní. Nevyhnutelně se na geometrii začalo pohlížet jako na disciplínu primitivní a zastaralou.

MICHAEL ATIYAH: *What is geometry?* The Mathematical Gazette Vol. 66, No. 437, October 1982.

Zatímco konkurenční odvětví matematiky se dále rozvíjela, základy geometrie a vztah geometrie k fyzikálnímu světu byly podrobeny důkladnému zkoumání. Známý Eukleidův postulát o rovnoběžnosti, který předpokládal existenci jediné přímky rovnoběžné s danou přímkou a procházející daným bodem, se v průběhu 18. století ukázal být nezávislým na ostatních axiómech. Byly nalezeny neeukleidovské geometrie, v nichž tento axióm neplatil. Došlo tak k osvobození geometrie od fyziky, což je hluboká a současně znepokojivá skutečnost. Zatímco existuje jediný fyzikální vesmír, existuje mnoho různých geometrií a není jasné, která z nich se nejvíce našemu vesmíru podobá. Těchto rozporů mezi geometry se dočasně pokusila využít algebra. Felix Klein ve svém známém Erlangenském programu se pokusil definovat geometrii jako studium těch vlastností prostoru, které jsou invariantní vzhledem k dané grupě symetrií: různé geometrie takto odpovídají různým grupám symetrií. I když toto hledisko bylo velmi užitečné v souvislosti s neeukleidovskými geometriemi, bylo již o něco dříve překonáno hlubokými idejemi Bernharda Riemanna. Riemannovy prostory nemusely být homogenní, jejich křivost se mohla měnit bod od bodu a nemusely mít žádné symetrie. Riemann totiž nevyšel z teorie grup, ale postavil své pojetí geometrie na diferenciálním počtu. Správnost tohoto pojetí byla jednoznačně potvrzena Einsteinovou teorií relativity.

Výsledek této introspekce ukázal, že geometrie není jen zkoumáním fyzikálního prostoru. Speciálně není zúžena jen na tři nebo čtyři dimenze. Jaké je ale užití těchto jiných geometrií? Nejsou to jen abstraktní hry hrané matematiky? Chci se pokusit odpovědět na tyto otázky tím, že ukáži, že abstraktní prostory a geometrie se přirozeně vyskytují v různých modifikacích. Některé z mých příkladů jsou dobře známé, jiné nejsou tak obvyklé.

2. Příklady prostorů, které nejsou fyzikální

Grafy zobrazení: Grafy jsou v matematice velmi známé a velmi užívané na všech úrovních. Pravděpodobně nejjednodušší je graf znázorňující závislost vzdálenosti pohybujícího se objektu na čase. Ovšem (x, t) – rovina je část Einsteinova čtyřrozměrného prostoročasu, v našem grafu je časová proměnná nahrazena druhou prostorovou proměnnou. V jiných příkladech, např. těch, které se užívají v ekonomice, proměnné nemají většinou žádný vztah k časoprostoru. Rovina, v níž graf kreslíme, je sice abstraktní rovina, avšak praktická výhoda tohoto obrazového ztvárnění je nepochybně veliká. Tato výhoda se opírá o schopnost našeho mozku identifikovat dvourozměrný obraz doslova na první pohled.

Komplexní rovina: Další dobře známý příklad abstraktní roviny je znázornění komplexních čísel $x + iy$ body roviny. Jestliže x například představuje vzdálenost podél nějaké přímky a algebraický problém zahrnující tuto vzdálenost má komplexní řešení $x + iy$, pak y nepředstavuje žádný reálný směr. Kdo ovládne komplexní čísla, začne jimi málem pohrdat a po delším objasňování se mu komplexní rovina stane takřka hmatatelnou. Avšak jak řekl veliký Gauss: skutečná metafyzika symbolu $\sqrt{-1}$ je nepostižitelná. Ti, kteří objasňují komplexní čísla studentům poprvé, budou jistě souhlasit.

Riemannovy plochy: Zatímco první dva příklady jsou známé a jednoduché, kombinujeme-li je dohromady, role geometrie se projeví mnohem vážněji. Vezměme si např. graf (dvouhodnotové) funkce $y^2 = f(x)$, kde f je polynom. Jsou-li x, y reálná čísla, můžeme graf nakreslit v obyčejné reálné rovině, jsou-li x, y komplexní, graf je reálnou plochou ve čtyřrozměrném reálném prostoru. Nazývá se Riemannovou plochou funkce a její geometrické (nebo topologické) vlastnosti mají zásadní důležitost při vlastním zkoumání funkce. Tento příklad ukazuje na důležitost „abstraktních" geometrických idejí při studiu polynomů nebo analytických funkcí více proměnných. A vskutku komplexní algebraická (a analytická) geometrie se nyní stala kvetoucí oblastí matematiky.

Dynamika: V Newtonově mechanice je pohyb částice v daném silovém poli popsán její polohou a rychlostí v libovolně zvoleném okamžiku. Pro popis dalšího pohybu se obvykle zavádí fázový prostor dvojic (x, v), kde obě složky jsou trojsložkové vektory a reprezentují polohu a rychlost. Pohyb je vyjádřen křivkou $(x(t), v(t))$ v tomto šestirozměrném prostoru. Pro názornost: jestliže pohyb se děje po přímce místo v trojrozměrném prostoru, fázový prostor je dvourozměrný a jednoduchý harmonický pohyb odpovídá v tomto fázovém prostoru kružnici. Tyto fázové obrázky jsou pak zvlášť užitečné v obecných dynamických problémech.

Tuhá tělesa: Předpokládejme, že místo částice máme tuhé těleso. Dříve než budeme zkoumat jeho pohyb, podívejme se na statický problém popisu jeho polohy. Jestliže těžiště je upevněno v počátku soustavy souřadnic, zbývá pouze rotace okolo počátku. Tyto rotace mají tři stupně volnosti, ale tyto stupně volnosti neodpovídají trojici kartézských souřadnic (x, y, z). Prostor rotací je ve skutečnosti neeukleidovský (eliptický) trojrozměrný prostor, faktorprostor trojrozměrné sféry podle antipodálního zobrazení. (Nejelegantnější popis tohoto faktu je pomocí kvaternionů. Kvaterniony q s jednotkovou normou tvoří trojrozměrnou sféru a operují na trojrozměrném prostoru imaginárních kvaternionů x prostřednictvím zobrazení $x \to qxq^{-1}$. Takto jsou popsány všechny rotace v trojrozměrném prostoru, ale $\pm q$ popisují stejnou rotaci a jsou to antipodální dvojice na trojrozměrné sféře). Místo eukleidovské geometrie se zde objevuje geometrie neeukleidovská.

Přímková geometrie: Jestliže tuhé těleso je nahrazeno tenkou tyčí, která je idealizována jako přímka nekonečné délky, nemůžeme její polohu popsat stejným způsobem, protože její těžiště není určeno. Avšak tuto polohu lze popsat dvěma body $X = (X_1, X_2, X_3)$ a $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ a uvažovat šestisložkový vektor $(X - Y, X \wedge Y)$. [Symbol $X \wedge Y$ zde označuje. vektorový součin vektorů X, Y, pozn. překl.] Vezmeme-li jinou dvojici bodů na stejné přímce, příslušný šestisložkový vektor se vynásobí skalárem. Jeho komponenty splňují dále kvadratickou relaci

$$(X - Y) . (X \wedge Y) = 0$$

To znamená, že přímky v trojrozměrném prostoru mohou být parametrizovány body na kvadrice v projektivním pětirozměrném prostoru. Je to dobře známá Kleinova reprezentace. Když jsem se s ní poprvé seznámil jako mladý student, považoval jsem ji za jednu z nejkrásnějších myšlenek v matematice. Pro ilustraci jejích vlastností připomenu, že na jednodílném hyperboloidu v trojrozměrném prostoru máme dva systémy vytvářejících přímek. Podobně Kleinova kvadrika v pětirozměrném prostoru obsahuje dva systémy vytvářejících rovin. Roviny jednoho systému odpovídají všem přímkám v trojrozměrném prostoru procházejícím jedním bodem, roviny druhého systému parametrizují všechny přímky v trojrozměrném prostoru ležící v jedné rovině. Z tohoto popisu lze ihned odvodit incidenční vlastnosti vytvářejících rovin. Dvě roviny stejného systému se protínají v bodě (protože dva body v trojrozměrném prostoru leží na jedné přímce), zatímco roviny opačných systémů se obecně neprotínají (protože obecně neexistuje žádná přímka procházející daným bodem a ležící v dané rovině). Význačné roviny opačných systémů se ale mohou protínat. Jestliže se protínají, pak se protínají v přímce (jestliže P leží v π, existuje celý svazek přímek procházejících P a ležících v π). Je zajímavé, že Kleinova reprezentace v posledních letech sehrála významnou roli v pracích Rogera Penrose v teoretické fyzice. Stručně řečeno Penrose uvažoval Kleinovu kvadriku jako prostoročas (po komplexifikaci) a původní trojrozměrný prostor (také komplexifikovaný) je pak základním pomocným prostorem (tzv. twistorovým prostorem), který se jeví v některých směrech jednodušším než prostoročas (např. má méně dimenzí).

Prostory funkcí: Jestliže nyní vezmeme místo pevné tyče kus struny, pak její poloha v trojrozměrném prostoru potřebuje ke svému určení nekonečně mnoho parametrů. Tuto polohu můžeme popsat třemi funkcemi $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, kde t je parametr na struně (např. vzdálenost od jednoho jejího konce). Prostor všech poloh struny je pak prostor nekonečné dimenze. Tyto prostory funkcí se objevují často ve variačním počtu (když se snažíme minimalizovat nějakou veličinu závisející na funkci). I zde jsou velmi užitečné geometrické ideje, zejména v souvislosti s „větami o pevném bodě“.

3. Závěry

Předchozí příklady mají ilustrovat skutečnost, že prostory, často vícedimenzionální, vznikají přirozeně při popisu reálných situací. Abych ukázal tuto skutečnost, vybral jsem příklady z trojrozměrné mechaniky. Ovšem vzdělaný matematik může stejně dobře začít s reálnými proměnnými $x_1, \ldots, x_n$ a vzít je jako souřadnice bodu v n-dimenzionálním prostoru. Pro skeptiky, kteří mají vážné pochyby o významu vícedimenzionální geometrie, se ale tento abstraktní začátek nemusí jevit dostatečně přesvědčivý.

Pokročili jsme vpřed k odpovědi na původní otázku „Co je geometrie?“ Jestliže geometrie není jen studium fyzikálního prostoru, ale studium libovolného abstraktního prostoru, nedospěli jsme vlastně k tomu, že geometrie je totožná s celou matematikou? Jestliže považuji n-tici reálných proměnných za bod v n-dimenzionálním prostoru, co odlišuje geometrii od analýzy nebo algebry?

Abychom k této otázce mohli odpovědně přistoupit, dohodněme se, že matematika je lidská činnost a že také odráží způsob lidského myšlení. Nejčastější způsob, jak vyjádřím, že jsem porozuměl výkladu je to, že řeknu „Chápu“. Je to výsledek velkého počtu jevů v mentálních procesech, tj. způsobů, kterými mozek může analyzovat a utřídit to, co oči vidí. Zrak se ovšem může často mýlit a mohou vzniknout různé představy, které mohou, pokud nejsme dosti ostražití, ovlivnit výsledek. Schopnost mozku identifikovat dvou a třídimenzionální obrazce je však pozoruhodná. Vidění ovšem není totožné s myšlením. Kontrolujeme-li argumenty krok za krokem, řadíme myšlenky v přirozené následnosti. Toto logické neboli následné myšlení je spojeno více s časem než s prostorem a může být prováděno doslova v temnotě. Je to postup, který může být přepsán do symbolů a případně vložen do počítače.

Zhruba řečeno: chci naznačit, že geometrie je ta část matematiky, v níž zrakové (vizuální) uvažování je dominantní, naproti tomu algebra je ta část matematiky, ve které je dominantní následné uvažování. Tato dichotomie je snad lépe vyjádřena slovy „náhled" versus „přesnost". Obojí způsob hraje důležitou roli při řešení reálných matematických problémů.

Pro vzdělávání plynou z toho zřejmé důsledky. Měli bychom věnovat pozornost rozvíjení a kultivaci obou způsobů uvažování. Je chyba potlačovat kterýkoli z nich a druhý preferovat. Zdá se mi, že v posledních letech byla geometrie dosti postižena. Přesná vyváženost obou složek je ovšem námět pro další diskusi. Závisí mnoho na úrovni a schopnostech studentů.

Hlavní, co jsem se zde snažil vyjádřit je, že geometrie není ani tak odvětvím matematiky, jako spíše způsobem myšlení pronikajícím všemi odvětvími matematiky.

Přeložil Jarolím Bureš

PŘEDPOVĚDI ZMĚN V OSNOVÁCH MATEMATIKY BĚHEM 80. LET

Jaroslav Šedivý

Po třech letech od skončení ICME IV — Mezinárodního kongresu o vyučování matematice, Berkeley, 1980 — vyšla kniha*), která shrnuje přednesené referáty a sdělení. Můžeme tedy studovat stovky stran autentických materiálů a upřesnit stručné informace podané v minulých ročnících Pokroků (roč. 1981, č. 4, roč. 1982, č. 3). Zaměřme se na nejaktuálnější problematiku, na prognózy změn v obsahu školské matematiky v blízké budoucnosti. Nutno předeslat, že *jde o hodnocení a předpovědi, které vyslovili matematici, didaktici a školští pracovníci z nesocialistických zemí*; i tak mohou být jejich názory užitečnou informací. Východiskem úvah o budoucnosti je nedaleká minulost a současný stav.

Tři hodnocení minulosti

H. B. Griffiths z Velké Británie v této souvislosti upozornil na úskalí, jaká vytváří známkování „úspěšné — neúspěšné" [success — failure], jímž se v USA překotně hodnotí vyučování matematice nebo jednotlivým tématům. Podle jeho názoru se dá více věřit známce záporné, která vyjadřuje nedostatek nyní zjištěných a nepochybně i dále trvajících neznalostí žáků, zatímco kladné hodnocení se mnohdy vztahuje k znalostem zjištěným nyní, ale nezahrnuje konečný výsledek celého vzdělávacího procesu. (To je, myslím, velmi poučné stanovisko, které nabádá k opatrnosti v hodnocení důsledků změn ve vyučování; přitom nejde o negativismus.) Žádné hodnocení osnov nemůže být průkazné (validní), pokud nevíme, že je nezávislé na systému zkoušení, upozorňuje dále prof. Griffiths a naznačuje nedůvěru

*) *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*, ed.: M. J. Zweng, Birkhäuser Boston 1983, 725 stran, ISBN 3 — 7643 — 3082 — 1.