O práci P. S. Novikova "O algoritmické neřešitelnosti problému totožnosti slov v teorii grup"

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 4 (1959), No. 4, 421--422

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137743

je topologicky součin pontrjaginovských množin F_p *a* F_q *trojrozměrnou množinou.* Důkaz této věty není jednoduchý. Postup při takovém důkaze naznačíme v kap. 8.

Poznamenejme, že L. S. Pontrjagin dostal tento výsledek „násobením“ různých (nikoli homeomorfních) množin F_p a F_q. Jsou-li p a q soudělnými (tj. mají-li společného dělitele) a tím spíše pro $p = q$ je topologický součin množin F_p a F_q nikoli trojrozměrný, ale čtyřrozměrný (v souhlase s představou o součtu dimensí „činitelů). Přirozeně vznikla otázka zda v Pontrjaginově příkladu je podstatné, že se násobí různé množiny? Existuje taková dvojrozměrná množina, která topologicky násobena sama sebou dává trojrozměrnou množinu? Na tuto otázku odpověděl v r. 1949 V. G. Boltjanski, který sestrojil množiny P_m (pro $m = 2, 3, 4 \ldots$), které jsou dvojrozměrné a mají tuto vlastnost: Topologický součin libovolných dvou množin P_m a P_n je trojrozměrný pro libovolná m a n (tedy i pro $m = n$, tj. i pro dvě stejné množiny).

V posledních letech se řešilo mnoho problémů z teorie dimense. Problém dimense topologického součinu úplně řešil teprve nedávno sovětský matematik M. F. Bokštejn. O dalším vynikajícím výsledku sovětské topologické školy — o tzv. homologické teorii dimense P. S. Alexandrova — pojednáme v kap. 8.

Přeložili Jiří Fábera a Jiří Gregor

O PRÁCI P. S. NOVIKOVA „O ALGORITMICKÉ NEŘEŠITELNOSTI PROBLÉMU TOTOŽNOSTI SLOV V TEORII GRUP“ *)

Existence algoritmicky neřešitelných úloh byla prokázána teprve ve 30. letech, když Post, Church, Turing a jiní podali přesnou definici algoritmu a zkonstruovali úlohy logické povahy, které nebyly algoritmicky řešitelné. Byly to však úlohy tak speciální povahy a umělé, že se udržel názor, že v reálné matematice takových úloh není. Tento názor vyvrátila Novikovova práce, která se tím stala proslulou. Členu korespondentu AN SSSR Petru Sergějeviči Novikovovi byla za tuto práci udělena v r. 1957 Leninova cena.

V článku podáváme stručnou informaci, oč v této práci jde.

Redakce

Jedním z ústředních problémů matematické logiky je otázka řešitelnosti tzv. algoritmických problémů.

Příkladem algoritmu (pojem, s kterým se setkáváme v matematice od dob Eukleidových) může být dělením čísla jiným číslem, Algoritmus je charakterisován tím, že po konečném počtu kroků dostaneme výsledek (v našem příkladu podíl a zbytek), postupujeme-li podle určitých pravidel, nezávislých na daných veličinách (v našem příkladu na dělenci a děliteli). Teorie algoritmů byla v poslední době obohacena pracemi A. A. Markova, J. Posta, A. M. Turinga a jiných.

Algoritmický problém spočívá v určení algoritmu, který umožňuje řešit jedinou metodou nějakou nekonečnou sérii stejnorodých otázek, nebo v důkazu, že takový algoritmus neexistuje.

*) О работе П. С. Новикова „Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп“, Matěmatičeskoje prosveščenije, č. 1, 1957.

Vynikajících výsledků v tomto směru dosáhl P. S. Novikov, který dokázal neřešitelnost základních algoritmických problémů teorie grup. Každá grupa [množina, ve které je definována jedna operace, vyhovující jistým požadavkům, na příklad asociativnosti $(ab)\,c = a(bc)$] může být zadána tvořícími elementy — generátory — a vztahy takto: napišme systém generátorů — nějakých symbolů nebo „písmen" $a_1, a_2, \ldots a_n$, které společně se symboly — „písmeny" $a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_n^{-1}$ — tvoří „abecedu" grupy. Libovolná konečná posloupnost písmen z abecedy dané grupy se nazývá slovo; podmínky rovnosti některých slov (tvaru $A_j = B_j$) společně s nutnými podmínkami $a_i a_i^{-1} = a_i^{-1} a_i = 1$ tvoří určující vztahy. Dvě slova X a Y grupy jsou stejná tehdy a jen tehdy, převádí-li se jedno v druhé elementárními transformacemi grupy, které spočívají v tom, že skupiny písmen $a_i a_i^{-1}$ nebo $a_i^{-1} a_i$ je možno vynechat a libovolnou posloupnost písmen A_j uvnitř slova je možno nahradit posloupností písmen B_j.

Problém totožnosti slov v teorii grup spočívá v nalezení algoritmu, který by umožnil o každé libovolné dvojici slov X a Y z libovolné grupy F rozhodnout, jsou-li si v grupě F rovna nebo ne.

P. S. Novikov dokázal na základě teorie transformace slov v grupách, kterou sám propracoval, vytvořit konkrétní systém s neřešitelným problémem totožnosti. Tím dokázal neřešitelnost (v obecném případě) klasického problému totožnosti v teorii grup. Opíraje se o výsledky, ku kterým dospěl, dokázal P. S. Novikov neřešitelnost příbuzných problémů — problému konjugovanosti a problému isomorfismu (otázky, zda jsou dvě grupy, dané svými generátory a určujícími vztahy, isomorfní). Tyto problémy byly v algebře dávno známy; pokusy o jejich vyřešení byly neúspěšné. Nyní, po Novikovově důkazu neřešitelnosti problémů je jasné, že tyto pokusy být úspěšné nemohly.

V poslední době dokázali žáci P. S. Novikova užitím jeho metody neřešitelnost velké třídy algoritmických problémů teorie grup. Počet prací, které navazují na dílo P. S. Novikova, neustále vzrůstá a dosažených výsledků přibývá.

Přeložila Irena Merglová