Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Benoit Mandelbrot a fraktální geometrie

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 33 (1988), No. 3, 156--164

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137701

3. V zájmu proniknutí fyziky a fyziků do některých průmyslovýeh odvětví je zapotřebí zvýšit počet nejen „řadových" pracovníků, ale i vedoucích pracovníků. Tak je tomu ve všech průmyslových zemích, kde v čele podniků stojí renomovaní odborníci, kteří prošli výzkumnou činností v laboratořích a nejsou jen řediteli z profese, kteří mohou řídit cokoli. Jenom odborníci s nejvyšší kvalifikací mohou zabezpečit výrobu na úrovni, jen ti mohou vybrat potřebné spolupracovníky, jen ti vědí, co může fyzik v průmyslu dokázat.

Vážené kolegyně a kolegové,

ve svém vystoupení jsem se pokusil nastínit problémy, jejichž řešení je nezbytné, nemáme-li i nadále zaostávat, a to bez vyhlídky na změnu situace. Musíme trpělivě sledovat i menší postupné cíle v zájmu příštích generací, pro které jsme povinni udělat vše, co je v našich silách.

Benoit Mandelbrot a fraktální geometrie

Slovo redakce PMFA

V roce 1985 jsme se rozhodli připravit pro náš časopis kolekci článků o fraktální geometrii. Navázali jsme korespondenci s jejím tvůrcem, profesorem B. Mandelbrotem, který naši iniciativu zpočátku velmi uvítal a nabídl nám veškerou pomoc. Zejména nám byly přislíbeny originální snímky z jeho sbírek. Bohužel však z této spolupráce nakonec sešlo, protože pan profesor si mj. kladl některé technické podmínky, které jsme nemohli v našem časopise realizovat. Jediným výsledkem byla časová ztráta jednoho roku.

Pak nám svitla nová naděje: nalezli jsme kompetentního domácího odborníka, který byl ochoten napsat obsažný článek a dodat i obrázky. Smůla nás však neopustila: ve chvíli, kdy byl slíbený článek prakticky hotov, vyšla na toto téma stať ve „žlutém" časopise a náš autor rezignoval na další spolupráci s odůvodněním, že jeho článek by do značné míry jen opakoval věci již publikované.

Otiskujeme proto jen původní materiály, které jsme sami připravili v letech 1985—86 a pozornosti čtenářů navíc doporučujeme pěkný článek Petra Štěpánka (z Ústavu makromolekulární chemie ČSAV) „Fraktální útvary v geometrii a přírodě", Čs. čas. fyz. A 37 (1987), 329—343.

Stále ještě doufáme, že se k této problematice později vrátíme na vyšší odborné i technické úrovni.

Benoit Mandelbrot vyznamenán za velký vědecký čin*)

Benoitu Mandelbrotovi, matematikovi z IBM, který zahájil novou velkou etapu v matematice dvacátého století (fraktální geometrie přírody) byla v roce 1985 udělena

*) The Mathematical Intelligencer Vol. 7, No 4, 1985, p. 64. Přeložil Oldřich Kowalski.

kolumbijskou univerzitou Barnardova medaile „Za vynikající služby vědě“ (Meritorious Service to Science). Medaile se uděluje na doporučení Národní akademie věd USA.

Tím, že Mandelbrot obdržel Barnardovu medaili, připojil své jméno k exkluzívnímu seznamu předchozích medailistů – včetně Alberta Einsteina, Enrica Fermiho a dalších –, jejichž dílo pomáhalo utvářet moderní vědu. Medaile se uděluje každých pět let „... osobě, ať již je občanem Spojených států nebo jiné země, která ... učiní takový objev ve fyzikálních či astronomických vědách nebo objeví natolik novátorskou aplikaci vědy ve prospěch lidstva, že podle názoru Národní akademie věd je nanejvýš hodna této pocty.“

Mandelbrotovo dílo o fraktální geometrii umožňuje nahlédnout do složitých tvarů a struktur světa přírody: turbulence tekutin, symetrie různých forem života, větvení krystalů nebo vodních toků, kolísání rádiových vln a cenných papírů.

Před dvaceti lety začal Mandelbrot vyšetřovat nesourodé elementy, které objevili matematikové v minulosti a sjednotil je do své nové geometrie. Například čáry tak spletité, že mají více než jednu dimenzi, a plochy tak zvrásněné, že mají více než dvě dimenze, se dříve považovaly za „matematická monstra“, která se příčí zdravému rozumu.

Naproti tomu fraktální geometrie bere tyto tvary a další nepravidelné tvary za základ nové matematiky forem a rovněž za základ mnoha specifických teorií, které nacházejí míru pořádku v oblastech pokládaných dříve za naprosto chaotické.

Teorie fraktalů, která vznikla z Mandelbrotova studia nepravidelnosti a chaosu v lingvistice, ekonomii, fyzice, biologii a jiných oblastech, byla poprvé předložena v jeho knize *Les objets fractals: form, hasard et dimension* (1975) a úplněji pak v knize *The Fractal Geometry of Nature* (1982).

Mandelbrot pracuje v IBM od roku 1958, a to ve výzkumném středisku Thomase J. Watsona, v oddělení fyzikálních věd. V současné době je též profesorem Harvardovy univerzity pro obor „Praxe matematiky“.

Držitelé Barnardovy medaile za vynikající služby vědě

1945 Fréderic Joliot & Irène Curie-Joliot (za rok 1940)
1950 Enrico Fermi
1955 Merle Antony Tuve
1960 I. I. Rabi
1965 William A. Fowler
1970 medaile neudělena
1975 Louis P. Hammett
1980 André Weil
1985 Benoit Mandelbrot
1895 Lord Rayleigh & Sir William Ramsay
1900 Wilhelm Conrad von Roentgen
1905 M. Henri Becquerel
1910 Ernest Rutherford
1915 Sir William H. Bragg & William L. Bragg
1920 Albert Einstein
1925 Niels Bohr
1930 Werner Heisenberg
1935 Edwin Powell Hubble
1940 udělení medaile odloženo na rok 1945

J. W. Cannon: recenze knihy B. B. Mandelbrota „Fraktální geometrie přírody“*)

Ten posuzuje ... dílo kritika více podle citací než podle vlastního textu ... W. H. Auden [1, p. 47].

A opět, každý svědomitý kritik, který musel někdy zrecenzovat novou knihu poezie na omezeném prostoru, ví, že jediný poctivý přístup je vybrat sérii ukázek bez komentáře ... W. H. Auden [1, pp. 11—12].

Fraktal je matematický soubor nebo konkrétní objekt, který je nepravidelný nebo zlomkovitý při libovolných zvětšeních nebo zmenšeních ... B. B. Mandelbrot [3].

... Tvrdím, že mnohé struktury v přírodě jsou tak nepravidelné a zlomkovité, že ve srovnání s Euklidem — *tento termín se v knize používá k označení veškeré standardní geometrie — příroda vykazuje ne prostě jen vyšší stupeň, ale naprosto odlišnou úroveň složitosti ... Existence těchto struktur nás provokuje ke studiu těch forem, které Euklides ponechal bez povšimnutí jako „beztvaré“, ke zkoumání morfologie „amorfního“.* B. B. Mandelbrot [4].

Všechna krása je relativní ... Neměli bychom věřit, že břehy oceánu jsou deformované jen proto, že nemají tvar rovného mola, že hory jsou beztvaré jen proto, že to nejsou přesné jehlany nebo kužele, že hvězdy jsou umístěny neobratně, protože nejsou všechny rozloženy ve stejných vzdálenostech od sebe. Příroda nezná nepravidelnosti — ty existují jen v našich představách — a je jen zdánlivě nehostinná pro skutečné potřeby života a pro účely lidské existence na zemi ... Citováno z díla Richarda Bentleye B. B. Mandelbrotem [4].

Benoit B. Mandelbrot se ve své knize *Fraktální geometrie přírody* soustavně snaží přesvědčit oko i mysl čtenáře, že zdánlivé nepravidelnosti přírody mohou být účinně a překrásně modelovány matematickými objekty, z nichž některé jsou deterministické a jiné v sobě mají prvek náhodnosti, avšak všechny jsou vysoce nepravidelné nebo zlomkovité, a tyto objekty nazývá Mandelbrot *fraktaly*.

Každá nová ilustrace vytvořená počítačem zvyšuje přesvědčivost jeho argumentů. Vzadu na obálce Mandelbrotovy knihy vychází neexistující „brownovská“ Země nad neexistující měsíční krajinou – vše vytvořilo počítačové umění jednoho z Mandelbrotových spolupracovníků v IBM, Richarda F. Vosse. Příslušné programy jsou založeny na jednoduchých geometrických invariančních principech. Novější programy vytvářejí horská pásma, údolí, řeky, mračna a mlžné opary; vše je vizuálně podmanivé a přitom úplně zfalšované, opět založené na několika jednoduchých invariančních principech.

Mandelbrot navrhuje první pokusné fraktální modely napodobující tvary pobřeží, galaktické shluky, turbulenci, skupiny ostrovů, stromy, strukturu plic, Brownův pohyb, odvodňovací systémy, horská pásma, nepravidelná tkaniva, výskyt chyb v přenosu dat, kolísání hodnoty cenných papírů a mnoho dalších tvarů a jevů. Kniha je bohatým zdrojem krásných snímků, nových a zajímavých matematických modelů a nové, nápadité terminologie.

Mandelbrot uvádí široké spektrum experimentálních důkazů jiných vědců, aby zdůvodnil svůj názor, že standardní modely nemohou výše uvedené jevy popsat stejně účinně, jasně a věrně. Mandelbrot charakterizuje svou knihu jako manifest a sbírku precedenčních případů. Je plná ostře vyhraněných názorů a nároků na prioritu, plná historických anekdot, výstižných ilustrací a toho nejlepšího z počítačového umění.

---

*) *The Fractal Geometry of Nature.* By BENOIT B. MANDELBROT. Freeman, San Francisco, 1982, 460 pp. Reviewed by J. W. CANNON. Reprinted from the American Mathematical Monthly, Vol. 91, pp. 598—600 by permission of the Mathematical Association of America. Přeložil O. KOWALSKI.

Příklady klasických matematických fraktalů jsou spojité funkce nemající nikde derivaci, Peanovy křivky (vyplňující část prostoru) a proslulá Cantorova diskontinua. Klasický názor byl, že tyto příklady nám byly vnuceny matematickou abstrakcí a že mají jen málo společného s realitou. Proti tomu předkládáme některé polemické názory vyjádřené Mandelbrotem.

Co se týče nediferencovatelných funkcí, Mandelbrot cituje Jeana Perrina, který získal Nobelovu cenu za práce o Brownově pohybu:

...Hodný učitel... nakreslí zcela určitou křivku a s pravítkem v ruce řekne: „Vidíte, že v každém bodě existuje tečna“... Matematikové jsou si ovšem dobře vědomi toho, že je dětinské snažit se ukázat pomocí náčrtku, že každá spojitá funkce má derivaci... Pravidlem jsou křivky, které nemají žádné tečny... Ti, kdo se doslechnou o křivkách bez tečen a funkcích bez derivací, si často z počátku myslí, že příroda nám nepředkládá takové komplikace... Ale opak je pravda... Vezměme si například jednu z bílých vloček, které vzniknou, když přidáme sůl do mýdlového roztoku. Z větší vzdálenosti se obrys vločky může zdát ostře a přesně určený, ale jestliže se přibližujeme, ostrost mizí. Naše oko již nedokáže vést každým bodem tečnu... Použijeme-li lupy nebo mikroskopu, jsme ponecháni ve stejné nejistotě, protože jakékoliv další zvětšení odhaluje nové nepravidelnosti... Podstatnou vlastností naší vločky je... že nás přivádí k podezření..., že v jakémkoliv měřítku vstupují do hry detaily, které absolutně znemožňují konstrukci tečny... [4, pp. 6—7].

Podle Norberta Wienera se dráhy Brownova pohybu dají nejlépe modelovat pomocí spojitých a nikde nediferencovatelných křivek, které lokálně vyplňují rovinu [4, p. 9].

O Peanových křivkách říká Mandelbrot:

... Jestliže síť kanálů nulové šířky má dokonale odvodnit určitou oblast, musí *vniknout úplně všude. Ten, kdo bude sledovat složitý břeh takového vodního díla, projde při svém putování celou rovinnou oblast...* [4, p. 59].

Tedy křivka s kladným plošným obsahem je cenným intuitivním modelem a stejně důležitý je obdobný vícerozměrný objekt, totiž dvojrozměrná plocha s nenulovým třírozměrným objemem:

... Harvey se zasloužil o takové chápání krevního oběhu, které předpokládá, že ve velmi malé vzdálenosti od každého místa v těle je aspoň jedna tepna a aspoň jedna žíla — ovšem s tou výjimkou, že bod uvnitř tepny (nebo žíly) nemůže být příliš blízký nějaké žíle (resp. tepně). Jinak řečeno ...: každý bod nevaskulární tkáně musí ležet na hranici mezi oběma cévními systémy.

Druhý určující faktor je, že krev je drahá. Tedy objem všech tepen a žil musí tvořit malé procento tělesného objemu, kdežto hlavní objem musí zaujímat tkáň... (Proto) *tkáň ... je fraktální plocha: ... musí být topologicky dvojrozměrná, protože tvoří společnou hranici dvou útvarů, které jsou topologicky trojrozměrné, ale žádá se, aby její objem nejenže nebyl zanedbatelný ve srovnání s útvary, které ohraničuje, ale aby byl dokonce mnohem větší.*

(Tedy) *fraktální monstra tvoří přímo substanci našeho těla...* [4, pp. 149—150]

Mandelbrot poznamenává, že nejlepším modelem pro shlukování třírozměrné hmoty hvězd a galaxií ve vesmíru při pohledu z dálky se zdá být nikoli třírozměrný model, ale spíše Cantorovo diskontinuum (neboli „prach“, jak říká Mandelbrot) topologické dimenze 0. Mandelbrot pak připomíná argument E. E. Fourniera d'Albe, který se domnívá, že odpovídající netopologická, tj. geometrická neboli fraktální dimenze shlukující se hmoty by měla být přibližně rovna 1. Citujeme pouze závěr argumentu.

... Vyjádříme-li jinými slovy Fournierovu myšlenku, pak z pozorování, že žádná hvězdná rychlost nepřesahuje 1/300 velikosti světelné rychlosti, může být odvozen důležitý závěr. Je to fakt, že množství

hmoty obsažené v nějaké vesmírné kouli vzrůstá úměrně s jejím poloměrem a ne s jejím objemem ... [4, p. 89].

Experimentální měření se zdají naznačovat přesnější fraktální dimenzi, přibližně rovnou 1,23.

Mandelbrot na závěr tvrdí, že všechna klasická fraktální monstra jsou dobrými intuitivními modely skutečných a důležitých objektů.

Ačkoliv Mandelbrot věnuje první polovinu své knihy (200 stran) klasickým a deterministickým fraktalům, zdá se mi zřejmé, že jeho skutečnou láskou jsou náhodné fraktální modely. Modelují se jimi hlavně krajiny, galaxie a pobřeží.

... Plný význam a praktická důležitost těchto námětů se nestanou zřejmými, dokud nezačneme využívat náhodných fraktalů ... Vraťme se zpět k otázce „Jak dlouhé je britské pobřeží?" ... Mohli bychom zlepšit (deterministické fraktální) modely zapojením komplikovanějších deterministických algoritmů. Takový přístup by však byl nejen namáhavý, ale také odsouzený k nezdaru, protože každé pobřeží je formováno po staletí množstvím vlivů, které nebyly zaznamenány a nemohou být podrobně rekonstruovány ... Klíč k řešení tohoto problému dává matematická statistika ... [4, str. 200—201].

... Může náhoda vytvořit vysoký stupeň nepravidelnosti, s jakým se např. setkáváme u pobřeží? Nejenže může, ale v mnohých případech jde ještě dále, než bylo naším cílem ... [4, str. 201].

... V předešlé části se argumentuje, že teorie změny není ve skutečnosti obtížná. Bohužel není ani snadná ... Totiž pravidla, která vytvářejí přijatelné náhodné křivky, je velmi těžké popsat, protože geometrické množiny jsou uloženy v prostoru. Pokud budeme pouze náhodně měnit tvary, rozměry a pořadí částí daného pobřeží, zůstanou nám nakonec nejspíše kousky, které k sobě nebudou patřit ... [4, str. 201].

... Nenáhodné fraktaly selhávají v podstatě proto, že nejsou dostatečně symetrické ... [4, str. 205].

Mandelbrot sleduje zavedením náhodných fraktalů dvojí cíl. Za prvé mu jde o modely, které jsou účinné, ale přitom jsou ve shodě se zrakovou zkušeností. Za druhé chce získat modely s dosti překvapujícími statistickými invariančními vlastnostmi, jaké nám napovídá experiment. Jeho udivujícím objevem je, že splníme-li druhý požadavek, splníme tím patrně i ten první.

To nejdůležitější, co je třeba říci o invariančních vlastnostech popsaných Mandelbrotem, je, že mnohé z nich jsou zjevně neslučitelné s Gaussovým zákonem rozložení.

... Studium zákonů škálování mě vedlo k poznání, že nestandardní centrální limitní chování je ve skutečnosti vlastností přírody. Jakmile si uvědomíme, že argument centrální limitní věty by měl vést k několika různým závěrům, ztrácí naneštěstí tato věta svou přesvědčivost. [4, str. 423].

Mandelbrot zjistil, že mnoho skutečných, zjevně náhodných procesů patrně vyhovuje následujícímu obecnému pojetí náhodné samopodobnosti neboli škálování.

... Každá přirozená fluktuace může být zpracována do slyšitelné formy, jak napovídá termín šum. Nahrajme si tento šum a poslechněme si jej reproduktorem, který přenáší věrně kmitočty např. mezi 40 Hz a 14 000 Hz. Potom přehrávejme tutéž pásku rychleji nebo pomaleji, než je normální rychlost. Všeobecně člověk očekává, že charakter toho, co uslyší, se podstatně změní. Například housle už nebudou znít jako housle ... Existuje však zvláštní třída zvuků, které se chovají docela jinak. Jakmile změníme rychlost přehrávání, stačí přizpůsobit hlasitost a z reproduktoru se ozývají „tytéž" zvuky jako předtím. Navrhuji, aby se takové zvuky nebo šumy nazývaly škálované.

Gaussovský bílý šum ... je škálovaný. Ale i jiné škálované šumy mohou být využity k vytváření modelů ... [4, str. 249—250].

A členové jedné důležité skupiny takových škálovaných šumů se vyznačují určitou fraktální dimenzí [4, str. 250]. Právě takové šumy dokáže Mandelbrot často báječně využít.

Fraktaly ve skutečnosti existovaly v matematice (třebas ne podle jména) od té doby, kdy se matematikové začali vážně zamýšlet nad základy svého oboru. Fraktaly ovládaly některé oblasti matematiky po celá desetiletí. Ale Mandelbrotovy myšlenky a zájem vzbuzený jeho knihou jsou příznačné pro skutečnou změnu v matematickém prostředí. O jakou změnu jde?

Jsem přesvědčen, že tato změna byla způsobena vývojem elektronických počítačů a rozvojem báječné počítačové grafiky. Jak Mandelbrot tvrdí v jednom místě předchozí citace, každý tok dat může být zpracován ve formě zvuku neboli šumu. Ale stejně tak může být zpracován ve formě geometrických tvarů nebo obrazů. Docházíme k objevu, že algoritmy mají své vnitřní tvary, že tyto tvary jsou složité a krásné, že jsou podloženy různými geometriemi, nadány vnitřními podobnostmi neboli invariančními vlastnostmi. Matematikové jsou nyní schopni začít všestranně prozkoumávat prakticky nezmapované území — geometrii algoritmů.

Copak je po jméně? Co růží zvou i zváno jinak vonělo by stejně ... Shakespeare, Romeo a Julie, II, 2, ř. 45—46.*)

Je tomu skutečně tak? Zvolme si jako jméno pro každého jednotlivce algoritmus zakódovaný do jeho genetické struktury nebo do fyzikálních či duchovních zákonů určujících jeho stvoření. Změníme-li jméno, pak změníme i kód, změníme samo individuum, změníme tvar, vůni i osobní fluidum tohoto jednotlivce.

Jestliže myslíme v abstraktních pojmech, pak nás udiví, že algoritmy mají tvar, ale jestliže si uvědomíme, že mnohé ze života kolem nás má algoritmickou povahu, pak vidíme a cítíme i slyšíme v každé tváři, v každém pupenu, květině a stromu tvar, vůni a zvuk algoritmu, toho zázračného výtvoru.

Zdá se mi, že to, co Mandelbrot zkoumá ve své *Fraktální geometrii přírody* je asymptotický tvar algoritmů. Nepravidelnost, zlomkovitost, fraktální dimenze a jiné důležité vlastnosti, které vyzvedává, jsou pak důležitými rozpoznávacími znaky tohoto asymptotického tvaru. Proto bych znovu definoval fraktální geometrii pro potřeby matematiky takto:

Fraktální geometrie je zkoumání asymptotického geometrického tvaru algoritmů. *Fraktal* je asymptotický geometrický tvar určitého algoritmu.**)

Matematikové jsou jako Francouzi: cokoliv jim řeknete, přeloží si do svého vlastního jazyka a hned je z toho něco úplně jiného ... Goethe.

Je jasné, že mnoho překrásných věcí ve fraktální geometrii přímo volá po tom, aby byly objeveny. Do jaké míry budeme úspěšní, není dosud jasné. Jak se pokoušíme porozumět složitým, zdánlivě náhodným procesům, často máme pocit jako Mark Studdock, postava vědecko-fantastického románu C. S. Lewise *That Hideous Strength*, který byl cvičen svým ďábelským rádcem v Objektivitě:

... Potom Mark zpozoroval skvrny na stropě ... byly tam úmyslně namalovány: malé kulaté černé skvrny, posazené v nepravidelných intervalech na bledém, hořčicově zbarveném povrchu ... Rozhodl se, že neupadne do léčky, aby se je snažil spočítat. Bylo by těžké je spočítat, byly umístěny tak nepravidelně.

---

*) Viz: W. Shakespeare, *Tragédie*, přeložil E. A. Saudek, Odeon 1983.

**) Prof. Mandelbrot sdělil překladateli, že on sám nepokládá tyto definice za příliš vhodné.

Nebo snad nebyly? Nyní, když si na ně jeho oči začaly zvykat (a člověk si chtě nechtě musel všimnout malé pětičlenné skupinky napravo), jejich uspořádání se zdálo balancovat na pokraji pravidelnosti. Připomínaly jakýsi vzorek. Jejich zvláštní ošklivost spočívala právě v tom, že střídavě připomínaly ten vzorek a vzápětí tyto naděje zase mařily. Náhle si uvědomil, že to je jen jiná past. Spočinul očima na stole.

Na stole byly také skvrny: bílé. Svítící bílé skvrny, ne úplně kulaté. A zjevně uspořádané tak, aby odpovídaly skvrnám na stropě. Nebo to tak nebylo?! Ne, ovšem že ne ... Ano, už to má! Vzorek (pokud byste to mohli nazvat vzorkem) na stole byl přesným převrácením vzorku na stropě. Ale s určitými výjimkami. Přistihl se, že přeskakuje pohledem rychle z jednoho vzorku na druhý ve snaze tuto záhadu rozluštit ... [2, str. 297—298].

Literatura

[1] W. H. AUDEN: *The Dyer's Hand.* Vintage Books, New York, 1968.
[2] C. S. LEWIS: *That Hideous Strength.* Macmillan, New York, 1969.
[3] B. B. MANDELBROT: *Fractals: form, chance, and dimension.* Freeman, San Francisco: 1977.
[4] B. B. MANDELBROT: *The Fractal Geometry of Nature.* Freeman, San Francisco, 1983.

Něco málo matematiky k fraktalům

David Preiss, Praha

Neexistuje žádná matematicky rozumná definice fraktalů. Často uváděná definice „Fraktal je množina jejíž Hausdorffova dimenze se liší od topologické" má dvě vážné vady: Nezahrnuje všechny množiny, které za fraktaly považujeme a nedá se z ní nic rozumného vyvodit. (Takto definoval fraktaly B. B. Mandelbrot ve svých počátečních pracích; v pozdějších pracích však tuto definici nepovažuje za vyhovující.) Nicméně existuje dnes již rozsáhlá část matematiky, kterou lze prohlásit za studium fraktalů. Patří sem zejména metody k výpočtu Hausdorffovy (či fraktální) dimenze podmnožin R^n. Ta je definována takto:

Pro každou neklesající funkci $h : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$ definujeme h-rozměrnou Hausdorffovu (vnější) míru v R^n formulí

$$H_h(E) = \lim_{s \downarrow 0} \inf \{ \sum_{i=1}^{\infty} h(\operatorname{diam}(E_i)) : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \text{ a } \operatorname{diam}(E_i) < s \text{ pro každé } i \} .$$

(Snadno se ukáže, že H_h je dokonce metrická vnější míra; tedy borelovské množiny jsou H_h-měřitelné.)

Je-li $h(r) = r^\alpha$, značíme $H_h = H^\alpha$ a mluvíme (mírně nekorektně) o α-rozměrné Hausdorffově míře.

K definici Hausdorffovy dimenze si stačí uvědomit tento fakt: Pro danou množinu $E \subset R^n$ má funkce $\alpha \mapsto H^\alpha(E)$ velmi jednoduchý tvar: Existuje $\beta \in [0, n]$, že $H^\alpha(E) = \infty$ pro $\alpha < \beta$ a $H^\alpha(E) = 0$ pro $\alpha > \beta$. Číslo β se nazývá Hausdorffovou dimenzí množiny E a značívá se $\dim(E)$. (Čtenář si jistě uvědomil, že R^n lze nahradit libovolným metrickým prostorem. Pak ovšem Hausdorffova dimenze může mít i hodnotu ∞.)

Poněkud překvapující se může zdát ekvivalentní potenciálně-teoretická definice Hausdorffovy dimenze: Je-li $E \subset R^n$ borelovská (nebo obecněji Suslinovská), je dim (E) supremem těch $t \geqq 0$, pro něž existuje rozložení hmoty v E, jehož t-energie je konečná. (Rozložení hmoty v E je nenulová borelovská míra μ v R^n, že $\mu(R^n - E) = 0$; t-energie μ je definována formulí

$$\iint \frac{d\mu(x)\, d\mu(y)}{\|x - y\|^t}\,.)$$

Poměrně dobře jsou prostudovány např. tyto otázky: Známe-li Hausdorffovu dimenzi množiny $E \subset R^n$, jaká je (typicky) Hausdorffova dimenze její m-rozměrné projekce? Známe-li dim (E) a dim (F), jaká je (typicky) dim $(E \cap (x + F))$? Avšak nalezení Hausdorffovy dimenze konkrétních množin je obvykle velmi obtížný a často asi neřešitelný problém. Umíme to pro některé typy množin, s nimž se setkáváme v jiných teoriích (např. v teorii čísel). Rád bych připomněl, že prvním, kdo se takovýmto problémem zabýval, byl V. Jarník. (Jeho práci označuje C. A. Rogers v knize *Hausdorff Measures* za „pioneering work" a věnuje jí celou kapitolu.)

Vzájemnou interakcí „aplikovaných fraktalů" a matematické teorie byla nalezena třída tzv. sobě podobných (self-similar) množin. Jejich definice opět není zcela jasná, ale ty, o nichž lze něco říci, mohou být definovány jako kompaktní množiny $E \subset R^n$, pro něž existuje konečně mnoho kontrakcí $g_1, \ldots, g_k : R^n \mapsto R^n$, že $E = \bigcup_{i=1}^{k} g_i(E)$. (Příklad: $n = 1$, E je Cantorovo diskontinuum, $g_1(t) = t/3$, $g_2(t) = (2 + t)/3$.) Lze dokázat, že pro každý konečný soubor kontrakcí v R^n existuje právě jedna množina splňující výše uvedenou rovnost. Základním problémem je vypočítat Hausdorffovu dimenzi množiny E na základě informací o kontrakcích g_i. To neumíme, ani když $n = 2$ a všechny g_i jsou afiní. Nicméně, jsou-li všechny g_i podobnosti (a je-li splněna jistá podmínka zaručující, že množiny $g_i(E)$ se příliš nepřekrývají), lze dim (E) vypočítat pomocí velmi jednoduché formule. Navíc se ukazuje, že $0 < H^{\dim(E)}(E) < \infty$, což je velmi důležitý fakt, který nijak neplyne z definice Hausdorffovy dimenze.

V poslední době se staly populární tzv. náhodné sobě podobné množiny. I zde již umíme vypočítat Hausdorffovu dimenzi (jde-li o množinu vytvořenou pomocí náhodných podobností), avšak obvykle se stane, že $H^{\dim(E)}(E) = 0$. Najít funkci h, pro niž je $0 < H_h(E) < \infty$, je již mnohem těžší problém; pro dosti širokou třídu náhodných sobě podobných množin ho vyřešil velice nedávno D. Mauldin. Jeho řešení též zahrnuje starší výsledky D. Raye (1963) a S. J. Taylora (1964), kteří ukázali, že pro trajektorii Brownova pohybu je

$$h(t) = t^2 \log \frac{1}{t} \operatorname{logloglog} \frac{1}{t}\,.$$

Základní informace o většině výše uvedených problémů, jakož i odkazy na další literaturu, lze nalézt v knize K. J. Falconera *Geometry of Fractal Sets* (Cambridge University Press, 1985). Na tuto knihu lze též odkázat čtenáře toužícího po informacích o ostatních problémech geometrie fraktálních množin, např. o nádherné Marstrandově větě: Buď d reálné číslo a μ nenulová borelovská míra v R^n splňující

$$0 < \lim_{r \downarrow 0} \frac{\mu(B(x, r))}{r^d} < \infty$$

pro μ — skoro všechna $x \in R^n$. Pak d je celé číslo.

Další doporučená literatura: P. Štěpánek, Čs. čas. fys. A, *37*, 1987, č. 5, 425—435 a H. O. Peitgen, tamtéž str. 436—453.

O situácii v (európskej) matematickej informatike — rozhovor s Artom Salomaa

Alica Kelemenová a Jozef Kelemen, Bratislava

Profesor Arto Salomaa je vedúcim oddelenia matematiky na univerzite vo fínskom meste Turku. Je však aj jednou z vedúcich vedeckých osobností európskej i svetovej matematickej informatiky) a mimoriadne aktívnym organizátorom vedeckého života. Dokazujú to jeho prednáškové pobyty na vyše stovke univerzít troch svetadielov, častá a aktívna účasť na odborných podujatiach, členstvo v programových výboroch odborných stretnutí a v redakčných radách medzinárodných časopisov, redigovanie zborníkov a autorstvo radu učebníc a monografií.*

*Prvá možnosť osobného stretnutia s prof. Salomaa sa nám naskytla u nás, v Československu. Bolo to na 2. medzinárodnom sympóziu o matematickej informatike (MFCS) koncom leta 1973 v Areáli snov na Štrbskom Plese. Na tomto mimoriadne úspešnom podujatí, z ktorého zborník — hoci bol vydaný iba v náklade 300 exemplárov — je v odbornej tlači dodnes často citovaný, hovoril prof. Salomaa o vtedy kryštalizujúcej teórii L-systémov**). Pre vznik tohoto rozhovoru bolo však dôležité — azda okrem akéhosi podvedomého spojenia s A. Lindenmayerom***) prostredníctvom spomenutej prednášky — jedno z našich ďalších stretnutí, na 4. maďarskej konferencii o informatike v júli 1985 v Györi. Tam sme sa dohodli o témach, o ktorých sa nám zdalo byť užitočné hovoriť. Text odpovedí pre Pokroky získal však definitívnu podobu až*

---

*) Slovenským spojením (*matematická*) *informatika* prekladáme v celom rozhovore anglický výraz (*theoretical*) *computer science.*

**) A. Salomaa: *L-systems: A device in biologically motivated automata theory.* In: *Proc. Intern., Symp. Mathematical Foundations of Computer Science* (I. M. Havel, Ed.). Comp. Res. Centre Bratislava, 1973, pp. 147—151.

***) Rozhovor s A. Lindenmayerom bol uverejnený v PMFA *31* (1986), č. 2, str. 96—105