Ivan Netuka; Jiří Veselý

Ivar Fredholm a počátky funkcionální analýzy

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 22 (1977), No. 1, 10--21

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137665

Ivar Fredholm a počátky funkcionální analýzy

Ivan Netuka, Jiří Veselý, Praha

Od počátků bouřlivého rozvoje funkcionální analýzy nás dělí zhruba padesát let, během kterých se tato disciplína stala jednou z nejdůležitějších částí matematiky. Ovlivňuje silně ostatní matematické disciplíny a zasahuje i do fyziky a techniky. Kořeny funkcionální analýzy je však nutno hledat v klasické analýze, algebře a geometrii, a to mnohem dříve než před padesáti lety. I jména těch, kteří v různé míře pomohli připravit půdu pro prudký růst funkcionální analýzy, se pomalu vytrácejí z učebnic. O jednom z těchto matematiků, IVARU FREDHOLMOVI, se chceme v tomto článku podrobněji zmínit. Jeho jméno bývá spojováno spíše s teorií integrálních rovnic; označíme-li však první čtvrtinu našeho století za předehru k vývoji funkcionální analýzy, jsou to právě integrální rovnice, které v ní hrály první housle.

Tento článek má být jen sondou do dějin funkcionální analýzy. Snaží se postihnout ty důležité momenty z historie matematiky, které vedly k Fredholmovým objevům o řešení integrálních rovnic, a vliv těchto objevů na vývoj funkcionální analýzy. V neposlední řadě má též čtenáři připomenout padesátileté výročí úmrtí švédského matematika Ivara Fredholma.

Připomeneme nejprve několik poznatků z lineární algebry. Soustavu n rovnic o n neznámých s reálnými koeficienty

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ \ldots\ldots&\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n &= y_n \end{aligned} \tag{1}$$

budeme zapisovat v maticovém tvaru:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y}\,. \tag{2}$$

Označme řádkové vektory matice $A = (a_{ij})$ postupně $\mathbf{u}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$, sloupcové vektory $\mathbf{v}_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj})$. Je-li $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$, můžeme soustavu (2) přepsat ve tvaru

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{x} \rangle = y_i\,, \quad i = 1, \ldots, n \tag{3}$$

nebo ve tvaru

$$x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{y}\,. \tag{4}$$

Z posledního vztahu plyne, že jsou-li vektory $\mathbf{v}_j$ lineárně nezávislé, má soustava (1) právě jedno řešení pro každé $\mathbf{y} \in E_n$. Speciálně to platí pro $\mathbf{y} = \mathbf{o}$. Matice A má v tomto případě maximální hodnost $h(A) = n$; je též všeobecně známo, že to nastane, právě když determinant $|A|$ matice A je různý od 0.

Připojme ještě několik historických údajů: řešení soustav tohoto typu bylo pro případy $n = 2, 3, 4$ známo MACLAURINOVI (1698–1746) již asi v roce 1729; objevuje se v jeho posmrtně vydané práci z r. 1748. R. 1750 publikoval CRAMER (1704–1752) práci o kuželosečkách, ve které se vyskytuje vzorec pro řešení soustav tohoto typu – pravděpodobně díky větší známosti této práce bývá všeobecně nazýván Cramerovo pravidlo. Teprve však r. 1764 užívá BÉZOUT (1730–1783) determinantů n-tého stupně. Od něho též pochází poznatek, že v případě $|A| = 0$ má soustava (1) pro $\mathbf{y} = \mathbf{o}$ netriviální (tj. nenulové) řešení. Za zmínku stojí, že „determinant druhého stupně" znal již v r. 1683 NEWTON. Název determinant však zavedl teprve r. 1815 CAUCHY (1789–1857), i když pro označení diskriminantu kvadratické formy $ax^2 + 2bxy + cy^2$ ho již dříve užíval GAUSS (1777–1855). Teprve Cauchy začal užívat „čtvercový" zápis s dvojitými indexy. Je zajímavé, že pojem matice vznikl později; vytvoření teorie matic se zpravidla připisuje CAYLEYOVI (1821–1895), od něhož též pochází značení determinantu svislými čarami. Samotný termín matice zavedl SYLVESTER (1814–1897) roku 1850. Je vhodné zdůraznit, že největším stimulem rozvoje teorie řešení soustav lineárních rovnic byly potřeby geometrie. Vraťme se však k našemu příkladu.

V případě $h(A) < n$ existují tedy (Bézout) netriviální řešení soustav rovnic

$$A\mathbf{x} = \mathbf{o}\,, \tag{5}$$

$$A'\mathbf{f} = \mathbf{o} \tag{5'}$$

($A' = (a'_{ij})$ zde značí matici transponovanou k matici A; platí tedy $a'_{ij} = a_{ji}$).

Je užitečné sledovat současně „geometrické" hledisko a všímat si zobrazení $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ prostoru E_n do E_n. Budeme je značit rovněž A. Definujeme

$$\mathscr{R}(A) = A(E_n), \quad \mathscr{N}(A) = \{\mathbf{x} \in E_n; A\mathbf{x} = \mathbf{o}\}\,.$$

V zatím vyšetřeném případě je (pro $h(A) = n$)

$$\mathscr{N}(A) = \mathscr{N}(A') = \{\mathbf{o}\}\,, \quad \mathscr{R}(A) = \mathscr{R}(A') = E_n\,.$$

Interpretujeme-li pomocí zobrazení naši základní úlohu, má soustava (2) řešení, právě když je $\mathbf{y} \in \mathscr{R}(A)$. Všimneme si tedy blíže $\mathscr{R}(A)$ i v případě $h(A) < n$.

Připomínáme, že vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, pro něž je $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, se nazývají ortogonální; zapisujeme to symbolem $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$. Jsou-li U, V podmnožiny E_n a plyne-li z předpokladu $\mathbf{u} \in U$, $\mathbf{v} \in V$ vztah $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, píšeme symbolicky $U \perp V$. Jsou-li zároveň U, V podprostory E_n, je zřejmě $U \cap V = \{\mathbf{o}\}$. Důležitý je zejména ten případ, kdy lze každý vektor z E_n vyjádřit jako součet vektorů z takových dvou podprostorů U, V; přitom je V „největší" podprostor E_n, pro který je $U \perp V$.

Snadno se dokáže, že $\mathscr{R}(A)$ je podprostor E_n generovaný vektory $\mathbf{v}_j$, mezi nimiž je právě $h(A)$ lineárně nezávislých vektorů; pro jeho dimenzi tedy platí $\dim \mathscr{R}(A) = h(A)$. Přepíšeme-li rovnici

$$A'\mathbf{f} = \mathbf{g} \tag{2'}$$

ve tvaru

$$(3') \qquad \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{f} \rangle = g_j,\ j = 1, \ldots, n\,,$$

snadno nahlédneme, že „největší" podprostor V prostoru E_n, pro který je $\mathscr{R}(A) \perp V$ (uvažujte $g_j = 0$ v (3')), je právě $\mathscr{N}(A')$. Mimoto platí $\dim \mathscr{N}(A') = \dim \mathscr{N}(A) = n - h(A)$. Odtud již plyne lehce nutná a postačující podmínka řešitelnosti soustavy (2) ve tvaru

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{y} \rangle = 0 \quad \text{pro všechna} \quad \mathbf{f} \in \mathscr{N}(A')\,.$$

„Symetrické výsledky" dostaneme snadno podobnou úvahou pro soustavu (2').

Část připomenutých výsledků byla známa již Jacobimu (1804–1851) (některé jsou též připisovány Smithovi). V rámci vyšetřování soustav lineárních rovnic při široce pojatých výzkumech Kroneckerových (1823–1891) dospěl ke Smithovým výsledkům nezávisle roku 1878 Frobenius (1849–1917). Na těchto výzkumech se podílel i Weierstrass (1815–1897). Kronecker dal tvrzením o řešitelnosti soustav lineárních rovnic s reálnými nebo komplexními koeficienty definitivní tvar, jejich uveřejnění však přenechával svým kolegům a žákům. Tak se stalo, že i hodnost matice zavedl Frobenius.

Velmi obsáhlou část lineární funkcionální analýzy tvoří vyšetřování operátorové rovnice

$$(6) \qquad (\lambda I - A)\,\mathbf{x} = \mathbf{y}\,,$$

kde $A : X \to X$ je spojitý operátor na reálném nebo komplexním normovaném lineárním prostoru X, I je identita, λ reálný nebo komplexní parametr, $\mathbf{y}$ je daný a $\mathbf{x}$ hledaný prvek prostoru X. Tato rovnice stojí v jistém smyslu na konci cesty, kterou chceme v tomto článku sledovat.

Užijeme-li zmíněné poznatky pro případ operátoru A určeného na E_n maticí $A = (a_{ij})$ a vyšetříme-li tak speciální případ rovnice (6), dostaneme tyto výsledky: je-li $|\lambda I - A| \neq 0$, má rovnice (6) právě jedno řešení pro každé $\mathbf{y} \in E_n$. Rozepsáním rovnice $|\lambda I - A| = 0$ dostaneme algebraickou rovnici n-tého stupně, z jejíchž n řešení nemusí být obecně žádné reálné. Proto je účelné studovat rovnice tohoto typu spíše v kontextu komplexního lineárního prostoru. Z Cramerova pravidla je přitom zřejmé, že při pevném $\mathbf{y}$ je řešení rovnice (6) v tomto případě racionální funkcí parametru λ, přičemž ve jmenovateli nám „vadí" právě kořeny vyšetřované rovnice $|\lambda I - A| = 0$.

V obecném případě nazýváme množinu $\sigma(A)$ všech komplexních čísel λ, pro něž neexistuje spojitý inverzní operátor k operátoru $(\lambda I - A)$, *spektrem operátoru A*. Pro všechna ostatní λ existuje spojitý inverzní operátor $R_\lambda = (\lambda I - A)_{-1}$, který nazýváme *rezolventou* rovnice (6) a řešení (6) lze vyjádřit vztahem $\mathbf{x} = R_\lambda \mathbf{y}$. Všechna taková λ tvoří tzv. *rezolventní množinu* operátoru A.

Ta čísla λ ze spektra $\sigma(A)$, pro něž existuje netriviální řešení rovnice

$$(7) \qquad (\lambda I - A)\,\mathbf{x} = \mathbf{o}\,,$$

se nazývají *vlastní čísla* operátoru A; netriviální řešení (7), tj. nenulové vektory, pro něž je

$$Ax = \lambda_0 x\,, \tag{8}$$

se nazývají *vlastní vektory* příslušné vlastnímu číslu λ_0. Vlastní vektory operátoru A mají při zkoumání rovnice (6) velký význam.

Vraťme se ještě k vyšetřování rovnice (6) na E_n. Hledání vlastních vektorů matice souvisí zřejmým způsobem s vyšetřováním invariantních podprostorů prostoru E_n vůči operátoru A. Hraje rovněž důležitou roli při klasifikaci kvadrik – uvažme podrobněji (6) na konečně rozměrném lineárním prostoru X; při úvodní úvaze jsme ztotožnili operátor A a matici A, která ho určovala, obecně však tvar této matice závisí na volbě báze prostoru X, vůči níž vyjadřujeme $\mathbf{y}$, $\mathbf{x}$ i operátor A. Příslušná matice operátoru A má zvlášť jednoduchý tvar v případě, že báze je tvořena vlastními vektory operátoru A. Přitom lze vypočítat vlastní čísla operátoru A pomocí rovnice

$$|\lambda\delta_{ij} - a_{ij}| = 0$$

(jako obvykle je $\delta_{ij} = 0$ pro i $\neq j$, $\delta_{ii} = 1$) při libovolné maticové reprezentaci (a_{ij}) operátoru A (tj. při vyjádření A maticí (a_{ij}) vůči libovolné bázi). Kvadrice lze v E_n přiřadit symetrickou matici, a tak i jistý operátor A. Jeho vyjádření vůči bázi, tvořené vlastními vektory, umožňuje získat rovnici kvadriky v jednoduchém tvaru, ze kterého se odvozuje klasifikace kvadrik („převod symetrické matice na diagonální tvar").

Připomněli jsme tento fakt jednak proto, že byl hnací silou zkoumání vlastností soustav lineárních rovnic, a též proto, že jsme tento výklad užili k zavedení potřebných pojmů, které budeme dále užívat.

Budeme-li uvažovat rovnici (7) pro speciální případ $X = E_n$ a $\lambda = 1$, zbývá ještě něco říci o případu, kdy je λ vlastním číslem operátoru A. Čtenář si snadno provede sám úvahy z úvodní části článku i pro tento případ; označíme-li

$$(I - A)\,\mathbf{x} = \mathbf{y}\,, \tag{9}$$

$$(I - A)\,\mathbf{x} = \mathbf{o}\,, \tag{10}$$

$$(I - A')\,\mathbf{f} = \mathbf{g}\,, \tag{9'}$$

$$(I - A')\,\mathbf{f} = \mathbf{o}\,, \tag{10'}$$

lze výsledky shrnout takto:

Prostory $\mathcal{N}(I - A)$ a $\mathcal{N}(I - A')$ mají stejnou (konečnou) dimenzi. Rovnice (9) má řešení pro každou pravou stranu, právě když má rovnice (10) jen triviální řešení. Rovnice (9) má pro dané $\mathbf{y}$ řešení, právě když $\langle \mathbf{f}, \mathbf{y} \rangle = 0$ pro všechna $\mathbf{f} \in \mathcal{N}(I - A')$. Analogické výsledky ovšem platí i pro řešitelnost rovnice (9').

Na prostorech nekonečné dimenze je situace při řešení lineárních rovnic mnohem složitější. Definujeme-li např. na prostoru X všech omezených posloupností zobrazení

A_1, A_2 předpisy

$$(11) \qquad \begin{aligned} A_1(\{c_1, c_2, \ldots\}) &= \{c_2, c_3, \ldots\}\,, \\ A_2(\{c_1, c_2, \ldots\}) &= \{0, c_1, c_2, \ldots\}\,, \end{aligned}$$

potom zobrazení A_1 je lineární zobrazení X na X, ale není prosté, kdežto lineární zobrazení A_2 je prosté, nezobrazuje však X na X. Existuje však důležitá třída operátorových rovnic, o jejichž řešitelnosti je možno podat stejně úplnou informaci jako v případě prostorů konečné dimenze. Kořeny příslušné teorie operátorových rovnic leží ve Fredholmových výsledcích o integrálních rovnicích, o nichž budeme dále hovořit; nejdříve se pokusíme přiblížit čtenáři výsledky, které Fredholmovu objevu předcházely.

Základní úlohou teorie potenciálu je určení harmonické funkce na otevřené množině $G \subset E_n$, je-li předepsáno její hraniční chování (tzv. Dirichletova úloha) nebo hraniční chování její derivace ve směru normály ke G (tzv. Neumannova úloha). Tyto úlohy se objevují při řešení četných fyzikálních problémů a těšily se již od svého vzniku intenzívnímu zájmu mnoha matematiků. V souvislosti s řešením Dirichletovy úlohy byl Fourier (1768—1830) veden r. 1822 k řešení soustavy lineárních rovnic, jichž bylo nekonečně mnoho a které obsahovaly nekonečně mnoho neznámých. Fourier se vyrovnal s tímto problémem i bez potřebné teorie, nezabýval se však otázkami konvergence a obecné použitelnosti zvoleného postupu. Problémů podobného typu s „nekonečnými soustavami" postupně přibývalo (určování koeficientů mocninných řad, Fourierových koeficientů apod.), a tak vznikla potřeba vytvořit pro řešení těchto úloh příslušnou teorii.

Již uvedený příklad operátorů (11) naznačuje, že je nutná jistá opatrnost. Fourier postupoval tak, že se omezil nejprve na prvých n rovnic, ve kterých uvažoval pouze členy obsahující prvých n neznámých; vzniklou soustavu vyřešil a pak provedl limitní přechod $n \to \infty$. Tato metoda není obecně vhodná, jak ukazuje tento příklad nekonečné soustavy

$$(12) \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots &= y_1\,, \\ x_2 + x_3 + \ldots &= y_2\,, \\ x_3 + \ldots &= y_3\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

pocházející od Hellyho z r. 1921. Pro $y_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots$ dostaneme pro (12) postupným odčítáním „triviální řešení" $x_i = 0$, které ovšem řešením není. Dá se ukázat, že pro takto volená y_i soustava (12) nemá řešení, i když Fourierovým postupem získané „redukované soustavy" vesměs řešení mají a tato řešení konvergují „po složkách" k triviálnímu „řešení". Kdybychom definovali „determinant soustavy" jako limitu „redukovaných" determinantů, dostali bychom 1, i když soustava nemá řešení. Na druhé straně pro $y_1 = 1, y_2 = y_3 = \ldots = 0$ má (12) řešení, které lze získat Fourierovým postupem.

Po Fourierovi nebyly nekonečné soustavy studovány asi půl století. Po částečných výsledcích ze sedmdesátých let minulého století (Fürstenau, Kötteritzsch) se začaly tyto soustavy opět vyšetřovat. K rozhodujícím výsledkům pro teorii těchto soustav dospěli ve svých článcích HILL (1838–1914), POINCARÉ (1854–1912) a VON KOCH (1870–1924). Ve svých pracích vytvořil von Koch teorii „nekonečných determinantů" – hlavní z jeho prací jsou z let 1891–1892. Právě tyto výsledky byly pro Fredholma velmi podnětné.

Poznamenejme na okraj, že již před Fredholmem byly řešeny rovnice typu (6) alespoň ve speciálních případech i v nekonečně rozměrných lineárních prostorech funkcí. Rovněž lineární prostor nebyl díky GRASSMANNOVI (1809–1877) a PEANOVI (1858–1932) neznámým pojmem; při zcela moderním označení studoval lineární prostory Peano již v roce 1888 (definoval např. lineární zobrazení).

Fredholmovy práce, které měly pro funkcionální analýzu rozhodující význam, vznikly v letech 1900–1903; týkaly se integrálních rovnic. Všimněme si tedy krátce i jejich historie. Termín integrální rovnice zavedl DU BOIS-REYMOND (1831–1889) v r. 1888 pro rovnice, ve kterých se neznámá funkce vyskytovala v integrandu. Tak např. r. 1782 vyšetřoval LAPLACE (1749–1827) integrální rovnici

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt} f(t) \, dt$$

vzhledem k neznámé funkci f (vzorec popisuje tzv. dvoustrannou Laplaceovu transformaci). Její řešení podal r. 1823 POISSON (1781–1840). Za důležité příklady integrálních rovnic vděčíme ABELOVI (1802–1829), který vyšetřoval problém, jehož řešení vede pro speciální případ na tzv. tatutochronu. Fyzikálně lze problém interpretovat jako problém určení tvaru svahu, po kterém by lyžař sjížděl „šusem" (a bez tření) dolů vždy za stejnou dobu nezávisle na výšce, kam by po svahu vystoupal. Abel dospěl k řešení rovnice typu

$$g(x) = \int_a^x \frac{f(t)}{(x - t)^\alpha} \, dt$$

pro $0 < \alpha < 1$ a úspěšně ji (dvěma metodami, které jsou ale speciální) vyřešil.

LIOUVILLE (1809–1882) nezávisle na Abelovi řešil integrální rovnice r. 1832; později r. 1837 ukázal, jak spolu souvisí řešení určitých diferenciálních rovnic a řešení integrálních rovnic. Nalezené rovnice řešil metodou postupných aproximací, dnes zpravidla připisovanou C. NEUMANNOVI (1832–1925); přitom byly tyto rovnice jiného typu než rovnice Abelovy.

Za počátky teorie integrálních rovnic lze považovat výsledky VOLTERROVY (1860 – 1940), které publikoval v pracích z let 1884 a 1896–1897. Volterra se zabýval řešením rovnice tvaru

$$x(t) + \int_a^b K(t, u) \, x(u) \, du = y(t) \,, \quad t \in \langle a, b \rangle \tag{13}$$

s podmínkou $K(t, u) = 0$ pro všechna $t > u$ (takže lze v horní mezi integrálu v (13) psát t místo b) vzhledem k neznámé funkci x. Definoval posloupnost funkcí y_n na intervalu $\langle a, b \rangle$ předpisem

$$(14) \qquad y_n(t) = - \int_a^b K(t, u)\, y_{n-1}(u)\, du\,, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

kde $y_0 = y$; řešení rovnice (13) je pak určeno jako součet

$$(15) \qquad x(t) = y(t) + \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t)\,.$$

Pro vyšetřované jádro K dokázal konvergenci řady v (15) a dosazením z (15) do (13) ověřil, že (15) je řešením uvažované rovnice. Rozepsáním (15) dostáváme

$$x(t) = y(t) - \int_a^b K(t, u)\, y(u)\, du + \int_a^b \int_a^b K(t, v)\, K(v, u)\, y(u)\, dv\, du - \ldots$$

Jádro

$$(16) \qquad K_r(t, u) = - K(t, u) + \int_a^b K(t, v)\, K(v, u)\, dv - \ldots\,.$$

bylo později HILBERTEM (1862–1943) nazváno řešícím jádrem neboli rezolventou; umožňuje vyjádřit řešení rovnice (13) ve tvaru

$$(16') \qquad x(t) = y(t) + \int_a^b K_r(t, u)\, y(u)\, du\,, \quad t \in \langle a, b \rangle\,.$$

Schází-li v (13) na levé straně prvý sčítanec, dostáváme jinou rovnici, tzv. rovnici prvého druhu; rovnici (13) nazýváme rovnicí druhého druhu. Vzhledem k jádrům K lze rozdělit rovnice na rovnice Volterrova typu (v integrálu lze psát t místo b, tj. K se anuluje pro $t > u$) a rovnice Fredholmova typu (jádro K je funkce definovaná na „celém čtverci“ $\langle a, b \rangle \times \langle a, b \rangle$). Zatímco Abel tedy řešil rovnici prvého druhu, Liouvillem řešená rovnice byla druhého druhu; Liouvilleova metoda řešení byla v podstatě stejná jako metoda Volterrova.

K řešení Dirichletovy a Neumannovy úlohy užil integrální rovnice C. Neumann, který hledal řešení těchto úloh ve tvaru potenciálů. Pomocí metody postupných aproximací řešil r. 1877 příslušné integrální rovnice za předpokladu, že oblast, na níž se řešení úloh hledá, je konvexní; pak lze totiž dokázat konvergenci příslušné řady.

Roku 1885 publikoval Poincaré práci, ve které se zabýval teorií nekonečných systémů lineárních rovnic. V souvislosti s pracemi, které se týkaly rovnic matematické fyziky, nalezl mj. řešení rovnice $\Delta f + \lambda f = g$ s komplexními hodnotami λ; řešení mělo tvar meromorfní funkce proměnné λ (samozřejmě mimo póly). Na základě těchto výsledků se pustil do studia rovnice

$$(17) \qquad x(t) + \alpha \int_a^b K(t, u)\, x(u)\, du = y(t)\,, \quad t \in \langle a, b \rangle$$

a předpověděl, že její řešení v závislosti na komplexním parametru α bude meromorfní funkcí (1896). Tuto jeho domněnku dokázal teprve Fredholm.

Ivar Fredholm se narodil 7. dubna 1866 v rodině prosperujícího stockholmského obchodníka. Jeho učitelé na základní škole sotva předpokládali, že z jejich žáka bude jednou slavný matematik. V zápisech z oněch let se objevuje zmínka „málo obratný při počítání na tabuli". V každém případě byl Fredholm dobrým studentem; po maturitě se zapsal na techniku ve Stockholmu, kterou sice po jednom roce opustil, nicméně hluboký zájem o technické a praktické problémy ho provázel v celém dalším životě. V roce 1886 počal studovat matematiku na univerzitě v Uppsale. V té době nebyla úroveň uppsalské univerzity nijak valná, pěstovaly se tam převážně již dosti zastaralé partie geometrie. Po dvou letech a po dosažení první akademické hodnosti přechází Fredholm do Stockholmu, kde se stává žákem významného švédského matematika, profesora MITTAG-LEFFLERA. Fredholm studuje matematiku, jeho zájem se však soustřeďuje velkou měrou na teoretickou fyziku. Tento sklon poznamenává ostatně celé jeho matematické dílo.

První Fredholmova práce (publikovaná ve švédštině roku 1890) spadá do oblasti „čisté" matematiky. Obsahuje mj. tento vtipný příklad: Je-li $|a| < 1$, potom funkce

$$f(z) = \sum a^n z^{n^2}$$

má spojité derivace všech řádů na uzavřeném jednotkovém kruhu (ve zřejmém smyslu); přitom funkci f nelze analyticky pokračovat mimo kruh konvergence, takže jednotková kružnice je přirozenou hranicí funkce f. Metoda důkazu je zajímavá, je založena na jistých speciálních vlastnostech rovnice vedení tepla.

Fredholmova disertační práce (1898) je věnována matematické teorii pružnosti. I. Fredholmovi je udělen doktorát uppsalskou univerzitou a stává se docentem matematické fyziky na univerzitě ve Stockholmu. Další rok je velmi významný pro jeho vědeckou dráhu. Na jaře r. 1899 odjíždí spolu s LINDELÖFEM (1870—1946) do Paříže. Je to jeho první a vlastně též jediná studijní cesta, kterou podnikl. V Paříži se seznamuje s francouzskými matematiky, poslouchá přednášky PICARDA, HADAMARDA, BORELA, PAINLEVÉHO, POINCARÉHO a dalších. Po svém návratu informuje v srpnu 1899 dopisem Mittag-Lefflera o svých výsledcích v oblasti integrálních rovnic teorie potenciálu. V roce 1900 vychází Fredholmova sedmistránková práce s názvem *Sur une nouvelle méthode pour la resolution du problème de Dirichlet.* V tomto článku (o jehož výsledcích bude ještě řeč) je obsažen základ teorie Fredholmových integrálních rovnic a také její aplikace v teorii potenciálu, z níž výzkumy vznikly. Myšlenky této práce Fredholm rozpracoval v obsáhlejším článku publikovaném r. 1903 v Acta mathematica.

Fredholmova publikační činnost není rozsáhlá — spolu s předběžnými sděleními a referáty na konferencích je to celkem 18 prací; jeho sebrané spisy představují skromnou knížku o 160 stránkách.

Zmíněné dvě práce o integrálních rovnicích přinesly Fredholmovi velikou slávu. Jejich význam byl oceněn řadou proslulých matematiků, mezi kterými nechyběli Hilbert a Poincaré. Na Fredholmově psacím stole se množila pozvání různých zahraničních učených společností; o tom však nikdo (dokonce ani Fredhlomova rodina) nevěděl. Pozvání končila v zásuvce. Fredholm zůstal celý život nenápadný, skromný a neprůbojný. Odmítl místo vedoucího katedry čisté matematiky s poukazem, že spíše může přispět k rozvoji matematické fyziky. (Roku 1906 se stal profesorem mechaniky a matematické fyziky na stockholmské univerzitě.) Jeho zájem se soustředil na konkrétní problémy teorie potenciálu a jeho přednášky se týkaly zejména rovnic matematické fyziky. Fredholm nepatřil k vynikajícím přednášejícím; přednášel monotónně, často dělal u tabule chyby. Jeho sklon k praktickému využití matematiky se odráží v neúnavné aktivitě při organizování pojištění ve Švédsku. Rád také vymýšlel a vyráběl různé mechanismy. Pozoruhodná je jeho konstrukce mechanického zařízení pro grafické znázorňování řešení diferenciálních rovnic. Také se zachoval důmyslný přístroj na rytí spektrálních mřížek. Fredholm měl též velmi rád hudbu. Byl nadšeným obdivovatelem Bacha a sám hrál na flétnu a na housle. Zabýval se dokonce na sklonku života teoretickými otázkami akustiky hudebních nástrojů; z této práce se však zachovaly jen útržkovité poznámky. Ivar Fredholm zemřel 18. srpna 1927.

Vrátíme se opět k teorii integrálních rovnic. Neumannova metoda z r. 1877 užitá na řešení rovnice (17) poskytuje řešení ve tvaru mocninné řady v proměnné α; tato řada vzhledem k Poincarého hypotéze (řešení je meromorfní funkcí proměnné α) nemůže obecně konvergovat pro všechna α. Fredholm se proto rozhodl hledat řešení přímo ve tvaru podílu dvou celých funkcí. Pokusíme se čtenáři velmi zjednodušeně přiblížit jeho postup, který lze označit za technicky dosti náročný. Dosažení „očekávaných výsledků" zde bylo silně netriviální.

Fredholm řešil v podstatě rovnici (17), resp. (13) za předpokladu, že jádro K je funkce spojitá, rozšířil však pak svou teorii na širší třídu jader. Jeho úmyslem bylo nalézt řešení x ve tvaru

$$x(t) = \frac{c_0(t) + c_1(t)\,\alpha + c_2(t)\,\alpha^2 + \dots}{d_0 + d_1\alpha + d_2\alpha^2 + \dots},$$

kde řady v čitateli a jmenovateli konvergují pro všechna komplexní čísla α (a všechna $t \in \langle a, b\rangle$). Pro přirozená čísla n uvažoval dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ tvaru

$$u_0 = a, u_1 = a + h, \dots, u_n = a + nh\,, \quad \text{kde} \quad h = (b - a)/n$$

a nahradil integrál v (17) konečným součtem. Z historického hlediska je zajímavé, že stejně tak, jako si D. Bernoulli (1700–1784) představoval chvějící se strunu jako limitní případ n kmitajících částic (1732), považoval Fredholm integrální rovnici (17) za limitní případ systému lineárních rovnic. Sledujme hlavní kroky jeho postupu. Ze (17) dostaneme

$$x(t) + \alpha h \sum_{j=1}^{n} K(t, u_j)\, x(u_j) = y(t)\,,$$

což je rovnice, která při $n \to \infty$ přejde v (17). V této rovnici položme postupně $t = u_1, u_2, \dots, u_n$, takže dostaneme při zkráceném označení

$$y(u_i) = y_i,\, x(u_i) = x_i\,, \quad K(u_i, u_j) = K_{ij},\, i, j = 1, \dots, n$$

soustavu rovnic

$$x_i + \alpha h \sum_{j=1}^{n} K_{ij} x_j = y_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{18}$$

neboli

$$\sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} + \alpha h K_{ij})\, x_j = y_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Fredholm si tedy představoval (17) jako limitní případ soustav (18) a postupoval dále „přirozeným" způsobem.

Je-li $D_n(\alpha) = |\delta_{ij} + \alpha h K_{ij}|$ a označíme-li k_{ij} doplněk prvku $\delta_{ij} + \alpha h K_{ij}$, dostaneme (při $D_n(\alpha) \neq 0$) podle Cramerova pravidla

$$x_j = (\sum_{i=1}^{n} y_i k_{ij}) / D_n(\alpha)\,. \tag{19}$$

Vyjádříme-li $D_n(\alpha)$ jako polynom v α, dostaneme (píšeme pro jednoduchost jen první členy)

$$D_n(\alpha) = 1 + \alpha h \sum_{i=1}^{n} K_{ii} + \frac{\alpha^2 h^2}{2!} \sum_{i,j=1}^{n} \begin{vmatrix} K_{ii}\,, & K_{ij} \\ K_{ji}\,, & K_{jj} \end{vmatrix} + \ldots\,.$$

Limitním přechodem dostal odtud Fredholm vyjádření

$$D(\alpha) = \lim_{n\to\infty} D_n(\alpha) =$$

$$= 1 + \alpha \int_a^b K(v_1, v_1)\, dv_1 + \frac{\alpha^2}{2!} \int_a^b \int_a^b \begin{vmatrix} K(v_1, v_1), & K(v_1, v_2) \\ K(v_2, v_1), & K(v_2, v_2) \end{vmatrix} dv_1\, dv_2 + \ldots\,.$$

Podobným způsobem upravil i čitatele ve zlomku v (19) vpravo; úpravy, které jsou formálně dosti náročné, mu umožnily dospět k funkci $D(t, u, \alpha)$, která nakonec vystupuje ve vyjádření řešení ve tvaru

$$x(t) = y(t) + \frac{1}{D(\alpha)} \int_a^b D(t, u, \alpha)\, y(u)\, du\,. \tag{20}$$

Přiblížili jsme čtenáři jen zhruba formální postup, který Fredholm užil — oprávněnost limitních přechodů, konvergenci řad pro $D(\alpha)$ a $D(t, u, \alpha)$ pro všechna komplexní čísla α atp. zde nelze zdůvodňovat.

Výraz $D(\alpha)$ nazval Fredholm determinantem jádra K, neboť při diskusi řešitelnosti rovnice (17) hrál podobnou roli jako determinant soustavy lineárních rovnic. Tvrzení o řešitelnosti integrálních rovnic pro dosti širokou třídu jader K dokázal v článku z r. 1903.

Fredholmův výsledek byl nejen mocným stimulem pro rozvoj bádání v oblasti integrálních rovnic, ale znamenal také další podstatný kvalitativní krok v teorii řešení operátorových rovnic. Známý „konečný" případ (Cramer) a „spočetný" případ (von Koch) obohatil Fredholm o důležitý „spojitý" případ. V letech 1900–1901 se z referátů

Fredholmova kolegy HOLMGRENA na semináři v Göttingen dozvěděl Hilbert o nových výsledcích v tomto oboru. Okamžitě rozpoznal důležitost objevů a v následujících deseti letech se plně soustředil na práci v oblasti integrálních rovnic.

Hilbertovy práce z tohoto období obsahují nesmírné množství budoucích funkcionálně analytických výsledků (pochopitelně vyjádřených jazykem „klasické analýzy"). Podle jeho vlastních slov shledával práci v této oblasti důležitou pro teorii integrálu, rozvojů funkcí v řady, teorii lineárních diferenciálních rovnic, teorii potenciálu a pro variační počet.

Nejprve se soustředil na vyjádření rezolventního jádra $K_r(t, u)$ (viz (16)) a dokázal, že pro libovolné spojité (ne nutně symetrické) jádro K a α takové, že $D(\alpha) \neq 0$, lze řešení rovnice (17) vyjádřit ve tvaru (16'). Dokázal dále, že kořeny rovnice $D(\alpha) = 0$ jsou pro symetrické jádro (tj. takové, pro něž je $K(t, u) = K(u, t)$) vesměs reálné. Veden analogií s konečně rozměrným případem zavedl vlastní čísla a vlastní funkce jádra a dokázal „spojitý analog" věty o převedení symetrické matice na diagonální tvar. Odhalil též vlastnost, která je podstatná při vyšetřování rovnice typu (6) – je to kompaktnost operátoru A (této vlastnosti v podstatě Fredholm využívá při aproximaci rovnice (17) rovnicemi tvaru (18)). Hilbert též dokázal větu o rozvoji funkce

$$Ky : t \to \int_b^a K(t, u)\, y(u)\, \mathrm{d}u$$

(kde K je symetrické jádro a y spojitá funkce) ve Fourierovu řadu podle vlastních funkcí jádra K (Hilbertova-Schmidtova věta).

Další podstatné Hilbertovy výsledky i výsledky jeho pokračovatelů nemůžeme čtenáři v plné šíři přiblížit. Za zmínku však stojí poznatek, že přirozeným výchozím bodem pro studium rozvojů ve funkční řady nejsou diferenciální, ale integrální rovnice.

Z bezprostředních Hilbertových pokračovatelů jmenujme na prvním místě již zmíněného SCHMIDTA (1876–1959), který zobecnil Hilbertovy výsledky pro nesymetrická jádra. Hilbert studoval integrální rovnice pro spojité funkce K a y; F. RIESZ (1880–1956) zobecnil tyto výsledky pro obecnější funkce – řešení tohoto problému ho přivedlo ke studiu „obecných" Fourierových rozvojů a příslušných posloupností; studoval podmínky, kdy je daná posloupnost posloupností Fourierových koeficientů vůči danému ortonormálnímu systému funkcí.

Integrální rovnici (17) řešil F. Riesz za obecných předpokladů, kdy funkce K a y měly integrovatelnou druhou mocninou. FISCHER (1875–1959) pak dokázal, že takové funkce tvoří – v dnešní terminologii – vzhledem ke konvergenci v průměru stupně 2 úplný prostor, který je v jistém smyslu minimální. Odtud byl již krok k zavedení prostorů L^p, což provedl Riesz roku 1910. Zabýval se též „abstraktní teorií" operátorové rovnice (6) a zavedl také adjungovaný operátor A^* – analog transponované matice A'; tyto výsledky o rovnici (6) byly publikovány roku 1918. SCHAUDER (1899–1940) tyto výsledky roku 1927 zdokonalil a teorii „zesymetrizoval" – pro rovnici s operátorem A^* dostal analogické výsledky jako my na začátku pro rovnici (9'). Dnes se příslušná teorie pro kompaktní operátory přednáší v kursu funkcionální analýzy pod jménem Rieszova-Schauderova teorie.

Nebudeme zde již popisovat další vývoj Fredholmovy teorie integrálních rovnic. Poznamenejme, že jejích výsledků bylo mnohokrát užito při řešení různých konkrétních problémů aplikované matematiky; nesmírný je její význam pro rozvoj spektrální teorie apod. Dala podnět ke studiu různých prostorů funkcí, uplatnila se v přibližných metodách analýzy, stala se základem pro studium nelineárních operátorových rovnic a především odrazovým můstkem pro rozvoj funkcionální analýzy.

Za padesát let od Fredholmovy smrti urazila funkcionální analýza nesmírný kus cesty a z Fredholmových výsledků se stal příklad, který se v souvislosti s tzv. Fredholmovou alternativou uvádí v učebnicích nebo přednáškách často jen na okraj. Snad se nám však podařilo čtenáři ukázat, že Ivar Fredholm dal matematice mnohem více než jeden příklad.

Literatura

I. FREDHOLM: *Oeuvres complètes*, Litos Reprotryck, Malmö, 1955.

M. KLINE: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972.

A. F. MONNA: *Functional Analysis in Historical Perspective*, Oosthoek Publishing Company, Utrecht, 1973.

Počátky naší aplikované strukturní rentgenografie

K sedmdesátinám prof. A. Kochanovské

Ivo Kraus, Praha

8. března letošního roku se dožívá 70 let členka korespondentka ČSAV prof. dr. ADÉLA KOCHANOVSKÁ, DrSc., laureátka státní ceny Klementa Gottwalda. Své rozsáhlé životní dílo věnovala výzkumu mikrostruktury materiálu pomocí difrakce rentgenových paprsků. Má rozhodující podíl na tom, že využití LAUEOVA objevu nezůstalo u nás omezeno jen na výzkumné ústavy, ale stalo se součástí kontrolních a zkušebních metod v laboratořích a provozech průmyslu. Jaké byly počátky československé aplikované strukturní rentgenografie a kdy do jejího vývoje vstupuje s vědeckou prací prof. Kochanovská?