Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jiří Váňa

O vyučování volitelné matematice v SSSR

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 16 (1971), No. 6, 331--336

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137651

ktorí neľutovali námahu a čas na to, aby zahraniční hostia olympiády odchádzali spokojní a s nezmazateľnými spomienkami na našu vlasť.

Dobrá vec sa podarila, i keď radosť kazí neveľmi chýrne účinkovanie nášho družstva. Zostáva však nádej, že po serióznom rozbore príčin a zlepšení podmienok prípravy sa i naše výpravy budú vracať z MMO obťažkané cenami. Kiež by tomu mohlo tak byť už pri návrate z tej poľskej!

A. D. ALEXANDROV:

Ostrost dřívějších sporů mezi různými směry v matematice se jeví přehnanou, podíváme-li se na ně ze širšího hlediska. Existují různé úrovně abstrakce, různé úrovně přesnosti a dokonce rozličné logické systémy; je zde přesnost na úrovni inženýra, fyzika, obyčejného či vytříbeného matematika a nakonec specialisty v matematické logice. Avšak ani tato nejvyšší úroveň není nic absolutního. Při obvyklém výkladu základů geometrie na universitách je Eukleidova axiomatika líčena jako nedostačující a Hilbertova axiomatika jako ideální. To však není oprávněné, protože u Hilberta se vychází z intuitivního množinově-teoretického hlediska, které se samo stalo předmětem kritiky a jehož základy musely být teprve objasňovány. Stejnou naivitou se vyznačuje rozšířený zvyk hovořit o dokonalé přesnosti universitního kursu analýzy a vyjadřovat se pohrdavě o kursu analýzy pro inženýry nebo o analýze epochy Eulera. Ovšemže přesnost na úrovni Weierstrasse-Cantora, obvyklá v nynějších kurzech analýzy, je vyšší než přesnost Eulerova; že je větší u Hilberta než u Eukleida. Všechno jsou to ale pouhé stupně v rozvoji přesnosti matematiky.

O VYUČOVÁNÍ VOLITELNÉ MATEMATICE V SSSR

JIŘÍ VÁŇA, Ostrava

Ve školním roce 1970/1971 bylo v SSSR zahájeno vyučování matematice ve 4. ročníku střední všeobecně vzdělávací školy (děti ve věku 10 let) podle nových osnov. Bylo pro to vynaloženo velké úsilí. Ještě během let 1967—1970, kdy již byla schválena předběžná verze osnov, probíhaly práce na učebnicích. Byly ověřovány v pokusném vyučování v různých oblastech SSSR. Definitivní osnova je vždy schvalována současně s příslušnou učebnicí.

V nových osnovách se i nadále požaduje vytváření pevných, v mnoha případech automatizovaných početních návyků. Současně s tím se však zvyšují nároky na obecnost výkladu učiva, zdůrazňují se obecné principy, na jejichž základě je předmět vybudován. Má být odstraněna přehrada mezi aritmetikou a algebrou jako součástmi školské matematiky, postupně se mají zavádět potřebné množinové pojmy, hovoří se o zdůraznění pojmu funkce (zobrazení) a dokonce o funkcionálním přístupu k učivu, o výuce geometrie ve vektorovém podání. Přitom se předpokládá, že úplnou střední všeobecně vzdělávací školou (tj. desetiletou, v některých republikách SSSR jedenáctiletou) projde značná část mládeže. Mimořádné nároky na obsah matematického vzdělání absolventa úplné střední všeobecně vzdělávací školy si tedy vyžadují mimořádné způsoby práce se žáky. Nejčastěji se patrně bude využívat hodin volitelné (fakultativní) matematiky, která se může zavádět již od 7. ročníku, jak ukazuje tabulka o nejvyšších počtech hodin matematiky týdně v jednotlivých ročnících:

Tabulka 1.

Ročník	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Aritmetika s prvky algebry a geometrie	6	6	6							
Aritmetika a algebra				5	5					
Algebra						4	3/4	4		
Algebra a úvod do analýzy									3	3
Geometrie				1	1	2	3/2	2	2	2
Celkem povinně matematika	6	6	6	6	6	6	6	6	5	5
Volitelná matematika							2	4	6	6
Celkem povinně všechny předměty	24	24	24	30	30	30	30	30	30	30

Poznámka: V 1.—3. ročníku vyučuje matematice třídní učitel, ve 4.—10. ročníku odborný učitel. Děti vstupují do školy v 7 letech.

Pro volitelnou matematiku v 9. a v 10. ročníku se doporučuje zvláště rozšíření úvodu do matematické analýzy, seznámení s diferenciálními rovnicemi a s jejich užitím, seznámení s numerickými metodami současné matematiky, uvedení do problematiky lineárního programování, seznámení se základy užití samočinných počítačů. Dále je možné ve vybraných školách a třídách zřizovat speciální kursy asi v rozsahu 70 vyučovacích hodin, v nichž se žáci podrobněji seznamují např. s programováním pro samočinný počítač včetně uvedení vybraných programovacích jazyků.

Již tento výčet možných témat jistě vzbuzuje u našeho čtenáře zájem o jejich konkrétní zpracování. Kromě podrobných článků v časopise *Matematika v škole* může tento jeho zájem uspokojit série sborníků *Problémy matematické školy*, vydávaná péčí Institutu všeobecného a polytechnického vzdělání Akademie pedagogických věd SSSR v nakladatelství Prosvěščenije v Moskvě. Prvý sborník vyšel již v roce 1965, poslední nám známý v roce 1969; všechny jsou v ČSSR snadno dostupné.

Zajímavé údaje nalezneme v předmluvě sborníku [1], která uvádí, že snahy o zavádění volitelné matematiky (případně speciálních kursů) lze v SSSR sledovat už od roku 1959/1960, přičemž již počátkem 60. let byla zavedena v celé řadě škol. Proto už můžeme hovořit o více než desetileté zkušenosti, která v sobě skrývá překonávání řady problémů. Hlavním z nich asi bylo dosáhnout organického sepětí volitelné matematiky s běžnou školskou matematikou. Zdá se, že dnes se to stalo jedním z cílů postupně zaváděných osnov a učebnic matematiky v SSSR. Pro případné odpůrce tzv. překotného modernizování školské matematiky stojí zato poznamenat, že v době, kdy nové pojetí matematiky dorazí v SSSR do 9. ročníku střední školy, bude se opírat o více než patnáctiletou zkušenost. Domnívám se, že opírat se o zkušenost ještě delší už není možné. Stačí si např. uvědomit, že za ta léta se podstatně změnily požadavky na práci se samočinnými počítači, která má být náplní jednoho ze speciálních kursů a ovlivňuje aspoň nepřímo ještě další témata. Jsme ve výhodě, můžeme-li zkušeností sovětské školy využívat, protože ke změně pojetí středoškolské matematiky dochází u nás teprve v posledních několika letech. Navíc volíme obdobný „taktický" postup jako v SSSR. Dáváme totiž do rukou středoškolských profesorů návody možných cest, jimiž lze k novému pojetí dospívat, aniž bychom striktně vymezovali každý jednotlivý detail, který je třeba nezbytně dodržovat.

Ve sbornících zaujmou především stati o vyučování základům matematické analýzy, které většinou napsali vysokoškolští učitelé současně pracující se žáky středních škol. Autoři správně poznamenávají, že nelze přenést vysokoškolské kursy matematické analýzy do střední školy, naznačují, co je podle jejich názoru žádoucí a možné (viz např. str. 13—19 v [1], str. 5—47 v [3], str. 48—175 v [3]). Zajímavé je, že derivování a integrování nepovažují za nikterak podstatné, i když se mu nevyhýbají. Dávají přednost např. práci se spojitými funkcemi jedné reálné proměnné, přičemž uvádějí celou řadu vybraných úloh vhodných pro žáky. Úlohy jsou obtížnější (až na výjimky při zavádění nových pojmů) než ty, které jsme zvyklí předkládat našim žákům. Na str. 28 sborníku [2] se od žáků 9. ročníku požaduje, aby dokázali vzájemnou zaměnitelnost definice spojitosti funkce v bodě pomocí limity posloupnosti a definice téhož pojmu pomocí okolí. Na str. 29 sborníku [2] je úloha: Dokažte, že každé spojité zobrazení množiny bodů úsečky do sebe ponechává aspoň jeden fixní bod. Důkazovým úlohám se dává přednost před ostatními, mnohé z nich však vyžadují značnou početní zběhlost. Jestliže je žák řeší s pomocí vyučujícího nebo aspoň v připravené metodické řadě, může postupně nabývat této zběhlosti. (Úlohy se ve sbornících často uvádějí v pořadí, ve kterém byly žákům skutečně předkládány, viz např. str. 96—138 v [4].) Časová náročnost takového metodického postupu je veliká, našim dosavadním zvyklostem odporuje. Snad jen někteří řešitelé MO věnují svému oblíbenému předmětu obdobné množství času. Ve sbornících nalezneme zmínky o tom, že žákům, kteří projeví zájem, se zadávají soubory obtížnějších úloh i na dobu prázdnin; viz např. str. 47 v [2].

Současně můžeme ve sbornících číst i příspěvky autorů, kteří obtížnost úloh nepřehánějí (jde asi o jiné podmínky, spíše o práci s nadanými žáky jedné školy vedenými jejich učitelem matematiky). Velmi propracované je vyučování grafickému znázorňování funkcí (viz např. str. 324—346 v [2] nebo str. 223—271 v [4]), odtud by bylo možné velmi mnoho převzít pro vyučování matematice na gymnasiích u nás. Obávám se však, že názory na význam tohoto tématu se budou různit. Příspěvky otištěné ve sbornících mohou ovšem dát diskusi aspoň faktický podklad.

Podobně by mohla být přímou pomocí pro našeho profesora matematiky stať o obyčejných diferenciálních rovnicích (str. 87—123 v [1]). Zdá se, že výběr materiálu v ní je vhodný, vhodné je též vycházet z technických a přírodovědných aplikací. Toto téma bylo probíráno v 10. ročníku střední školy a může sloužit k „mezinárodnímu srovnání", budeme-li je probírat se žáky našeho gymnasia.

Příspěvky věnované některým otázkám lineární algebry najdeme např. na str. 5—47 v [2], na str. 5—84 v [3], na str. 161—215 v [3], na str. 7—51 v [4]. Uvážíme-li obdobnou tematiku probíranou dnes ve 2. ročníku našich gymnasií se všemi žáky, zjistíme, že její výklad je podáván abstraktněji, s větším důrazem na obecnost, s menším na aplikace, než je tomu v popisovaných hodinách volitelné matematiky v SSSR. Společným znakem je snaha uplatnit znalosti vektorové algebry při probírání geometrie. To je dnes velmi časté nejenom v SSSR a ČSSR, ale výběr učiva nebývá jednotný. Zdá se, že není shoda ani v tom, zda je účelné zabývat se nejprve důkladně vektory v rovině a na přímce, pak v trojrozměrném prostoru, a nakonec teprve v n-rozměrném prostoru, kde n je libovolné přirozené číslo, či najednou vektory tvořenými v libovolné základní množině. Přitom nalezneme na str. 7—51 sborníku [4] zprávu o práci se třemi desátými třídami moskevské školy, jejichž žáci se otázkami lineární algebry zabývali už druhým rokem a studovali n-rozměrný eukleidovský metrický prostor, v něm otázky délek, obsahů a objemů, lineární operátory, křivky, plochy a nadplochy druhého stupně. Samozřejmě pomocí krátkého výkladu a samostatného řešení úloh. Z nich vybírám:

- Uveďte příklad lineárních operátorů A a B takových, že je $AB \neq BA$.
- Nechť je A takové zobrazení n-rozměrného eukleidovského prostoru do sebe, které zachovává skalární součin. Dokažte, že A je lineární operátor.
- Jaký je rozměr prostoru všech lineárních operátorů v n-rozměrném vektorovém prostoru?
- Určete aspoň jednu rovinu protínající elipsoid

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0\,.$$

Nutno ještě připomenout, že žáci nadaní pro matematiku mají v SSSR možnost studovat v internátních školách při fakultách vysokých škol a při matematických ústavech, ve speciálních třídách běžných škol, ve večerních školách, dálkových (korespondenčních) školách, v letních (prázdninových) školách, účastnit se práce v zájmových kroužcích, v klubech, v matematických olympiádách atd. Bez osobního seznámení s těmito způsoby práce nejde ani odhadnout její šířku a hloubku, náročnost a účinnost, počty žáků, kteří se jí účastní. Snad nebude nesnadné získat pro náš časopis původní stať sovětského autora. Jistě by to mohl být některý z autorů příspěvků ve sbornících [1] — [4]. Příklad, který můžeme získat, bude poučný.

V tématech z matematické analýzy i lineární algebry se projevuje snaha o aplikovatelnost získaných znalostí a dovedností. Předpokládá se zřejmě, že se ani žáci vyšších tříd střední školy neobejdou bez vhodné motivace a značně názorné, o intuici opřené přípravy k osvojení abstraktních matematických pojmů. Má-li jít o aktivní osvojení uceleného tématu, je aplikace získaných znalostí a dovedností jeho samozřejmým dovršením, které navíc odpovídá požadavkům společnosti na socialistickou školu. Zpracování některých příspěvků však vyvolává pochybnosti o tom, zda jde vždy poskytnout dostatek příležitosti k apalikacím bez přemíry probíraných nových pojmů. Autoři si to jistě uvědomují; lze to ostatně pozorovat při četbě několika příspěvků týchže autorů, v nichž využívají svých postupně získaných zkušeností (viz např. příspěvky R. S. Gutera a spolupracovníků na str. 20—40 v [1], na str. 176 až 246 v [2], na str. 96—138 v [4]). Množství nových pojmů se snaží omezovat.

Poněkud výjimečné jsou příspěvky M. L. Gervera a spolupracovníků (str. 41—86 v [1], str. 216—237 v [3]), v nichž najdeme řadu úloh z abstraktní algebry. Jde o práci s tabulkami popisujícími binární operaci v konečné množině, o zkoumání vlastností binárních operací a jednodušších vlastností algebraických struktur s jednou či se dvěma binárními operacemi, o studium izomorfismů těchto struktur. Přitom se ovšem klade důraz na vhodné interpretace, takže v tomto směru příspěvky z řady ostatních nevybočují. Např. při studiu grupy se uvádějí prakticky všechny příklady grup, s nimiž se žák může běžně setkat. Při studiu izomorfismů se využívá znalostí číselných oborů; např. v úloze, zda jsou izomorfní grupy $\langle N, +\rangle$ a $\langle Q, +\rangle$, kde N je množina přirozených čísel a Q množina racionálních čísel. Požaduje se konstrukce algebraické struktury splňující jistou podmínku nebo zdůvodnění, že takováto konstrukce není možná; např. v úloze: lze sestrojit komutativní těleso ze 4, nebo z 6, nebo z 8, nebo z 12, nebo z 36 prvků? Atd., atd. Zaujaly by podobné úlohy též žáky našich gymnasií? Dnes máme možnost opřít se např. o Hrušovu brožuru *Polynomy v moderní algebře* (Praha, Mladá fronta 1970. 104 s.).

Jakýmsi příspěvkem do stálé diskuse o tom, zda žákům gymnasií mají být předkládány jen úlohy těsně se přimykající k učivu závazně určenému osnovami, úlohy víceméně standardní, znovu a znovu opakované, či naopak úlohy vyžadující především vtip, nápad, pružné a tvořivé myšlení, jsou stati o úlohách večerní matematické školy při Moskevské státní universitě (viz str. 151—169 v [1] a str. 139 až 193 v [4]). Přiznám se, že úlohy tam uvedené jsou mi blízké, že bych je rád zadával studujícím gymnasia, jsou mnohdy jakýmsi ztělesněním některých snah pracovníků naší MO. Přitom musím do značné míry přijmout námitku, že obsah každé z uvedených úloh není natolik podstatný, aby bylo vhodné zadávat ji všem žákům bez výjimky. Zdá se, že i profesor gymnasia potřebuje pro volitelnou matematiku (vyuč. předmět, zájmový kroužek, klub) sbírku úloh, ve které ho autoritativní autoři zbaví pochybností, zda je žádoucí zabývat se úlohami o dělitelnosti, o řešení speciálních rovnic, o kódování, o vybarvování rovinných oblastí, o kombinatorických otázkách atp., a to často v žertovné podobě. Např.

● Je dána množina čísel $\{3, 3^2, 3^3, \ldots, 3^{1000}\}$. Každé z čísel této množiny je zapsáno jen jednou ze tří tužek: červenou, modrou, zelenou. Dokažte, že součet čísel zapsaných červenou tužkou nemůže být roven součtu čísel zapsaných zelenou tužkou.

● Autobusové jízdenky v Švambranii mají čísla od 000001 do 999999. Švambránci považují za šťastná ta čísla, u kterých součet prvých tří cifer je roven součtu posledních tří. Dokažte, že součet všech „šťastných" čísel na jízdenkách ve Švambranii je dělitelný 13.

● Je dána úsečka AB. Sestrojte takový čtverec, aby body A, B ležely na jeho obvodu a aby součet vzdáleností bodu A od jeho vrcholů byl co nejmenší.

Závažnějším problémem je volba tématu z numerické matematiky, kterému by měli být vyučováni žáci střední školy. Učitelé sovětských škol získali v tomto směru tak bohaté zkušenosti, že zde nezbývá, než čtenáři doporučit, aby jich využil, je-li postaven na místo, kde je to možné. Třeba tak, aby si rozmyslel, zda volba úzce vymezeného tématu numerické matematiky je nejvhodnějším řešením. Pro žáka střední školy by možná bylo účelnější, kdyby znal možnosti využití matematiky v dnešní socialistické společnosti a požadavky, které z nich vyplývají na středoškolsky vzdělané pracovníky. Články ve sbornících [1] — [4] takovou informaci v plné míře neposkytují. Snad lze doufat, že na stránkách našich časopisů dostaneme již brzy původní informace zasvěcených autorů z ČSSR. Bylo by jich velmi zapotřebí. Připomeňme si znovu a znovu se opakující nedostatek uchazečů o studium oborů náročných na matematickou přípravu. Uvážíme-li výsledky dosažené s některými žáky ve volitelné matematice v SSSR, přestane se nám jevit nesplnitelným požadavek, abychom překonali nepříznivý postoj většiny našich žáků k matematice. Dosáhneme-li navíc u některých z nich výborných výkonů, tím lépe.

Literatura

[1] *Obučenije v matematičeskich školách.* Red. ŠVARCBURD, S. I. - MONACHOV, V. M. - AŠKINUZE, V. G. Moskva: Prosvěščenije 1965. 340 s.

[2] *Matematičeskij analiz i algebra.* Red. ŠVARCBURD, S. I. Moskva: Prosvěščenije 1967. 347 s.

[3] *Linejnaja algebra i geometria.* Red. ŠVARCBURD, S. I. Moskva: Prosvěščenije 1967. 368 s.

[4] *Matematika i jestestvoznanije.* Red. ŠVARCBURD, S. I. Moskva: Prosvěščenije 1969. 447 s.