Barry Cipra
Archimedes Andrews a euklidovská časovaná bomba

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 34 (1989), No. 2, 108--113

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137576

vyučování

ARCHIMEDES ANDREWS A EUKLIDOVSKÁ ČASOVANÁ BOMBA

Barry A. Cipra

Autor získal doktorát na marylandské univerzitě v roce 1980. Pracoval jako asistent na M.I.T. a na státní univerzitě v Ohiu. V současné době je docentem matematiky na St. Olaf College v Northfieldu v Minnesotě. Je autorem knihy *Misteaks and how to find them before the teacher does* („Chybi a jak je najít dřív než učitel"), která vyšla ve vydavatelství Birkhauser v Bostonu.

„Archimedes" Andrews byl vždycky trochu zvláštní povaha, ale v okamžiku, kdy mi telefonicky sdělil, že právě sestrojuje rozbušku k bombě, začal jsem si vážně dělat starosti. Naštěstí jsem s Archimedem zadobře. Ten telefonát nebyl míněn jako výhrůžka; Archimedes si prostě přál, abych se přišel podívat na jeho nejnovější nápad.

Stiskl jsem zvonek u Archimedova bytu s jistým váháním, protože jsem si nebyl jist, na co ta rozbuška může být vlastně napojena. Archimedes mi otevřel osobně. Měl na sobě své obvyklé oblečení: špinavé džíny, umolousané žluté tričko a tenisky, z nichž mu čouhaly prsty a jejichž tkaničky byly podivně zašmodrchané. (Archimedes se příležitostně koupal, což však nemělo nic společného s výměnou šatstva). Také měl na tváři své obvyklé dvoudenní strnisko, ale přece jen dnes vypadal trochu jinak.

„Včera jsem se rozhodl, že se dám ostříhat na způsob *skin-head*" vysvětloval, zatímco si dlaní uhlazoval to, co mu ještě zůstalo na temeni. Nebylo toho víc než měl na bradě. „Při tom, co teď dělám, nechci riskovat, že mi začnou hořet vlasy".

„Pověz mi o té bombě," řekl jsem.

„Rozbušce," opravil mě Archimedes. „Není to bomba, ale rozbuška. Vlastně je to časovací zařízení. O výbušnině stále ještě uvažuji. Pojď dál, abych ti to mohl ukázat."

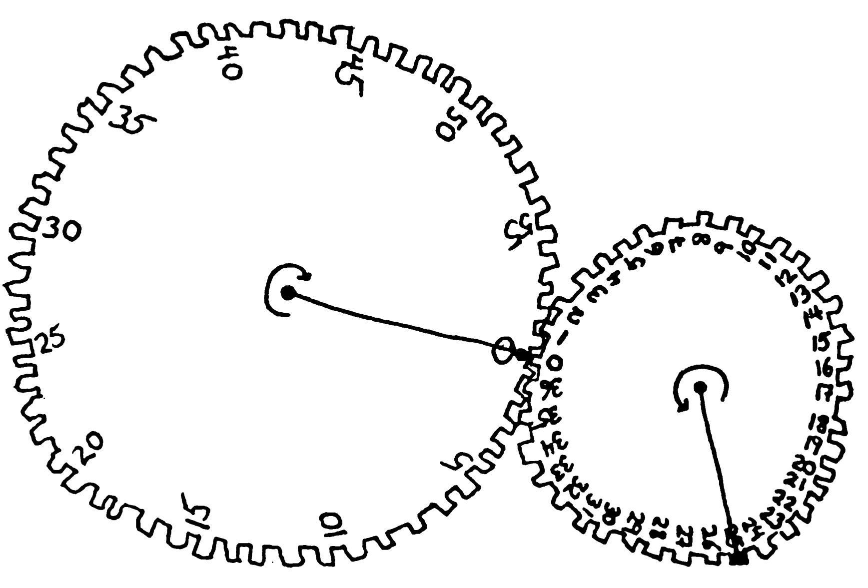
Vešli jsme do Archimedovy sklepní dílny. Byla vybavena podobně jako bývá laboratoř po větším zemětřesení. Zbloudilé elektronické součástky byly na podlaze promíchány s prázdnými zahnědlými zkumavkami a běžným nářadím. Pracovní stůl byl přecpán záhadnými přístroji a zhruba načrtnutými schématy dalších přístrojů. V koutě práchnivěla hromada hadrů. Vypadalo to jako staré šatstvo, jenže Archimedes měl své staré šatstvo vždy na sobě. Bylo to proto nejspíš prádlo. V tom matně osvětleném sklepení s popraskanými stěnami a s nedokončeným stropem vládlo ovzduší nepořádku a také příznačného zápachu. Nebylo tam žádné větrání. V horkém počasí se trubky orosovaly a uprostřed podlahy, v místě kde měl být odtok, se utvořila černá kaluž. Chvílemi byl zápach přímo neodolatelný. Tehdy mě napadalo, zdali tu Archimedes neprováděl nějaké experimenty s pokusnými zvířaty, na která pak dočista zapomněl. Avšak Archimedes zřejmě vždycky věděl, kde co má. Hned mě upozornil na mechanismus se dvěma ozubenými koly, jaký je nakreslen na obrázku.

„Prima, jak to funguje?"

„Řekl bych, že bys na to mohl přijít sám," odpověděl Archimedes se svou typickou arogancí.

„Dobrá," přijal jsem výzvu. „Tamty

Archimedes Andrews and the Euclidean Time Bomb. The Mathematical Intelligencer, Vol. 9, No. 1, 44—47. Přeložil OLDŘICH KOWALSKI.



dráty, které vycházejí ze středů obou ozubených kol, musí být součástí elektrického obvodu. Protože vím, k čemu má ta věc sloužit, je to jasné: když se oba dráty dotknou, elektrický obvod se uzavře a – bum."

„Neříkáš to špatně," odvětil Archimedes. „Vlastně velmi dobře. Velké kolo má šedesát zubů a je připojeno k hodinovému stroji, který jím otočí dokola jednou za minutu. Drát na velkém kole je na obvodu pevně spojen s polohou ‚0', která je vždy výchozí polohou při styku s druhým kolem. Drát na tom druhém kole má pohyblivý konec a můžeš jej připojit k libovolnému zubu. Velké kolo se otáčí ve směru hodinových ručiček, takže malé kolo se otáčí v opačném směru. A teď dávej pozor. Myslíš, že bys uměl vypočítat, jak nastavit aparát, aby to bouchlo řekněme za pět minut?"

„Podívejme se na to," řekl jsem a zkoumal jsem mechanismus. „Za jednu minutu se otočí velké kolo o šedesát zubů, tedy malé kolo se otočí o všech šestatřicet zubů plus –"

„Chyba lávky: sedmatřicet. Zub označený nulou se počítá také."

„Aha, máš pravdu. To asi mění situaci, že ano? Dobře, sedmatřicet. To znamená, že tu bude navíc, moment, třiadvacet zubů. Je to dobře? To znamená, že když nastavíš drát na zub č. 23, nastane výbuch za jednu minutu."

„Dobře – ale když to má být za pět minut?"

„Hned se k tomu dostanu. Za dvě minuty projde malé kolo dalších šedesát zubů od toho třiadvacátého, tedy vykoná celou otáčku a přibude dalších třiadvacet zubů, což dá šestačtyřicet, ale to je víc než máme zubů, tedy –"

„Nech mě, abych ti ušetřil trochu času, Einsteine," přerušil mě Archimedes. „Za pět minut se otočí obě kola o tři sta zubů. Ale pokaždé, když se malé kolo otočí o sedmatřicet zubů, vrátí se do původní polohy. Tedy stačí vydělit třista sedmatřiceti a vzít zbytek, což jsou čtyři, jak bys i ty snadno spočítal. Tedy chceš-li, aby ta věc vybuchla za pět minut, musíš nastavit drát do polohy 4. Pokud jde o obecný případ, dovol mi, abych ti ho napsal."

Archimedes sebral potrhaný cár papíru a okousanou tužku, pak napsal formuli:

$$60t - 37n = p\,.$$

„Tady to máš. Písmeno ‚t' označuje potřebný čas v minutách. Symbol ‚n' znamená počet celých otáček menšího kola a ‚p' je pořadové číslo zubu, který bude v závěrečném okamžiku ve styku s velkým kolem. Je-li dáno t, musíš vypočítat n a p tak, že dělíš číslo $60t$ číslem 37 — pak je n celočíselný podíl a p je zbytek."

„Rozumím."

„Opravdu? Pak mi tedy řekni, jak nastavíš naše zařízení, aby bomba vybuchla přesně za hodinu."

Vzal jsem si Archimedovu tužku a spočítal jsem to: „Jedna hodina znamená $t = 60$, takže $60t = 3600$. Dělení číslem 37 dá $n = 97$ a $p = 11$, takže bych nastavil zařízení na zub č. 11."

„A potom bys zřejmě půl hodiny počkal, aby ses ujistil, že soukolí dobře funguje?"

„No jistě, proč ne?" Měl jsem však tušení, že se Archimedes chystá s něčím na mě vybafnout. Měl v obličeji takový zvláštní výraz.

„Prima, řekni mi tohle: jak bys nastavil čas, kdybys chtěl načasovat výbuch dejme tomu za 23 minut?"

„No dobrá, poloha 23 přivodí výbuch za 5 minut, takže by třeba poloha 5 mohla způsobit výbuch za 23 minut ..."

„Tohle je ta největší ptákovina, jakou jsem dnes vůbec slyšel. O tom, jak je to pitomé, bychom si mohli pohovořit později, ale teď mi řekni, proč jsi prostě nepoužil ten vzorec?"

Znovu jsem rychle počítal: $60 \times 3 = 1380 = 37 \times 37 + 11$. „Poloha 11" oznámil jsem. „To je zajímavé, malé kolo se otočí právě tolikrát, kolik je na něm zubů."

„Je tu ještě něco zajímavějšího," přel se Archimedes. „Jestlipak na to přijdeš?"

Věřím, že čtenář je rychlejší, než jsem byl tehdy já. Archimedes mi to nakonec musel povědět.

„Když jsi načasoval výbuch za jednu hodinu, nastavil jsi polohu 11. Co se však stane za 23 minut? Ví to zařízení něco o tom, že jsi ho načasoval, aby běželo celou hodinu? Stará se snad o to, že tu stále ještě sedíš a civíš na ně? Ne! Chystá se pouze dokončit svůj cyklus, udělat svou práci a rozfofrovat ti tvé knoflíky až na ulici."

„Ovšem," řekl jsem. „Je tu pouze třicet sedm poloh, na které můžeme zařízení nastavit. Takže na delší dobu se to nastavit nedá. Musí to bouchnout v prvních sedmatřiceti minutách."

„Ne tak zhurta, Einsteine. Jak jsi na to přišel?"

Skutečně jsem si myslel, že jsem Archimeda tentokrát doběhl — měl jsem připraveno neprůstřelné logické zdůvodnění. Ale stále jsem byl z něho nesvůj. Zkouší mě snad pouze, jak to má někdy ve zvyku nebo již připravuje další past, jak je to u něj obvyklé?

„To je jednoduché. Na malém kole je pouze sedmatřicet zubů. Když spočítáš, které zuby odpovídají jednotlivým prvním sedmatřiceti minutám, pak využiješ všechny zuby, takže to nemůžeš nastavit tak, aby to bouchlo později než za sedmatřicet minut. Vlastně to může běžet pouze šestatřicet minut, protože ve skutečnosti začínáš s nulou."

Archimedes se usmíval, což bylo špatné znamení: Archimedes se usmívá pouze když někoho přistihne při logickém nedopatření.

„Těsně vedle. Předpokládáš něco, co nemusí být nutně pravda."

„Co že předpokládám?" dotazoval jsem

se vzdorovitě. „Máš přece ten vzorec a k němu sedmatřicet zubů. Co že předpokládám? Tady jde o *fakta*."

„Předpokládáš, že všechny zuby budou využity. Zdá se, že si myslíš, že vzorec chce pokaždé použít jiný zub a že to skončí teprve až nezbudou žádné zuby, ze kterých by si mohl vybrat. Ale vzorce „nechtějí" cokoli. A i kdyby chtěly, kdo se vyzná v jejich psychologii? Možná, že se díváme na schizofrenika nebo manio-depresivního pacienta. Už jsem viděl i několik katatonických rovnic – takových, co prostě jen sedí a zírají na tebe. Ať už je to tak nebo tak, řekl bych, že máme co dělat s velmi nevyrovnanou osobností."

„Jak to?"

„Dovol mi, abych ti to ukázal." Archimedes vytáhl zásuvku plnou různých tretek a papírů a vytáhl odtud jiný ozubený mechanismus, který vypadal stejně jako ten první, až na to, že malé kolo mělo jen šestatřicet zubů.

„To bylo moje první časovací zařízení," vysvětloval Archimedes. „Musím připustit, že jsem byl zpočátku stejně zabedněný jako ty. Možná ještě pitomější, protože jsem aparát skutečně napojil na výbušninu. Šlo jen o špetku střelného prachu, ale všiml sis mého obočí? V každém případě formule pro tento starý přístroj zní

$$60t - 36n = p\,.$$

Nevypadá to příliš odlišně od našeho předchozího vzorce, ale ta odlišnost má pekelný říz."

„Chtěl jsem to nastavit na pět minut. Protože jsem si spočítal, že $60 \times 5 = 300 = 36 \times 8 + 12$, zvolil jsem polohu 12. Proti mému očekávání to bouchlo za dvě minuty. Uprostřed hašení jsem si uvědomil, že vůbec nezáleží na tom, kdy já si přeji, aby nastal výbuch, ale že to vždycky bouchne buď za dvě minuty, nebo za jednu minutu, anebo okamžitě!"

„To byl důvod, proč jsem přešel k tomuhle novému děťátku se sedmatřiceti zuby. Tím, že jsem přidal jeden zub, ovšem tak, že jsem zhotovil nové ozubené kolo – mechanismus získal mnohem lepší chování. Teď už může být nastaven na jakýkoli čas až do šestatřiceti minut."

„Takže jsem měl přece jen pravdu."

„Ne tak docela. Tvůj závěr byl správný, ale ne tvoje úvaha."

„Jaký je v tom rozdíl, pokud je odpověď správná?"

Mohl jsem přímo vidět, jak reakce v Archimedově mysli vzkypěla a pak se zase usadila. Když se Archimedes rozzuří, jeho tvář se zbarví do šarlatova a tepna na krku mu zběsile pulsuje, jak se snaží napumpovat veškerou zásobu krve do jeho objemného čela. Hněv se zdá být jedinou věcí, která dokáže zpomalit Archimedovy myšlenkové pochody, a to mi poskytlo čas, abych se rozhodl – moudře – že si nenechám rozpárat hlavu hned tak časně ráno.

„Šetři páru, Archimede," řekl jsem. „Jen jsem tě škádlil."

„Rád bych tomu věřil," odpověděl Archimedes, když se mu obličej opět odkrvil. „Rozhodně je vidět, jak nestabilní je naše formule: jedna nepatrná změna a odpovědi jsou zcela odlišné."

„V čem to je?"

„Dělitelnost. Všechno se redukuje na dělitelnost," odpověděl Archimedes záhadně.

„Podívej se na rovnici $60t - 36n = p$," pokračoval. „Musíš si všimnout, že 60 a 36 jsou obě dělitelné 12, takže můžeme stejně dobře napsat rovnici ve tvaru $5t - 3n = p/12$. To znamená, že p musí být také dělitelné 12; jinak bys dostal celé číslo rovné necelému zlomku."

„Ale počkej," přerušil jsem ho. „Zařízení přece můžeš nastavit do jakékoliv polohy p. Nemusí to být násobek dvanácti."

„Musí, chceš-li, aby vůbec došlo k výbuchu. Když nastavíš časování dejme tomu do polohy 2, což ovšem není dělitelné 12, kola se budou otáčet a otáčet donekonečna, aniž by se dráty dotkly. Přemýšlej o tom: když se velké kolo jedenkrát otočí, jeho nulová značka se setká se značkou 24 malého kola, podruhé se značkou 12 a pak opět se značkou 0 a všechno začne znovu."

„Jde o velmi jednoduchou vlastnost rovnic tvaru $ax - by = c$. Jestliže čísla a, b mají společného dělitele, který není dělitelem čísla c, pak rovnice nemá řešení — alespoň ne v celých číslech."

„Aha, tak tím to je: 37 a 60 nemají žádného společného dělitele, takže rovnice $60x - 37y = p$ má vždycky řešení."

„Znovu špatně, Einsteine. Závěr je správný, ale ne tvoje úvaha. Řekl jsem, že když a a b mají společného dělitele, pak hořejší rovnice nemá vždycky řešení. Můžeš to samozřejmě obrátit a říci, že když rovnice má vždycky řešení (pro libovolné c), pak a a b nemají společného dělitele. Ale ty se snažíš o obrácení ve špatném směru, protože říkáš, že když a a b nemají společného dělitele, pak rovnice má vždycky řešení. Uvědomuješ si ten rozdíl?"

„No jo, vím, co chceš říct. To první se nazývá obrácení a to druhé opak."

„Je mi jedno, jak to nazveš," řekl Archimedes netrpělivě, „pokud to správně použiješ."

„Říkáš tedy, že kontrolou těch společných dělitelů pouze zjistíš, které rovnice nemají řešení."

„Vůbec ne. Řekl jsem přece, že tvůj závěr byl správný: když a a b nemají společného dělitele, pak rovnice $ax - by = c$ má vždycky řešení. Pouze tvůj logický úsudek byl špatný. Problém potřebuje mnohem důkladnější rozbor."

„Rád bych si poslechl ten důkladný rozbor," řekl jsem, protože jsem dobře věděl, že ho stejně uslyším.

„Když na tom trváš. Pro začátek se omezíme na *kladná celá čísla*. Ve skutečnosti se problém týká spíše oboru *všech* celých čísel, ale nic se nestane, jestliže se omezíme na jeho kladnou část. Takže když mluvím o rovnici $ax - by = c$, můžeš předpokládat, že vždy půjde o kladná celá čísla neboli o přirozená čísla, je-li ti to tak milejší."

„Za druhé, když řekneme, že a a b nemají společného dělitele, myslíme tím ve skutečnosti, že nemají společného dělitele *většího než* 1. Zřejmě jednička dělí každé celé číslo, takže je společným dělitelem kterýchkoliv dvou čísel. Stejně však je kvůli stručnosti lépe říkat ‚neexistuje společný dělitel' a ušetřit si dodatek ‚větší než jedna'."

„Nyní předpokládejme, že a a b nemají společný dělitel, ale že rovnice $ax - by = c$ přitom nemá řešení. Jestliže odtud vyvodím spor, dokáži tím slíbené tvrzení. Sleduješ mě?"

„Ano, tomu se říká důkaz sporem."

„Tak nějak. Nejdříve chci teď ukázat, že a a b nemohou být sobě rovna. To plyne obecně z toho, že nemají společného dělitele, ale zůstává zde stále možnost, že $a = b = 1$. V tom případě ovšem naše rovnice zní $x - y = c$ a má zřejmě spoustu řešení, takže i tuto možnost můžeme vyloučit."

„Máme tak pouze dvě možnosti: $a > b$ a $b > a$. Obě by se měly vzít do úvahy, ale rozbor obou možností je v podstatě stejný. Proto vysvětlím vše podrobněji jen pro $a > b$. Trik je v tom, že položíme $a' = a - b$, což je kladné číslo, a uvažujeme rovnici $a'x - by = c$. Kdyby nyní tato nová rovnice měla řešení, řekněme (x_0, y_0), platilo by

$$c = a'x_0 - by = (a - b)\, x_0 - by_0 = \\ = ax_0 - b(x_0 + y_0)\,,$$

což znamená, že $(x_0, x_0 + y_0)$ by bylo řešením původní rovnice $ax - by = c$. Protože jsme předpokládali, že $ax - by = c$ nemá řešení, musíme učinit závěr, že $a'x - by = c$ také nemá řešení."

„Podobně v případě $a < b$ dostaneme jinou rovnici $ax - b'y = c$, která nemá řešení. Současně vidíme, že ani čísla a', b, ani čísla a, b' nemohou mít společného dělitele. Kdyby například d dělilo a' a b, pak by bylo i dělitelem čísla $a' + b$, což je a, a tedy by bylo společným dělitelem čísel a a b. Podobně to vychází pro a a b'."

„V každém z obou případů zakončíme náš postup konstrukcí nových dvou čísel — nazvěme je a_1 a b_1 — která nemají společného dělitele a pro která rovnice $a_1x - b_1y = c$ nemá řešení. (Číslo c zůstává stejné; nehraje zde téměř žádnou úlohu.) Ale nyní si můžeš stejně pohrát s těmito dvěma čísly a dojít k další dvojici čísel a_2 a b_2 obdobných vlastností. A pak můžeš použít tuto dvojici a získat další a další."

„Konečným výsledkem je nekonečná posloupnost dvojic (a, b), (a_1, b_1), (a_2, b_2), ... Důležité nyní je, že každá dvojice je ‚menší' než dvojice předcházející v tom smyslu, že $a + b > a_1 + b_1 > a_2 + b_2 \dots$, protože při konstrukci každé nové dvojice používáme *odčítání*. Jestliže položíme $s = a + b$, $s_1 = a_1 + b_1$, atd., vidíme, že jsme dostali řetězec nerovností

$$s > s_1 > s_2 > \dots > s_n \dots$$

A to je spor: není možné napsat nekonečnou posloupnost kladných čísel, která by splňovala takový řetězec nerovností; od jistého místa musí být čísla s_n záporná."

„Nejsem si jist, zdali jsem to pochopil," řekl jsem, což byla chyba. Archimedes mi se sebezapřením zopakoval celou úvahu, aby povzbudil mou chápavost. Ušetřím čtenáře tohoto opakování, zvláště proto, že se mi po něm stejně v hlavě nerozjasnilo.

„Inu budeš o tom muset přemýšlet," vzdal se nakonec Archimedes. Doporučuji čtenářům totéž. Přemýšlejte o tom, to jest nevzdávejte se.

Byl jsem již téměř na odchodu, když mě Archimedes chytil za paži.

„Zadrž," řekl. „Mám pro tebe problém."

Archimedes poodešel a zvedl svůj ozubený mechanismus. Připojil drát na malém kolečku do polohy č. 1. Pak připojil velké kolo k hodinám. Nakonec k mému největšímu zděšení připojil další konce drátů k baterii a k tomu, co nepochybně vypadalo jako výbušné zařízení. Teprve teď jsem si náhle uvědomil, že Archimedes zamkl dveře od suterénu již při mém příchodu.

„O. K. Einsteine," řekl chladně. „Právě jsem ti dokázal, že se to maličké chystá vybouchnout. Řekni mi, kdy to nastane a já to vypnu. Jinak bude suterén potřebovat novou fasádu. Tady je tužka, pokud ji potřebuješ."

„Zbláznil ses? Nejsem tu dole přece sám, bráško. Chceš snad vyhodit do vzduchu i sám sebe?"

„Vypadám snad na to, že bych si dělal starosti? Mám k tobě úplnou důvěru, Einsteine. Ale měl bys raději už začít — uběhla už skoro celá minuta."

Literatura doporučená redakcí PMFA:

JIŘÍ SEDLÁČEK: *Co víme o přirozených číslech.* Škola mladých matematiků, sv. 2, Mladá fronta, Praha 1977.

A. O. GEL'FOND: *Neurčité rovnice.* Populární přednášky o matematice, sv. 6, Praha 1956.