

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Vladimír Burjan

Evaluácia a hodnotenie vo vyučovaní matematiky, súčasné svetové trendy (2. časť)

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 37 (1992), No. 4, 229--235

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/137564>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1992

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

vyučování

EVALUÁCIA A HODNOTENIE VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY, SÚČASNÉ SVETOVÉ TRENDY

2. časť

Vladimír Burjan, Bratislava

V 1. časti príspevku, ktorá bola uverejnená v minulom čísle, som informoval o medzinárodnej konferencii na tému Hodnotenie vo vyučovaní matematiky a jeho vplyvy, ktorá sa konala na podnet Medzinárodnej komisie pre vyučovanie matematiky (ICMI) v apríli 1991 v Španielsku. V tejto druhej časti sa pokúsím sformulovať niekoľko základných všeobecných trendov v danej oblasti tak, ako som ich vypozeroval z referátov a diskusií na uvedenej konferencii.

1. Od subjektívneho hodnotenia k objektivizovanému hodnoteniu podopretému teóriou

V niektorých krajinách (vrátane ČSFR) je hodnotenie vedomostí žiakov ponechané výlučne na učiteľov, ktorí žiakov učia. Takéto hodnotenie môže byť problematické nielen tým, že učiteľ je v hodnotiacej situácii zaujatý (uvedomuje si, že nepriamo hodnotí aj vlastnú prácu), ale aj tým, že učitelia zväčša nie sú

na hodnotenie žiadnym spôsobom odborne pripravovaní (ani počas vysokoškolskej prípravy, ani neskôr v priebehu praxe). Dôsledkom je, že každý učiteľ hodnotí žiakov podľa vlastných subjektívnych predstáv o tom, čo a ako by mal u žiakov hodnotiť. To môže viesť k tomu, že sa učiteľ pri hodnotení zameriava na nepodstatné veci, že nepoužíva primerané techniky, že je buď príliš náročný, alebo naopak príliš mierny, že jeho hodnotenie nie je validné ani reliabilné. Takéto subjektívne hodnotenia jednotlivých učiteľov potom nie je možné zmysluplne medzi sebou porovnávať. Všetky uvedené dôvody vedú k tomu, že sa v mnohých krajinách pokúšajú o odbornú prípravu učiteľov v otázkach hodnotenia a ich usmernenie v tejto oblasti (napríklad vypracovaním štandardných hodnotiacich techník, ktoré sú všetci učitelia povinní používať). Takto „centrálne“ odporúčané techniky sa od bežných metód používaných učiteľmi odlišujú aj tým, že sú podopreté najnovšími poznatkami didaktiky matematiky, pedagogiky, kognitívnej psychológie a pod.

2. Od globálneho hodnotenia k diferencovanému (od skalára k vektoru)

Trend súvisí so snahou preniknúť hlbšie do kognitívnych mechanizmov učenia sa matematiky a s úsilím čo najpresnejšie lokalizovať prípadné nedostatky, ale aj zaznamenať progres.

Diferencovanie hodnotenia sa môže diať buď podľa jednotlivých partií učiva či matematiky (v podstate britský model), alebo podľa jednotlivých druhov kognitívnych operácií. Najzákladnejšie štruktúrovania, ktoré sa vyskytujú, rozlišujú:

RNDr. VLADIMÍR BURJAN (1960) je pracovníkom Výskumného ústavu pedagogického, Kutlíkova 17, 852 55 Bratislava.

1. konceptuálne porozumenie (úroveň osvojenia si pojmov),
2. zvládnutie činností (operácií, procedúr, algoritmov).

Veľmi často ešte pribúdajú:

3. stratégie riešenia problémov,
4. úroveň argumentácie.

Mnohé školské systémy aj po zavedení diferencovaného hodnotenia žiakov (v podobe vektora) naďalej používajú výsledné hodnotenie vo forme jednej známky (stupňa), čím vzniká **problém agregácie** (skombinovania) dielčích hodnotení do jedného stupňa (priradenie skalára vektoru).

3. Od hodnotenia vzťahujúceho výsledky individuálneho žiaka k nejakej štandardizovanej kvantitatívnej norme (norm-referenced assessment) **ku hodnoteniu výsledkov žiaka podľa jednotlivých kritérií** (criterion-referenced assessment)

Výber kritérií je jedným z kľúčových problémov hodnotenia. Zväčša vychádza z cieľov vyučovania a z istej teórie kognitívnych mechanizmov učenia sa matematiky. Keďže existuje mnoho rôznych teórií a ciele vyučovania matematiky sú formulované v jednotlivých krajinách rôzne, existuje široké spektrum rôznych sád kritérií, podľa ktorých sú žiaci hodnotení.

4. Od externého hodnotenia k internému (príp. s externou moderáciou)

V mnohých krajinách (najmä USA, Kanada, Veľká Británia, ...) má externé hodnotenie dlhoročné tradície. najväčšie rozmery a tiež najväčšiu „degeneráciu“ dosiahol „testovací priemysel“ v USA. Len pre zaujímavosť niekoľko čísel: V USA bolo vlni zadaných asi 200 miliónov (externých) testov; každý žiak

písal za rok asi 2,5 testu a počas štúdia absolvuje asi 30 testov. Existujú desiatky profesionálnych inštitúcií (agentúr, firiem), ktoré produkujú, zavádzajú a vyhodnocujú matematické (ale aj iné) testy na rôznych úrovniach (regionálnej, štátnej, ...). Na tento „testovací boom“ zareagoval trh bohatou ponukou kurzov, ktoré pripravujú žiakov na dobré absolvovanie testov (tento „coaching“ spočíva o. i. v psychologickú prípravu na podávanie výkonov v závažných situáciách, návodoch na elimináciu nesprávnych odpovedí a pod.). Za niektoré takéto kurzy sa platí až 800 USD. Je to ale dobrá investícia, nakoľko výsledky v testoch sa s človekom ťahajú celý život (dobré, ale aj zlé!). Podobný „testovací ošiaľ“ vládne v súčasnosti aj vo Veľkej Británii, kde sa hodnotí všetko, aj samotné hodnotenie, aj hodnotenie hodnotenia (atď. ad absurdum).

Externé hodnotenie má svoje výhody i nevýhody. Za **výhody** možno považovať napr.:

- zabezpečenie rovnakých podmienok pre hodnotenie všetkých žiakov,
- možnosť vzájomne porovnávať výsledky žiakov, tried, škôl, regiónov medzi sebou,
- väčšiu objektivnosť (pomerne malú možnosť zámerného skreslenia výsledkov učiteľmi),
- vonkajšiu kontrolu práce učiteľov a škôl.

Za **nevýhody** externého hodnotenia sa považuje napr.:

- nutnosť obmedziť sa iba na isté formy hodnotenia (napr. len písomné) a na isté typy úloh (zväčša multiple-choice, t.j. s výberom odpovedí); tým rezignovať na testovanie niektorých významných abilit,
- prílišná hromadnosť testovania neumožňuje jeho dostatočnú individualizáciu

ciu (nielen vo fáze testovania, ale najmä vo fáze analýzy výsledkov a ich komunikácie),

- veľká finančná náročnosť a náročnosť na materiálne a technické vybavenie,
- rôzne negatívne vplyvy na učiteľov i žiakov.

Tento trend môže z pohľadu našich podmienok pôsobiť prekvapivo: my žiadne skúsenosti s externým hodnotením nemáme — u nás je tradične všetko hodnotenie interné. Osobne sa však nedomnívam, že tu máme pred inými krajinami náskok, že postupne prichádzajú na to, čo my dávno vieme a praktikujeme. Som presvedčený, že externé hodnotenie v adekvátnej podobe má svoje opodstatnenie a že jeho formatívny vplyv na učiteľov je niečo veľmi cenné, čo ťažko možno nahradiť.

5. Od názorového hodnotenia, ktoré je vždy iba ukončením výuky, ku priebežnému hodnoteniu, ktoré je organickou súčasťou výučby

V tradičnej škole je hodnotenie zväčša završením vyučovania istého tematického celku (TC), prevláda teda tzv. **sumatívne hodnotenie** aplikované po preberaní daného TC. V mnohých krajinách je dnes zjavná tendencia posilniť aj iné funkcie hodnotenia, najmä jeho **diagnostickú** a **formatívnu** funkciu. **Diagnostické hodnotenie** možno využiť pred začiatkom, resp. na začiatku preberania nového TC a jeho úlohou je podať čo najpresnejší obraz o tom, ako je žiak pripravený na prijatie nového poznania (či má potrebné základné vedomosti, do akej miery má jednotlivé pojmy predferencované, či ich nemá ovládnuté deformovane a pod.) **Formatívne hodnotenie** sa

môže uplatniť priebežne, počas preberania TC a jeho hlavnou funkciou je dať informáciu žiakovi o stave jeho vedomostí a optimalizovať jeho ďalšie učenie. Týmto hodnotením sa vlastne žiak učí.

6. Od testovania faktografických vedomostí k testovaniu porozumenia a schopnosti aktívne pracovať s poznatkami; od hodnotenia nižších zručností a nácvikových činností (lower-level-skills) k hodnoteniu vyšších kognitívnych abilit (high-order-abilities)

Prílišné akcentovanie externého hodnotenia vo forme štandardizovaných testov (prevažne s otázkami s výberom odpovedí) viedlo k prílišnej orientácii na testovanie nižších zručností a nácvikových činností (napr. zvládnutie základných aritmetických operácií, algoritmických činností a pod.) a k nedoceneniu vyšších kognitívnych činností. Často sa overovali faktografické vedomosti, a teda najmä pamäť žiakov. V súčasnosti je naopak badateľná veľká snaha vytvoriť techniky umožňujúce diagnostikovať a hodnotiť aj náročné intelektuálne procesy. Mnohé testy sú zostavené pod heslom „To, čo študenti zabúdajú, nás nezaujíma“. Táto tendencia sa prejavuje aj v zavádzaní tzv. **open-book exams**, t.j. skúšok, pri ktorých žiaci môžu pracovať s učebnicami a ďalšou literatúrou.

Príklad klasickej úlohy, ktorá testuje faktografické vedomosti:

1. Napíš znenie Tálesovej vety.

Príklady úloh, ktoré testujú hĺbku pochopenia vety:

1. Amfiteáter má tvar polkruhu, na obvode ktorého sedia diváci a na priemere ktorého

- je pódium. Ktorý z divákov vidí pódium pod najväčším zorným uhlom?
2. Definujte kružnicu bez použitia pojmov „vzdialenosť“ a „dĺžka úsečky“.
 3. Ako súvisí Tálesova veta s konštrukciou dotýčnic ku kružnici z daného bodu?

7. Od takmer výlučného hodnotenia prostredníctvom písomných testov ku širokému spektru hodnotených aktivít: priebežná práca žiakov na vyučovaní, skupinová práca, praktická práca, projekty, vlastné malé matematické bádania (investigations) a pod.

Tzv. Cockroftova správa z roku 1982 ([3]) podala hlbokú analýzu stavu vyučovania matematiky vo Veľkej Británii. Obsahovala okrem iného výpočet rôznych aktivít, ktoré koncom 70. rokov absentovali na hodinách matematiky vo Veľkej Británii a ktoré autori považovali za vhodné do nich zaviesť. Boli medzi nimi napríklad praktická a experimentálna práca, riešenie netradičných (náročnejších) úloh, vlastné malé matematické bádania, projekty, práca v skupinách atď.

Dnes už možno konštatovať nielen to, že sa tieto druhy aktivít udomácnili na hodinách matematiky vo Veľkej Británii aj v mnohých iných krajinách, ale aj to, že sa stali organickou súčasťou hodnotenia žiakov. Ako príklad uveďme hodnotenie projektov („investigative project“), ktoré sú od šk. roku 1989/90 povinnou súčasťou vyučovania matematiky v časti austrálskych škôl (vo Victorii). Ide o samostatnú prácu žiaka na danú tému, ktorú si zvolí sám alebo si ju vyberie z množstva návrhov. Na spracovanie projektu má zhruba 10 týždňov času. Myšlienka projektov nie je nová a v mnohých školských systémoch patrí k bežne používaným formám vzdelávania. Náš medzi

ne žiaľ nepatrí. Aj preto by bolo potrebné venovať projektom oveľa viac pozornosti, než dovoľuje tento kontext. Tu len poznamenajme, že ide o veľmi efektívnu formu neformálneho vzdelávania, kde existuje prirodzená motivácia žiakov, žiaci sú počas práce na projekte permanentne aktívni, učia sa kooperovať, deliť si prácu, komunikovať vlastné myšlienky, klásť si sami otázky, písomne formulovať získané poznatky atď. Keď sa nám podarí vhodne zvoliť tému projektu tak, aby k jeho vypracovaniu bolo potrebné učivo, ktoré máme so žiakmi prebrať, umožňuje táto forma vyučovania dosahovať vytýčené vzdelávacie (i formatívne) ciele po všetkých stránkach efektívnejšie než klasické vyučovanie.

Ukážka možných východziech bodov projektu na tému „Periodicita“:

Kalendáre, astronómia (pohyby planét, komét, ...), príliv a odliv, dĺžka dňa, biorytmy, vlny — zvuk, voda, svetlo, elektrický prúd a jeho vlastnosti, mechanizmy produkujúce periodicitu (spirografy, Lissajousove krivky, ...), periodické javy v ekonomike, periodické tapety, parketáže, kryštály, aritmetika zvyškových tried, periodické funkcie, ...

Projekty sú hodnotené, a to interne (učiteľmi matematiky) s externou verifikáciou (moderáciou), ktorú vykoná skupina učiteľov z rôznych škôl. Zmyslom verifikácie je zabezpečiť rovnakú úroveň hodnotenia na všetkých školách. Pre uľahčenie práce učiteľov bol vypracovaný formulár (pozri tabuľku I), na ktorom zaznamenávajú hodnotenie žiakovho projektu. Je zaujímavé všimnúť si položky, ktoré na projekte hodnotia.

8. Od otázok s výberom odpovedi (multiple-choice) k otázkam s tvorbou odpovedi (open-response) a do-

Tabuľka I.

	Úroveň
Činnosť žiaka	vys. str.
atribút práce	niz. neprejav.

Priebeh výskumu:

1. rozpoznanie významných informácií
2. zhromažďovanie potrebných informácií
3. analyzovanie informácií
4. interpretovanie a kritické hodnotenie výsledkov
5. logickosť postupu
6. šírka alebo hĺbka bádania (investigation)

Matematický obsah:

7. matem. formulácia (interpretácia) problému, situácie
8. relevantnosť použitého matemat. aparátu
9. úroveň (náročnosť) použitej matematiky
10. používanie matem. jazyka, symboliky a konvencií
11. porozumenie a interpretácia použitej matematiky
12. správnosť, adekvátnosť použitej matematiky

Komunikácia

13. jasnosť cieľov projektu
14. definovanie použitých mat. symbolov
15. zhodnotenie bádania a závery
16. zhodnotenie záverov
17. usporiadanie a štruktúra materiálu

konca k otázkam s otvoreným koncom (open-ended)

Príklad otázky s voľbou odpovedi (multiple-choice):

Trojuholník ABC , v ktorom $|AC| = |BC| = 8$, má najväčší obsah, ak sa veľkosť uhla pri vrchole C rovná

- (A) 45 stupňom (B) 60 stupňom
 (C) 72 stupňom (D) 90 stupňom
 (E) 108 stupňom

Príklad otázky s tvorbou odpovedi (constructed response):

Dokážte, že v každom konvexnom deväťuholníku existujú aspoň dve uhlopriečky, ktoré spolu zvierajú uhol menší ako 7 stupňov.

Príklad otázky s otvoreným koncom (open-ended):

Popíš nejaké zaujímavé vlastnosti tejto tabuľky čísel:

1	3	6	10	15	21	...
2	5	9	14	20	...	
4	8	13	19	...		
7	12	18	...			
11	17	...				
16	...					
:						

Opäť trend v našich podmienkach prekvapujúci: v našom vzdelávacom systéme zatiaľ otázky s voľbou odpovedi významnejšiu úlohu nikdy nehrali a s výnimkou niektorých didaktických testov (a kedysi používaných REPEXov) sa nepoužívajú. Vo väčšine západných krajín viedla k rozšíreniu tohto typu úloh práve prax veľko-rozmernej evaluácie kvality vzdelávania. Keď chceme zadať test desaťtisícim študentov a potom ho centrálné vyhodnotiť, sme z praktických dôvodov viac-menej nútení uchýliť sa k tomuto typu otázok. Treba však podotknúť, že aj tu existujú veľké rozdiely medzi „inteligentnosťou“ jednotlivých testov a kategorické zavrňovanie otázok formátu „multiple-choice“ rozhodne nie je na mieste.

9. Od „abstraktných“ matematických úloh ku kontextovým úlohám;

od teoretických úloh k aplikačným úlohám

Pod „abstraktnými“ matematickými úlohami tu rozumieme úlohy, ktoré pojednávajú výlučne o matematických objektoch, o ich vlastnostiach a vzťahoch bez zjavnej väzby na nejaký problém reálneho života. ako príklad by mohli slúžiť úlohy typu:

- * V priestore sú dané tri body $A[a, b, c]$, $B[d, e, f]$, $C[g, h, i]$. Určite čísla x, y, z tak, aby bod $D[x, y, z]$ bol s bodmi A, B, C komplanárny.
- * Koľko je kombinácií štvrtej triedy z 9 prvkov?

Pod „kontextovými“ úlohami rozumieme úlohy, ktoré pojednávajú o objektoch reálneho sveta, alebo majú zjavnú väzbu na nejaký problém z reálneho života. Matematika v nich teda slúži ako jazyk na formulovanie problému a ako metóda na jeho riešenie. Aj vyššie uvedené „abstraktné“ úlohy možno preformulovať do „kontextovej“ podoby:

- * Obdĺžnikový stôl má tri nohy dlhé 96, 98, 99 cm. Aká dlhá má byť štvrtá noha, aby sa stôl nekýval? (Môže stáť krivo.)

(„Kontextovosť“ nesmieme zamieňať s „aplikovateľnosťou“. Úloha o nohách stola je kontextová, pretože v nej vystupujú objekty reálneho sveta — má istý „dej“. Nejde však o aplikáciu matematiky, nakoľko situácia, kedy má stôl tri rôzne dlhé nohy a treba mu dorobiť štvrtú sa v praxi ťažko vyskytne.)

- * Na lístkoch mestskej dopravy je 9 políčok, znehodnocovač v autobuse štyri z nich predieruje. Koľko existuje rôzne označených lístkov?

10. Od úloh testujúcich jednu konkrétnu vedomosť alebo abilitu ku

komplexným úlohám, riešenie ktorých vyžaduje využitie širšieho spektra vedomostí z rôznych oblastí matematiky

Príklad komplexnej (praktickej) úlohy (USA):

Žiakom ukážeme veľkú sklenenú nádobu v tvare valca a malú nádobku s kukuričnými zrnami. Ich úlohou je čo najpresnejšie odhadnúť, koľko kukuričných zŕn sa zmestí do valcovej nádoby. (Metóda riešenia nie je obmedzená, žiaci môžu použiť akékoľvek dostupné prostriedky.)

(Využite sa: meranie, objemy telies, prevody jednotiek, aritmetické operácie, narábanie s veľkými prír. číslami, zaokrúhľovanie, príp. váženie, ...)

11. Od testovania (a hodnotenia) toho, čo žiaci nevedia ku testovaniu (a hodnoteniu) toho, čo žiaci vedia

Už boli spomenuté niektoré negatívne sprievodné javy hodnotenia na psychiku žiakov, najmä tých menej úspešných. V mnohých krajinách sú štandardné testy postavené príliš náročne, takže veľká časť žiakov v nich dosahuje veľmi zlé výsledky. Ak napr. žiak v Anglii dostával známku D za to, že napísal test na 20 % bodov, nešlo o ohodnotenie preukázaných vedomostí, ale nevedomostí. Jednou z možných ciest zmiernenia tohto negatívneho psychického dopadu je tvorba gradovaných testov, z ktorých každý umožňuje získanie iba niektorých známok. Napr. vo Veľkej Británii bola vytvorená sada štyroch výstupných testov (na konci stredoškolského štúdia vo veku 16 rokov) rôznej náročnosti. Žiak podľa rozhodnutia učiteľa absolvuje dva z týchto testov z dvoch susedných hladín náročnosti, pričom je hodnotený

známkou iba, ak získa aspoň 50 % bodov.

Úroveň testu: (4 – najťažší)	Známky, ktoré zaň možno získať: (A – najlepšia známka)
4,3	A, B, C
3,2	C, D, E
2,1	E, F, G

Záverom možno konštatovať, že problematika hodnotenia je v súčasnosti jedným zo spoločných problémov takmer všetkých školských systémov sveta. Je v centre pozornosti praktikov i vedeckých pracovníkov v oblasti didaktiky, pedagogiky, psychológie. Aj pred nami stojí úloha prehodnotiť spôsoby hodnotenia používané v našich školách a pokúsiť sa posunúť ich postupne na úroveň najnovšieho poznania.

- [1] *Assessment in Mathematics Education and its Effects*. Pre-proceedings of the ICMI Conference held on 11–16 April 1991 in Calonge, Spain).
- [2] BELL, A., COSTELLO, J., KUCHEMANN, D.: *A Review of research in Mathematical Education. Part A: Research on Learning and Teaching*. Chapter 12: Evaluation and assessment, pp. 291–307. NFER-Nelson 1983.
- [3] *Mathematics counts. (The Cockcroft report.)* Great Britain. Dpt. of Education and Science (1982). London: HMSO.
- [4] HIRST, A., HIRST, K.: *Proceedings of ICME-6*. Report of the theme group „Evaluation and assessment“, pp. 253–263. Janos Bolyai Mathematical Society, Budapest 1989.
- [5] NISS, M. et. al.: *Assessment in Mathematics Education and its Effects (discussion document for an ICMI Study)*. In: ICMI Bulletin No. 27 (December 1989) et in: „l'Enseignement mathématiques“ (jar 1990).
- [6] RIDGWAY, J.: *Assessing Mathematical Attainment*. NFER-Nelson 1988.

- [7] RIDGWAY, J.: *A Review of Mathematics Tests*. NFER-Nelson 1988.

ARCHIMEDES ANDREWS
A KULIČKOVÁ STŘELA

Barry Cipra

Archimedes Andrews žongloval s golfovými míčky na střeše svého domu. Nikdy předtím jsem ho neviděl dělat něco takového.

„Hej, Einsteine, vylez nahoru!“ zavolal.

Dovolte mi nejprve něco vysvětlit. Ve skutečnosti se nejmenuji Einstein. Takto mi začal přezdívat od jisté doby Archimedes. Zdali je přezdívka myšlena jako kompliment nebo jako sarkasmus bývá různé, někdy i během jediného rozhovoru.

Pokud je mi známo, „Archimedes“ se skutečně jmenuje křestním jménem Archimedes.

„Tak polez nahoru,“ vyzval mě znovu.

Archimedův dům je jednoposchodový, má strmou střechu skrývající mansardu, kde Archimedes spí. Jak to Archimedes dokázal, že po střeše neuklouzl, jsem nepochopil, ale měl jsem skličující pocit, že se to mám právě dozvědět.

„Kde je žebřík?“ opáčil jsem.

„Žebřík není,“ odpověděl Archimedes zamyšleně, jakoby hovořil ke svým golfovým míčkům. „Jdi dokola zadem.“

Tak jsem šel. Co jsem tam našel, mě vyděsilo. Přesto, co mi řekl Archimedes, stále jsem doufal, že tam najdu žebřík. Očekával jsem v nejhorsím lano, mřížoví

Barry Cipra: *Archimedes Andrews and the Ball-Bearing Missile*. The Mathematical Intelligencer vol. 13, 44–48. Přeložil OLDŘICH KOWALSKI.

©1991 Springer-Verlag New York